VEKTÖR UZAYI

TANIM: **Boş olmayan bir V kümesi verilmiş olsun. V kümesinde $\forall (x,y) \in VxV$ için $T(x,y) = x + y$ ile tanımlı $T: VxV \to V$ fonksiyonu (toplama işlemi) ve R gerçel sayılar cismi olmak üzere, $\forall (r,x) \in RxV$ için $S(r, x) = rx$ ile tanımlı $S: RxV \to V$ fonksiyonu (skalerle çarpma işlemi) verilmiş olsun. Aşağıdaki aksiyomlar gerçekleniyorsa V kümesine R gerçel sayılar cismi üzerinde vektör uzayı ya da gerçel vektör uzayı denir ve V(R) ile gösterilir.**

1. (V, +) sistemi değişmeli gruptur.

2.
- **a) $\forall r \in R$ ve $\forall x, y \in V$ için $r(x + y) = rx + ry$**
- **b) $\forall r, s \in R$ ve $\forall x \in V$ için $(r + s)x = rx + sx$**
- **c) $\forall r, s \in R$ ve $\forall x \in V$ için $r(sx) = (rs)x$**
- **d) $1 \in R$ ve $\forall x \in V$ için $1x = x$ dir.**

V(R) vektör uzayında V kümesinin elemanlarına vektör, R kümesinin elemanlarına da skaler denir.

UYARI–1: Yukarıdaki vektör uzayı tanımında gerçel sayı cismi yerine, karmaşık sayı cismi de alınabilir. Böylece elde edilen vektör uzayına **karmaşık vektör uzayı** denir. Bu bölümde gerçel vektör uzaylarından başka vektör uzaylarını incelemeyeceğimiz için **gerçel vektör uzayı** ifadesi yerine **vektör uzayı** ifadesini kullanacağız.

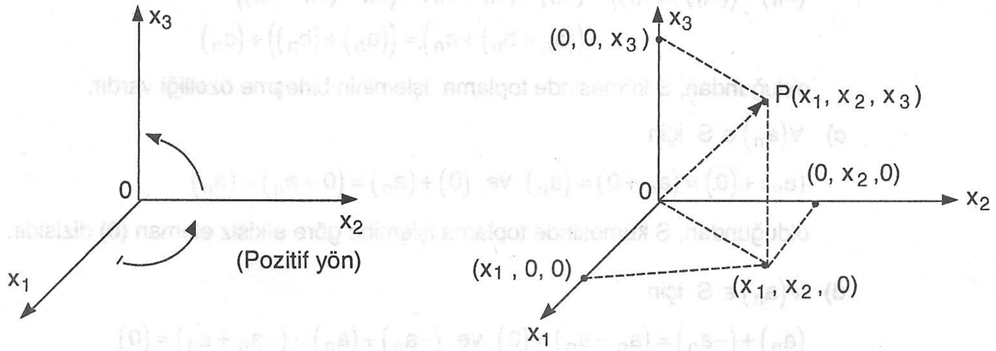
UYARI–2: $R^n = RxRx\cdots xR = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_1, x_2, \cdots x_n \in R\}$ kümesi,

i) $(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$ toplama

ii) $r \cdot (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (rx_1, rx_2, \cdots, rx_n)$ skalerle çarpma

işlemlerine göre R de bir vektör uzayıdır. Özel olarak R^2 ile düzlem, R^3 ile üç boyutlu uzay gösterilir. Bu nedenle düzlemdeki bir vektör (x_1, x_2), üç boyutlu uzaydaki bir vektör (x_1, x_2, x_3) olarak alınır.

UZAYDA DİK KOORDİNAT SİSTEMİNDE (x_1, x_2, x_3) VEKTÖRÜNÜN GÖSTERİMİ



$(x_1,0,0)$ noktasından $(0x_2,0x_3)$ düzlemine paralel bir düzlem, $(0,x_2,0)$ noktasından $(0x_1,0x_3)$ düzlemine paralel bir düzlem, $(0,0,x_3)$ noktasından $(0x_1,0x_2)$ düzlemine paralel bir düzlem çizilir. Bu üç düzlemin arakesiti (x_1,x_2,x_3) üçlüsüne karşılık gelen noktadır. Bundan böyle (x_1,x_2,x_3) **üçlüsüne karşılık gelen nokta** yerine kısaca (x_1,x_2,x_3) **noktası** diyeceğiz.

UYARI-3:
- Bütün gerçel sayı dizilerinin kümesi A olsun. A kümesi, R cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.
- R kümesi, + işlemine göre Q(Rasyonel Sayılar) üzerinde bir vektör uzayıdır.
- mxn türünden bütün matrislerin M_{mn} kümesi R cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.
- Katsayıları gerçel sayı olan tüm polinomların $R_{[x]}$ kümesi, R cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.
- $[a,b]$ aralığında tanımlı bütün gerçel değerli fonksiyonların $F[a,b]$ kümesi, R cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.
- Z/5 kümesi, R cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

ALT VEKTÖR UZAYI

TANIM: **V bir vektör uzayı ve $A \subset V$, $A \neq \emptyset$ olsun. A kümesi toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalı ise yani;**

$\forall x,y \in A$ ve $\forall r \in R$ içn

i) $x + y \in A$

ii) $rx \in A$ oluyorsa A ya, V nin bir altuzayı denir.

ÖRNEK Bütün gerçel sayı dizilerinin kümesi S olsun. Dizilerde toplama ve bir gerçel sayı ile çarpma işlemlerine göre S kümesinin, R cismi üzerinde bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM **1)** (S, +) sisteminin değişmeli bir grup olduğunu gösterelim.

a) S kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

b) $\forall (a_n),(b_n),(c_n) \in S$ için

$$(a_n)+((b_n)+(c_n)) = (a_n)+(b_n+c_n) = (a_n+(b_n+c_n))$$
$$= ((a_n+b_n)+c_n) = ((a_n)+(b_n))+(c_n)$$

olduğundan, S kümesinde toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

c) $\forall (a_n) \in S$ için

$$(a_n)+(0) = (a_n+0) = (a_n) \text{ ve } (0)+(a_n) = (0+a_n) = (a_n)$$

olduğundan, S kümesinde toplama işlemine göre etkisiz eleman (0) dizisidir.

d) $\forall (a_n) \in S$ için

$$(a_n)+(-a_n) = (a_n-a_n) = (0) \text{ ve } (-a_n)+(a_n) = (-a_n+a_n) = (0)$$

olduğundan, S kümesinde (a_n) elemanının toplamsal tersi $(-a_n)$ dir.

e) $\forall (a_n),(b_n) \in S$ için

$$(a_n)+(b_n) = (a_n+b_n) = (b_n+a_n) = (b_n)+(a_n)$$

olduğundan, S kümesinde toplama işleminin değişme özelliği vardır. Yani (S, +) sistemi değişmeli bir gruptur.

2) **a)** $\forall r \in R$ ve $\forall (a_n),(b_n) \in S$ için

$$r[(a_n)+(b_n)] = r(a_n+b_n) = (r(a_n+b_n)) = (ra_n+rb_n)$$
$$= (ra_n)+(rb_n) = r(a_n)+r(b_n) \text{ dir.}$$

b) $\forall r,s \in R$ ve $\forall (a_n) \in S$ için

$$(r+s)(a_n) = ((r+s)a_n) = (ra_n+sa_n)$$
$$= (ra_n)+(sa_n) = r(a_n)+s(a_n) \text{ dir.}$$

c) $\forall r,s \in R$ ve $\forall (a_n) \in S$ için

$$r(s(a_n)) = r(sa_n) = (r(sa_n)) = ((rs)a_n) = (r \cdot s)(a_n) \text{ dir.}$$

d) $1 \in R$ ve $\forall (a_n) \in S$ için $1 \cdot (a_n) = (1a_n) = (a_n)$ dir.

Sonuç: S kümesi, R cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

ÖRNEK $A = \{(x_1,x_2) \mid (x_1,x_2) \in R^2 \wedge x_1 - 3x_2 = 0\}$ kümesinin **R^2 nin bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM

1) $(x_1,x_2) \in A \Rightarrow x_1 - 3x_2 = 0$

$(y_1,y_2) \in A \Rightarrow + \; y_1 - 3y_2 = 0$

$$(x_1+y_1) - 3(x_2+y_2) = 0$$
$$\Rightarrow (x_1+y_1,\ x_2+y_2) \in A$$
$$\Rightarrow (x_1,x_2)+(y_1,y_2) \in A \text{ olduğundan}$$

A kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

2) $(x_1,x_2) \in A \Rightarrow x_1 - 3x_2 = 0$

$$\Rightarrow k(x_1 - 3x_2) = 0$$
$$\Rightarrow kx_1 - 3kx_2 = 0$$
$$\Rightarrow (k \cdot x_1, kx_2) \in A$$
$$\Rightarrow k(x_1,x_2) \in A \text{ olduğundan}$$

A kümesi skalerle çarpma işlemine göre kapalıdır. A kümesi R^2 nin bir alt uzayıdır.

VEKTÖRLERİN DOĞRUSAL (LİNEER) BİLEŞİMİ VE VEKTÖRLERİN ÜRETTİĞİ KÜME

V bir vektör uzayı, $v_1, v_2, v_3, \dots v_n \in V$ ve

$r_1, r_2, r_3, \dots, r_n \in R$ olmak üzere,

$r_1V_1 + r_2V_2 + r_3V_3 + \dots + r_nV_n \in V$ vektörüne $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ vektörlerinin **doğrusal (lineer) bileşimi** denir.

ÖRNEK **(2, –3) ve (–1, 4) vektörlerinin tüm doğrusal bileşimlerini yazınız.**

ÇÖZÜM $r_1, r_2 \in R$ olmak üzere bu iki vektörün tüm doğrusal bileşimleri

$$r_1(2,-3)+r_2(-1,4)=(2r_1,-3r_1)+(-r_2,4r_2)$$
$$=(2r_1-r_2,\ -3r_1+4r_2) \text{ vektörüdür.}$$

ÖRNEK (5, –7) vektörünü, (–2, 1) ve (–1, 5) vektörlerinin doğrusal bileşimi olarak yazınız.

ÇÖZÜM

$$r_1(-2,1)+r_2(-1,5)=(5,-7)$$
$$(-2r_1,r_1)+(-r_2,5r_2)=(5,-7)$$
$$(-2r_1-r_2,\ r_1+5r_2)=(5,-7)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} -2r_1-r_2&=5\\ r_1+5r_2&=-7\end{aligned}\right\} \text{ sisteminden } \begin{aligned} r_1&=-2\\ r_2&=-1\end{aligned} \text{ bulunur. Buradan}$$

$$(5,-7)=-2(-2,1)-(-1,5) \text{ yazılır.}$$

UYARI: $e_1=i=(1,0)$, $e_2=j=(0,1)$ vektörleri R^2 de

$e_1=i=(1,0,0)$, $e_2=j=(0,1,0)$, $e_3=k=(0,0,1)$ vektörleri R^3 de birim vektörleri gösterir.

R^2 deki her (x_1,x_2) vektörü $(x_1,x_2)=x_1e_1+x_2e_2$

$$(x_1,x_2)=x_1i+x_2j$$

R^3 deki her (x_1,x_2,x_3) vektörü $(x_1,x_2,x_3)=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$

$$(x_1,x_2,x_3)=x_1i+x_2j+x_3k$$

biçiminde birim vektörlerin doğrusal bileşimi olarak yazılır.

TANIM: V bir vektör uzayı ve $v_1, v_2, v_3, \dots v_n \in V$ olsun.

$v_1, v_2, v_3 \dots v_n$ vektörlerinin doğrusal bileşimlerinin oluşturduğu

$U=\{r_1v_1+r_2v_2+r_3v_3+\cdots+r_nv_n : r_1,r_2,r_3,\cdots,r_n \in R\}$ kümesine $v_1, v_2, v_3 \dots, v_n$ vektörlerinin ürettiği (gerdiği) küme, $\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$ kümesine de U kümesinin üreteci denir. U, V nin bir alt uzayıdır.

ÖRNEK R^3 de (1, –1, 0) ve (2, 0, 3) vektörlerinin **gerdiği alt uzayı bulunuz.**

ÇÖZÜM (1, –1, 0) ve (2, 0, 3) vektörlerinin gerdiği alt uzay

$\{r_1(1,-1,0)+r_2(2,0,3): r_1, r_2 \in R\}$ dir. Alt uzayın herhangi bir vektörü (x,y,z) olsun. x, y, z arasındaki bağıntı alt uzayın denklemini verir. (Det. = 0)

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$-3x+2z-3y=0$

$3x+3y-2z=0$

$$(x,y,z)=r_1(1,-1,0)+r_2(2,0,3)$$
$$=(r_1,-r_1,0)+(2r_2,0,3r_2)$$
$$=(r_1+2r_2,-r_1,3r_2) \text{ den}$$

$x=r_1+2r_2,\ y=-r_1,\ z=3r_2$ dir.

$r_1=-y \quad r_2=\frac{z}{3}$ değerleri $x=r_1+2r_2$ de yerine konursa

$$x=-y+2\cdot\frac{z}{3} \Rightarrow 3x=-3y+2z$$
$$\Rightarrow 3x+3y-2z=0$$ elde edilir ki bu denklemde gerilen alt uzayın denklemidir .

VEKTÖRLERİN DOĞRUSAL BAĞIMLILIĞI VE DOĞRUSAL BAĞIMSIZLIĞI

V bir vektör uzayı ve $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ olsun

i) $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ sayılarından en az biri sıfırdan farklı olmak üzere,

$r_1v_1+r_2v_2+\ldots+r_nv_n=0$ koşulu sağlanıyorsa $v_1, v_2, \ldots, v_n$ **vektörleri doğrusal bağımlıdır** denir.

ii) $r_1v_1+r_2v_2+\ldots+r_nv_n=0$ eşitliği yalnız $r_1=r_2=\ldots=r_n=0$ için sağlanıyorsa $v_1, v_2, \ldots, v_n$ **vektörleri doğrusal bağımsızdır** denir.

> **UYARI:** i) R^n de alınan n tane vektörün bileşenlerinin alt alta yazılmasıyla elde edilen n boyutlu determinantın değeri sıfır ise vektörler doğrusal bağımlı, sıfırdan farklı ise doğrusal bağımsızdır. Doğrusal bağımlı vektörler uzayı germezler. Doğrusal bağımsız vektörler uzayı gererler.
>
> ii) n boyutlu uzayda n + 1 tane vektör daima doğrusal bağımlıdır.

ÖRNEK R^2 de (3, – 4) ve (2, 5) vektörleri **doğrusal bağımlı mıdır?**

ÇÖZÜM i) $r_1, r_2 \in R$ ve $(0,0) \in R^2$ olmak üzere,

$$r_1(3,-4)+r_2(2,5)=(0,0)$$

$$\left.\begin{aligned} 3r_1+2r_2&=0 \\ -4r_1+5r_2&=0 \end{aligned}\right\}$$ sisteminden $r_1=r_2=0$ bulunur ki vektör doğrusal bağımsızdır .

ii) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15+8=23 \neq 0$ olduğundan doğrusal bağımsızdır .

ÖRNEK R^2 de (1, 3) ve (5, 15) vektörleri **doğrusal bağımlı mıdır?**

ÇÖZÜM Vektörlerin bileşenlerinin oluşturduğu determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} = 15 - 15 = 0$$ olduğundan vektörler doğrusal bağımlıdırlar.

ÖRNEK R^3 de (1,2,3), (0,1,4), (2,0,3) **vektörleri doğrusal bağımlı mıdır?**

ÇÖZÜM

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$$ olduğundan bu vektörler doğrusal bağımsızdırlar.

ÖRNEK (1, a – 1, 0), (b + 3, –2, 4), (–3, b, 0) vektörlerinin R^3 de doğrusal bağımlı olmaları için **a ile b arasındaki bağıntı nedir?**

ÇÖZÜM

$$\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 0 \\ b+3 & -2 & 4 \\ -3 & b & 0 \end{vmatrix} = 0$$ determinantını 3. sütuna göre açalım.

$$-4\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ -3 & b \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ -3 & b \end{vmatrix} = 0$$

$b + 3a - 3 = 0$ dan $3a + b = 3$ bulunur.

VEKTÖR UZAYININ TABANI VE BOYUTU

V vektör uzayındaki $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektörleri V yi geriyor ve doğrusal bağımsız iseler

$\{v_1, v_2 \ldots, v_n\}$ kümesine **V nin tabanı** ve n sayısına da **V nin boyutu** denir.

$\{e_1, e_2\}$ kümesi R^2 nin, $\{e_1, e_2, e_3\}$ kümesi R^3 ün birer tabanıdır. Bu tabanlara R^2 ve R^3 ün **temel tabanı** denir.

UYARI:

i) R^n de doğrusal bağımsız n tane vektör daima uzayı gerer. Bu nedenle R^n de doğrusal bağımsız n tane vektörün kümesi bu uzayın bir tabanıdır.

ii) Bir uzayın birden fazla tabanı olabilir. Ancak boyut kesinlikle tek bir reel sayıdır.

Boy (R^n) = n dir.

ii) Vektör sayısı, boyut sayısından fazla ise, vektörler doğrusal bağımlıdır.

ÖRNEK $A = \{(1,-1), (-1,0)\}$ kümesinin

a) R^2 vektör uzayının bir tabanı olduğunu gösteriniz.

b) R^2 vektör uzayının boyutu nedir.

c) (–2,4) vektörünü A tabanına göre ifade ediniz.

ÇÖZÜM a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ olduğundan vektörler doğrusal bağımsızdırlar. A kümesi R^2 nin bir tabanıdır.

b) R^2 vektör uzayında 2 tane vektör bulunduğundan boyut $(R^2) = 2$ dir.

c) $(-2,4) = a(1,-1) + b(-1,0)$

$(-2,4) = (a-b,-a) \Rightarrow a = -4 \wedge -4-b = -2 \Rightarrow b = -2$ olur.

$(-2,4) = -4(1,-1) - 2(-1,0)$ elde edilir.

ÖRNEK $\{(1,-3,2),(2,1,0),(0,-7,4)\}$ **kümesi R^3 ün bir tabanı mıdır?**

ÇÖZÜM $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 4 \end{vmatrix} = 0$ olduğundan vektörler doğrusal bağımlıdır. Doğrusal bağımlı üç vektör R^3 de taban oluşturamaz.

DOĞRUSAL (LİNEER) DÖNÜŞÜMLER

TANIM: V_1, V_2 birer vektör uzayı ve $f: V_1 \to V_2$ bir fonksiyon olsun.

i) $\forall x,y \in V_1$ için $f(x+y) = f(x) + f(y)$

ii) $\forall r \in R$ ve $\forall x \in V_1$ için $f(rx) = rf(x)$ koşulları sağlanıyorsa f ye V_1 den V_2 ye bir doğrusal dönüşüm denir.

ÖRNEK $f: R^2 \to R^2$, $f(x_1,x_2) = (2x_1, 4x_2)$ **bir doğrusal dönüşüm müdür?**

ÇÖZÜM i) $x = (x_1,x_2) \in R^2 \wedge y = (y_1,y_2) \in R^2$ için

$$
\begin{aligned}
f(x+y) &= f(x_1+y_1, x_2+y_2) \\
&= (2(x_1+y_1), 4(x_2+y_2)) \\
&= (2x_1+2y_1, 4x_2+4y_2) \\
&= (2x_1+4x_2) + (2y_1+4y_2) \\
&= f(x_1,x_2) + f(y_1,y_2) \\
&= f(x) + f(y)
\end{aligned}
$$

ii) $f(rx) = f(rx_1, rx_2) = (2rx_1, 4rx_2) = r(2x_1, 4x_2)$

$= rf(x_1,x_2) = rf(x)$ olduğundan f doğrusal dönüşümdür.

UYARI: $f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = (?,?,\cdots)$ dönüşümünde ? işaretli yerlerde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lerin birer doğrusal bileşimi varsa f bir doğrusal dönüşümdür.

DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLERİN MATRİS GÖSTERİMİ

$f: R^n \to R^m$ doğrusal dönüşümünde $x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in R^n$ olmak üzere $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$ vektörünün f doğrusal dönüşümü altında görüntüsü

$$f(x) = x_1 \cdot f(e_1) + x_2 \cdot f(e_2) + \dots + x_n \cdot f(e_n) \text{ dir.}$$

$$f(e_1) = f(1,0,0,\dots,0) = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})$$

$$f(e_2) = f(0,1,0,\dots,0) = (a_{12}, a_{22}, \dots a_{m2})$$

$$\vdots$$

$$f(e_n) = f(0,0,0\dots1) = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}) \text{ olsun}$$

$f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ vektörlerini sütun vektörleri olarak alalım ve $f(x)$ i yeniden yazalım.

$$f(x) = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

olur ki buradaki

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ matrisine **f doğrusal dönüşümünün matrisi** denir.

UYARI: R^n den R^m ye tanımlı f doğrusal dönüşümüne karşılık gelen matris mxn türündedir.

ÖRNEK $f: R^2 \to R^3$

$f(x_1, x_2) = (x_1 - 3x_2, -4x_2, -2x_1 + x_2)$ dönüşümüne **karşılık gelen matrisi yazınız.**

ÇÖZÜM f dönüşümünün matrisi 3x2 türündedir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

ÖRNEK $g: R^3 \to R^2$, $g(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2, x_1 + 3x_2 - 2x_3)$ dönüşümüne karşılık gelen matrisi yazınız.

ÇÖZÜM g dönüşümünün matrisi 2x3 türündedir.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

UYARI: f ve g iki doğrusal dönüşüm ve f nin matrisi A, g nin matrisi B olsun.

$f \pm g$, fog dönüşümleri tanımlı ise

i) $f \pm g$ dönüşümünün matrisi $A \pm B$

ii) kf dönüşümünün matrisi $k.A (k \in R)$

iii) fog dönüşümünün matrisi A.B dir.

iv) Her doğrusal dönüşüme bir matris, her matrise bir doğrusal dönüşüm karşı gelir. Sütun sayısı tanım kümesinin boyutunu, satır sayısı ise değer kümesinin boyutunu belirler.

ÖRNEK $f: R^2 \to R^2, f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$

$g: R^2 \to R^2, g(x_1, x_2) = (2x_1, 3x_2)$ dönüşümleri veriliyor.

$f + g$, $f - g$, $2f - g$, fog , gof ve $(fog)(1,2)$ dönüşümlerinin matrislerini yazınız.

ÇÖZÜM f nin dönüşüm matrisi : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

g nin dönüşüm matrisi : $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ olur.

$$f + g = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f - g = A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$2f - g = 2A - B = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$fog = A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$gof = B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(fog)(1,2) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMÜN TERSİ

V_1, V_2 birer vektör uzayı, $f: V_1 \to V_2$ bir doğrusal dönüşüm ve $g: V_2 \to V_1$ olsun

$fog: V_2 \to V_2$, $gof: V_1 \to V_1$ birer birim fonksiyon ise g de bir doğrusal dönüşümdür.

g ye f nin tersi denir ve $g = f^{-1}$ yazılır.

f dönüşümünün matrisi A ise, f^{-1} ters dönüşümün matrisi A^{-1} dir.

ÖRNEK $f: R^2 \to R^2$, $f(x_1,x_2) = (3x_1 - x_2, -2x_1 + 4x_2)$ doğrusal dönüşümü için **f^{-1} ters dönüşümünün matrisini bulunuz.**

ÇÖZÜM f nin matrisi $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ olduğundan f^{-1} in matrisi: $\det A = 12 - 2 = 10 \neq 0$ olup,

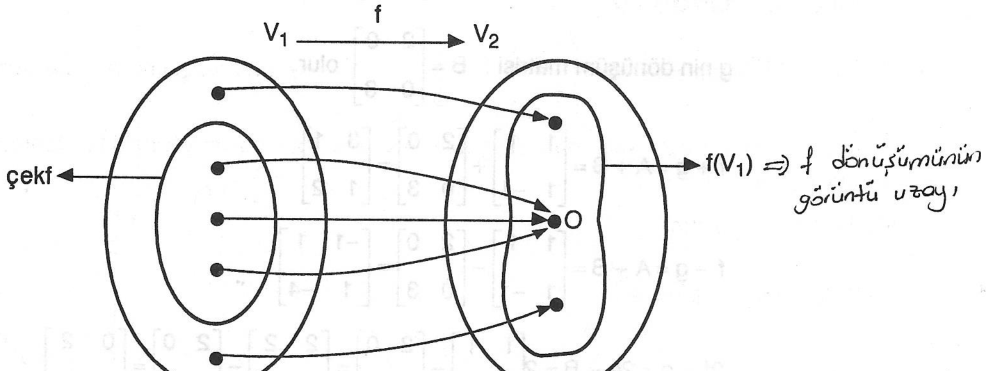
$$A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

BİR DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMÜN ÇEKİRDEĞİ VE GÖRÜNTÜ UZAYI

V_1, V_2 birer vektör uzayı ve $f: V_1 \to V_2$ bir doğrusal dönüşüm olsun. V_2 nin sıfır vektörüne dönüşen, V_1 in vektörlerinin kümesine f dönüşümünün çekirdeği denir ve çekf ile gösterilir. V_1 in tüm vektörlerinin görüntüsüne f dönüşümünün **görüntü uzayı denir** ve **$f(V_1)$** ile gösterilir.

$$\text{çekf} = \{x \in V_1 \mid f(x) = 0\}$$

$$f(V_1) = \{f(x) \mid x \in V_1\} \text{ dir.}$$



- boyut {çekf} + boyut {f(V_1)} = boyut {V_1}
- çekf = {0} ise f bire–bir dir.

ÖRNEK $f: R^2 \to R$, $f(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2$ doğrusal dönüşümünün **çekirdeğini bulunuz.**

ÇÖZÜM $f(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 = 0$ olmalıdır.

$x_2 = k$ denilirse $x_1 = 3k$ olur. Yani

$f(x_1,x_2) = 0 \Rightarrow (x_1,x_2) = (3k,k), k \in R$ dir.

$$\text{çekf} = \{(3k,k) \mid k \in R\}$$

$$= \{(3,1)\cdot k \mid k \in R\} \text{ olur.}$$

1. ÖTELEME DÖNÜŞÜMÜ

$f: R^2 \to R^2$, $f(x, y) = (x + a, y + b)$ doğrusal dönüşümüne **öteleme** denir. Yani (x,y) vektörünün (a,b) vektörü kadar ötelenmişi (x + a, y + b) dir. Öteleme dönüşümü, uzunlukları, açıları ve alanları değiştirmez. (a,b) vektörü öteleme vektörüdür.

ÖRNEK (3, – 4) öteleme vektörü, (5, –2) vektörünü **hangi vektöre dönüştürür?**

ÇÖZÜM Tanıma göre (5, –2) vektörünün (3, –4) vektörü kadar ötelenmişi,

$(5+3,(-2)+(-4))=(8,-6)$ dır.

ÖRNEK $f: R^2 \to R^2$, $f(x, y) = (x + 2, y - 3)$ ötelemesinin **tersini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x+2=X,\ y-3=Y$ den $x=X-2,\ y=Y+3$ olur.

$f^{-1}(X, Y) = (X - 2, Y + 3)$ bulunur.

ÖRNEK $f(x, y) = (x - 2, y + 3)$, $g(x, y) = (x + 1, y + 2)$ ötemeleri için **fof ve fog ötelemelerini bulunuz.**

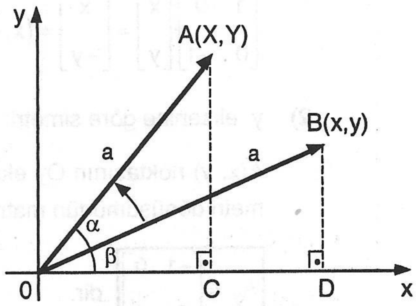
ÇÖZÜM $(fof)(x,y)=f[f(x,y)]=f(x-2,y+3)=(x-2-2,y+3+3)=(x-4,y+6)$

$(fog)(x,y)=f[g(x,y)]=f(x+1,y+2)=(x+1-2,y+2+3)=(x-1,y+5)$ bulunur.

2. DÖNME DÖNÜŞÜMÜ

$K'=A\cdot K$ dönüşümünde $A=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ve $a^2+b^2=1$ ise bu dönüşüme **dönme dönüşümü** denir.

Dönme açısı $0 \le \alpha < 2\pi$ olan başlangıç noktası etrafındaki pozitif yöndeki bir dönmede B(x,y) noktasının görüntüsü A(X,Y) ise:



$|OA|=|OB|=a$ olsun

$\widehat{OAC}$ de: $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{|OC|}{a}$

$X=|OC|=a\cdot\cos(\alpha+\beta)$ (1)

$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{|AC|}{a}$

$Y=|AC|=a\cdot\sin(\alpha+\beta)$ (2) dir.

$X = a\cos\alpha.\cos\beta - a\sin\alpha.\sin\beta$ (1)

$Y = a\sin\alpha.\cos\beta + a\cos\alpha.\sin\beta$ (2) olur.

Öte yandan $\widehat{OBD}$ de: $\cos\beta=\dfrac{|OD|}{a}$ $\wedge$ $\sin\beta=\dfrac{|BD|}{a}$

$x=|OD|=a\cos\beta$ (3) $y=|BD|=a\sin\beta$ (4) elde edilir.

(3) ve (4), (1) ve (2) de yerine konulursa,

$X=x\cos\alpha-y\sin\alpha$, $Y=x\sin\alpha+y\cos\alpha$ ya da $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ dir.

Buradaki $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ matrisi dönme matrisidir.

Düzlemdeki dönme dönüşümü, uzunluk, açı ve alanları değiştirmez.

ÖRNEK Düzlemde $\alpha = \frac{\pi}{3}$ **radyanlık pozitif yöndeki dönmenin matrisini ve (–2, 4) noktasının görüntüsünü bulunuz.**

ÇÖZÜM Dönme matrisi $= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ dir.

(–2, 4) noktasının görüntüsü ise

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}+2 \end{bmatrix} \text{ veya } \left(-1-2\sqrt{3},\, 2-\sqrt{3}\right) \text{ dür.}$$

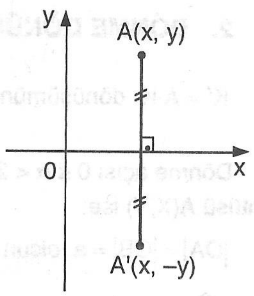
3. SİMETRİ DÖNÜŞÜMÜ

1) x eksenine göre simetri:

A(x, y) noktasının Ox eksenine göre simetriği A′(x, –y) olup bu simetri dönüşümünün matrisi

$\boxed{A_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$ dir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = (x,-y) \text{ olur.}$$

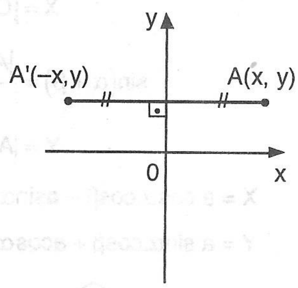


2) y eksenine göre simetri:

A(x, y) noktasının Oy eksenine göre simetriği A′(–x, y) olup bu simetri dönüşümünün matrisi

$\boxed{A_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$ dir.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = (-x,y) \text{ olur.}$$

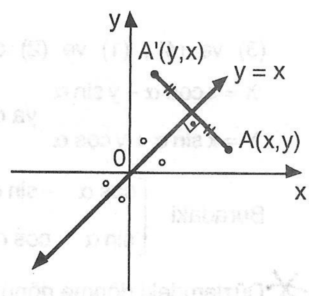


3) y = x doğrusuna göre simetri:

A(x, y) noktasının y = x doğrusuna göre simetriği A′(y, x) olup bu simetri dönüşümünün matrisi

$\boxed{A_{y=x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$ dır.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = (y,x) \text{ olur.}$$

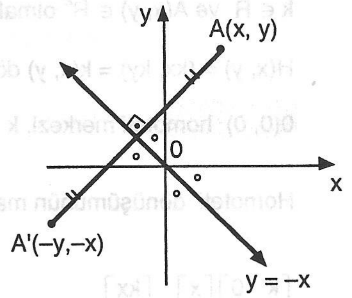


4) y = –x doğrusuna göre simetri:

A(x, y) noktasının y = –x doğrusuna göre simetriği A′(–y, –x) olup bu simetri dönüşümünün matrisi

$$\boxed{A_{y=-x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}} \text{ dır.}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix} = (-y,-x) \text{ olur.}$$

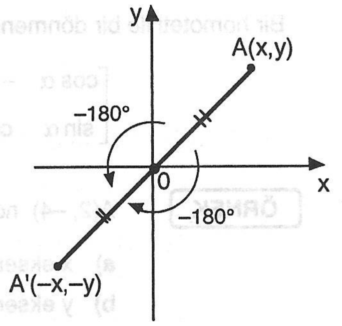


5) Orijine göre simetri: (180° ve –180° lik dönmeler)

A(x, y) noktasının orijine göre simetriği A′(–x, –y) olup bu simetri dönüşümünün matrisi

$$\boxed{A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \text{ dir.}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = (-x,-y) \text{ olur.}$$

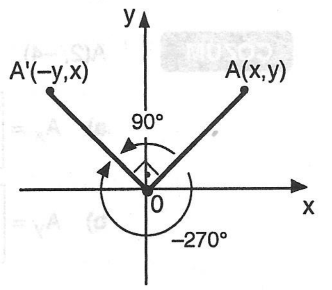


6) (+90° veya –270° lik) dönme:

Bu dönmenin matrisi:

$$\boxed{A_{90} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \text{ dır.}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = (-y,x) \text{ olur.}$$

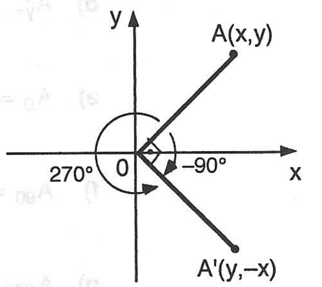


7) (+270° veya –90°) lik dönme:

Bu dönmenin matrisi:

$$\boxed{A_{270} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}} \text{ dır.}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} = (y,-x) \text{ olur.}$$



4. HOMOTETİ DÖNÜŞÜMÜ

$k \in R$ ve $A(x, y) \in R^2$ olmak üzere,

$H(x, y) = (kx, ky) = k(x, y)$ dönüşümüne **homoteti** denir.

$0(0, 0)$ homoteti merkezi, k sayısı ise homoteti oranıdır.

Homoteti dönüşümünün matrisi $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ dır.

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix} = (kx, ky) = k \cdot (x, y) \text{ olur.}$$

5. BENZERLİK DÖNÜŞÜMÜ

Bir homoteti ile bir dönmenin bileşkesine **benzerlik dönüşümü** denir. Yani benzerlik dönüşümünün matrisi

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\cos\alpha & -k\sin\alpha \\ k\sin\alpha & k\cos\alpha \end{bmatrix} \text{ dır.}$$

ÖRNEK A(2, –4) noktasının,

a) x eksenine göre
b) y eksenine göre
c) y = x doğrusuna göre
d) y = –x doğrusuna göre
e) Orijine göre simetriklerini,
f) 90° döndürüldüğünde elde edilen
g) 270° döndürüldüğünde elde edilen noktaları bulunuz.

ÇÖZÜM A(2, –4),

a) $A_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = (2, 4)$

b) $A_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = (-2, -4)$

c) $A_{y=x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = (-4, 2)$

d) $A_{y=-x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = (4, -2)$

e) $A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = (-2, 4)$

f) $A_{90} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = (4, 2)$

g) $A_{270} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} = (-4, -2)$ bulunur.

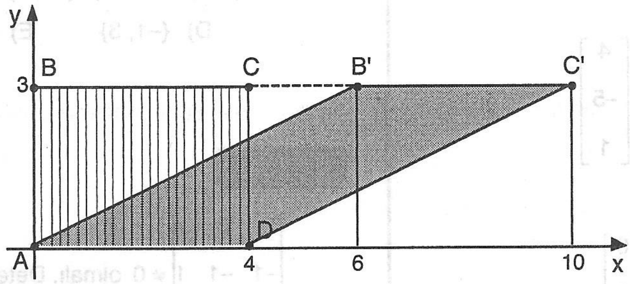
ÖRNEK

A(0, 0) , B(0, 3), C(4, 3), D(4, 0) olan dörtgenin $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dönüşüm **matrisi altındaki görüntüsünü bulunuz ve şeklini çiziniz.**

ÇÖZÜM

Noktaların tümüne dönüşüm matrisini aynı anda uygulayalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{A} \ \ \text{B} \ \ \text{C} \ \ \text{D} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 10 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{A} \ \ \text{B'} \ \ \text{C'} \ \ \text{D} \end{array}$$



ÖRNEK

$f: R^2 \to R^2$ doğrusal dönüşümünün matrisi $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ dır. $2x-3y+1=0$ **doğrusunun bu dönüşüm matrisi altındaki görüntüsü nedir?**

ÇÖZÜM

Doğru üzerindeki her hangi bir (x, y) noktasının dönüşüm matrisindeki görüntüsü $[X, Y]$ olsun.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x-y \\ 2x \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Buradan $X = 3x - y$ ve $Y = 2x$ olur.

x ve y değerleri çekilirse

$$x = \frac{Y}{2} \quad \wedge \quad X = \frac{3Y}{2} - y$$

$$y = \frac{3Y-2X}{2} \text{ bulunur.}$$

Doğru denkleminde yerine konursa,

$$2 \cdot \frac{Y}{2} - 3 \cdot \frac{3Y-2X}{2} + 1 = 0$$

$2Y - 9Y + 6x + 2 = 0$ dan

$6X - 7Y + 2 = 0$ elde edilir.

ÇÖZÜMLÜ TEST –3

1. $\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+2x_4=4 \\ 3x_2+x_3-x_4=-5 \\ 4x_1-3x_3=1 \end{array}\right\}$ **denklem sisteminin matrislerle ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

Seçenekler incelenirse kolaylıkla görülecektir.

YANIT "D"

2. $\left.\begin{array}{r} 2x+3y+az=5 \\ -x-y+z=-2 \\ x+ay+3z=7 \end{array}\right\}$ **denklem sisteminin tek çözümünün var olması için a ne olmamalıdır?**

A) {2, 3} B) {–2, 1} C) {–3, 2} D) {–1, 3} E) {–3, –2}

ÇÖZÜM

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & a \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ olmalı. Determinant açılırsa

$a^2+a-6 \neq 0$ elde edilir.

$(a+3)(a-2) \neq 0$ için $a \neq -3$

$a \neq 2$ olmalı

YANIT "C"

3. $\left.\begin{array}{r} x-3y+z=0 \\ x+ay+z=0 \\ x+2y+2z=0 \end{array}\right\}$ homogen denklem sistemi verilyor. Bu sistemin (0,0,0) çözümünden başka bir çözümünün olması için **$a \in R$ kaç olmalıdır?**

A) –6 B) –5 C) –3 D) –1 E) 1

ÇÖZÜM

$\Delta = 0$ olmalı,

$$\begin{array}{|ccc|} 1 & -3 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{array} = 0$$

$2a+2-3-(a+2-6)=0$

$a-1+4=0 \Rightarrow a=-3$ bulunur.

YANIT "C"

4. $\left.\begin{array}{l}3x_1+x_2=-3\\6x_1+2x_2=m\end{array}\right\}$ **denklem sisteminin sonsuz çözümünün olması için m kaç olmalıdır?**

A) –6 B) –4 C) –2 D) 4 E) 6

ÇÖZÜM

$\Delta=0$ ve $\Delta_1=\Delta_2=0$ olması gerekir.

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&1\\6&2\end{vmatrix}=0 \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix}-3&1\\m&2\end{vmatrix}=0\Rightarrow m=-6$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}3&-3\\6&m\end{vmatrix}=0\Rightarrow m=-6 \text{ bulunur.}$$

YANIT "A"

5. $\left.\begin{array}{r}2x-y+3z=3\\2y-3z=4\\x-6z=-2\end{array}\right\}$ denklem sisteminde x, y, z bilinmeyenlerinin determinantları sırasıyla Δ_1, **Δ_2, Δ_3 ise $\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3$ değeri kaçtır?**

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

ÇÖZÜM

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&-1&3\\0&2&-3\\1&0&-6\end{vmatrix} \text{ olduğundan}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3&-1&3\\4&2&-3\\-2&0&-6\end{vmatrix}=-54$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&3&3\\0&4&-3\\1&-2&-6\end{vmatrix}=-81$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2&-1&3\\0&2&4\\1&0&-2\end{vmatrix}=-18$$

$$\Rightarrow \Delta_1-\Delta_2+\Delta_3=-54-(-81)-18$$

$$=9 \text{ bulunur.}$$

YANIT "A"

6. Aşağıdaki kümelerden hangisi R^2 nin bir alt uzayı <u>değildir?</u>

A) $\{(x,y)\in R^2: x=2y\}$

B) $\{(x,y)\in R^2: x=y\}$

C) $\{(x,y)\in R^2: x-3y=0\}$

D) $\{(x,y)\in R^2: x-5y=0\}$

E) $\{(x,y)\in R^2: y=x-2\}$

ÇÖZÜM

$A=\{(x,y)\in R^2: y=x-2\}$ kümesinin R^2 nin bir alt uzayı olmadığını gösterelim.

$A=\{(x,y)\in R^2: x-y-2=0\}$

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A$ olsun.

$(x_1,y_1)\in A \Rightarrow \quad x_1-y_1-2=0$

$(x_2,y_2)\in A \Rightarrow + \; x_2-y_2-2=0$

$\qquad (x_1+x_2)-(y_1+y_2)-4=0$

$(x_1+x_2,\ y_1+y_2)\in A$ olsaydı,

$(x_1+x_2)-(y_1+y_2)-2=0$ eşitliği sağlanmalıydı. Öyleyse

$(x_1+x_2,\ y_1+y_2)\notin A$ dır.

Yani $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\notin A$ dır.

A kümesi toplama işlemine göre kapalı olmadığından R^2 nin bir alt uzayı değildir.

YANIT "E"

7. R^3 de $\vec{A}=(1,1,0)$ ve $\vec{B}=(0,2,-1)$ vektörlerinin gerdiği alt uzayın denklemi **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x+y+z=0$ B) $x-y-2z=0$

C) $x+y=0$ D) $x-y+z=0$

E) $x+5y+3z=0$

ZAFER YAYINLARI

ÇÖZÜM

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{c} y - x + 2z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ -y & 1 & 1 & 0 \\ & & & -x \\ & & & 2z \end{array}$$

$\vec{A}=(1, 1, 0)$ ve $\vec{B} = (0, 2, -1)$

vektörlerinin gerdiği alt uzay

$\{r_1(1,1,0)+r_2(0,2,-1): r_1, r_2 \in R\}$ dir.

Alt uzayın herhangi bir vektörü (x, y, z) olsun x, y, z arasındaki bağıntı alt uzayın denklemini verir.

$(x,y,z)=r_1(1,1,0)+r_2(0,2,-1)$

$(x,y,z)=(r_1,r_1,0)+(0,2r_2,-r_2)$

$(x,y,z)=(r_1,r_1+2r_2,-r_2)$ den

$x=r_1,\ \ y=r_1+2r_2,\ \ z=-r_2$ dir.

$r_1 = x$ ve $r_2 = -z$ değerlerini

$y = r_1 + 2r_2$ de yerine koyalım.

$y = x + 2.(-z)$

$y = x - 2z$

$x - y - 2z = 0$ elde edilir.

YANIT "B"

8. $\vec{A} = (2, [\![x]\!])$ ve $\vec{B} = (1, 4)$

vektörleri lineer bağımlı ise x in değer aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) [8, 9) B) [7, 8) C) [5, 6)

D) [1, 7) E) [1, 8)

ÇÖZÜM

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri lineer bağımlı ise vektör bileşenlerinin oluşturduğu determinantın değeri sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 2 & [\![x]\!] \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$2.4 - [\![x]\!] = 0$

$[\![x]\!] = 8$

$8 \le x < 9$

$x \in [8, 9)$ bulunur.

YANIT "A"

ZAFER YAYINLARI

9. $\vec{A} = (1, 2, 3)$, $\vec{B} = (2, 4, k)$ ve $\vec{C} = (2, 2, 3)$

vektörlerinin uzayı germemeleri için k kaç olmalıdır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

ÇÖZÜM

Doğrusal (lineer) bağımlı vektörler uzayı germezler. Öyleyse vektörlerin bileşenlerinden oluşan determinantın değeri sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & k \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & \\ & 2 & 4 & k & \\ - & 2 & 2 & 3 & + \\ - & 1 & 2 & 3 & + \\ - & 2 & 4 & k & + \end{array} = 12 + 12 + 4k - 24 - 2k - 12 = 0$$

$2k - 12 = 0$

$2k = 12$

$k = 6$ bulunur.

YANIT "D"

10. $\vec{A} = (x, y)$ vektörü R^2 de $\vec{B} = (1, -2)$ vektörünün gerdiği alt uzayın bir elemanı olduğuna göre x ile y arasındaki bağıntı **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x + 2y = 0$ B) $x + y = 0$ C) $2x + y = 0$

D) $x - 4y = 0$ E) $2x + 3y = 0$

ÇÖZÜM

R^2 de $\vec{B} = (1, -2)$ vektörünün gerdiği alt uzay V olsun.

$V = \{k(1,-2): k \in R\}$ dir.

$\vec{A} \in V \Rightarrow k \in R \wedge \vec{A}=(x,y)$ için

(x, y) = k(1, –2) yazılır.

(x, y) = (k, –2k)

$x = k \wedge y = -2k$

$-\frac{y}{2} = k$ dan

$x = -\frac{y}{2}$

$2x = -y$

$2x + y = 0$ elde edilir

YANIT "C"

11. A(3, –1) ve B(5, –7) noktaları ile

$\vec{V} = (a-1)\,\vec{e_1} - (a+7)\,\vec{e_2}$ vektörleri veriliyor.

$\vec{BA}$ ve $\vec{V}$ vektörleri lineer bağımlı ise a değeri kaçtır?

A) –6 B) –4 C) –2 D) 3 E) 5

ÇÖZÜM

$\vec{BA} = \vec{A} - \vec{B}$

$\vec{BA} = (3, -1) - (5, -7)$

$\vec{BA} = (3-5, -1+7)$

$\vec{BA} = (-2, 6)$

$\vec{V} = (a-1, -a-7)$

$\vec{BA}$ ve $\vec{V}$ vektörleri lineer bağımlı ise bileşenlerinin oluşturduğu determinantın değeri sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ a-1 & -a-7 \end{vmatrix} = 0$$

$$2a + 14 - 6a + 6 = 0$$
$$-4a + 20 = 0$$
$$4a = 20$$
$$a = 5 \text{ bulunur.}$$

YANIT "E"

12. $R^2 \to R^3$ lineer dönüşümünün matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ise f dönüşümü **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $f(x_1; x_2) = (2x_1 + x_2; -x_1; 3x_1 + x_2)$

B) $f(x_1; x_2) = (2x_1 - x_2; x_1 + 3x_2; x_1 + x_2)$

C) $f(x_1; x_2) = (2x_1 + x_2; x_1 + 3x_2; x_1 + x_2)$

D) $f(x_1; x_2) = (2x_1 - x_2; x_1 + 3x_2; x_2)$

E) $f(x_1; x_2) = (2x_1; x_1 + 3x_2; x_2)$

ÇÖZÜM

$R^2 \to R^3$ lineer dönüşümün matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x2}$$ ise f dönüşümü

$f(x_1; x_2) = (2x_1 - x_2; x_1 + 3x_2; x_2)$ biçimindedir.

YANIT "D"

13. $A = [a_{ij}]_{2x2}$ matrisi,

$\vec{X} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ vektörünü $\vec{Y} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektörüne dönüştürüyor.

Buna göre $\vec{Z} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektörünü **aşağıdakilerden hangisine dönüştürür?**

A) $\begin{bmatrix} 10 \\ -18 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -10 \\ 18 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 18 \\ -10 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -18 \\ 10 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -10 \\ -18 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

$A = [a_{ij}]_{2x2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$\begin{bmatrix} 2a-3b \\ 2c-3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a - 3b = -9 \\ 2c - 3d = 5 \end{array}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4a+6b \\ -4c+6d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(2a-3b) \\ -2(2c-3d) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-2)\cdot(-9) \\ (-2)\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -10 \end{bmatrix} \text{bulunur.}$$

YANIT "C"

14. $R^3 \to R^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_2 - x_3)$ lineer dönüşüme karşılık gelen matris **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

f dönüşümünün matrisi 2x3 türündedir.

$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_2 - x_3)$ ise

dönüşüm matrisi $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ dir.

YANIT "B"

15. $R^2 \to R^2$ ye f ve g lineer dönüşümleri

$f(x_1; x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1)$

$g(x_1; x_2) = (2x_2, x_1 - x_2)$

biçiminde tanımlanıyor.

fog dönüşümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(fog)(x_1; x_2) = (4x_2; x_2 - x_1)$

B) $(fog)(x_1; x_2) = (4x_2; x_1 - x_2)$

C) $(fog)(x_1; x_2) = (x_1 + x_2; 2x_2 - 2x_1)$

D) $(fog)(x_1; x_2) = (x_1 + x_2; 2x_1 - 2x_2)$

E) $(fog)(x_1; x_2) = (x_1 + x_2, 4x_2)$

ÇÖZÜM

$f(x_1; x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1)$ dönüşümünün matrisi

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ve

$g(x_1; x_2) = (2x_2, x_1 - x_2)$ dönüşümünün matrisi

$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ dir.

$$(fog) = A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$(fog) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ olur ki bu da

$(fog)(x_1; x_2) = (x_1 + x_2, 4x_2)$

biçiminde yazılır.

YANIT "E"

16. $f: R^2 \to R^2$, $f(x,y) = (2x, 3x - y)$ dönüşümü veriliyor. fof dönüşümünün matrisi **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

f dönüşümünün matrisi A olsun A, 2x2 türünde bir kare matristir.

$f(x,y) = (2x, 3x - y)$ ise $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ olur.

$$(fof) = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

YANIT "A"

17. f: $R^2 \to R^2$ dönüşümünün matrisi

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

olduğuna göre $f^{-1}(2,0)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

f nin dönüşüm matrisi A ise, f^{-1} in dönüşüm matrisi de A^{-1} dir.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow \det A=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4-3=1\neq 0$$

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix} \text{ olduğunu}$$

hatırlayalım. Öyleyse;

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

$$f^{-1}(2,0)=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix} \text{ olur.}$$

YANIT "A"

18. f: $R^2 \to R^3$,

$$f(x, y) = (2x + y, x - 3y, 3x - 5y)$$

dönüşümünün matrisi A ise A^T matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\\ 3 & -5\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -3 & -5\end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 5 & -3 & 1\end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & 1 & -5\end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

f: $R^2 \to R^3$, f(x,y) = (2x + y, x – 3y, 3x – 5y) dönüşümünün matrisi, yani A, 3x2 türündedir.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\\ 3 & -5\end{bmatrix}_{3x2} \text{ olup,}$$

Anın devriği (transpozesi)

A^T, 2x3 türündedir.

$$A^T=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -3 & -5\end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

YANIT "B"

19. f: $R^3 \to R^2$, doğrusal dönüşümünün matrisi

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}$$ **ise f, (1, 1, 0) vektörünü hangi noktaya dönüştürür?**

A) (1, –2) B) (1, –1) C) (1, 2)

D) (2, 1) E) (2, 2)

ÇÖZÜM

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=(1,2) \text{ bulunur.}$$

YANIT "C"

20. $f: R^2 \to R^2$ ve $g: R^2 \to R^2$ doğrusal dönüşümlerinin matrisleri sırasıyla

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $(fog)(2,-1)$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

(fog) dönüşümünün matrisi A.B dir.

$$A{\cdot}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan;

$$(fog)(2,-1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

YANIT "D"

21. $f: R^2 \to R^2$, $f(x,y) = (5x + ay, 6x - 5y)$ doğrusal dönüşümünün ters dönüşümü kendisine eşit olduğuna göre, **a kaçtır?**

A) –4 B) –3 C) –1 D) 2 E) 4

ÇÖZÜM

f doğrusal dönüşümünün matrisi A ise f^{-1} doğrusal dönüşümünün matrisi A^{-1} dir.

Yani; $A = A^{-1}$ olmalıdır.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & a \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\det A = -25 - 6a$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-25-6a} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -a \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{25+6a} & \frac{a}{25+6a} \\ \frac{6}{25+6a} & \frac{-5}{25+6a} \end{bmatrix} \text{ olur ki}$$

$$A = A^{-1} \Rightarrow \frac{5}{25+6a} = 5 \text{ den}$$

$$25 + 6a = 1$$

$$6a = -24$$

$$a = -4 \text{ elde edilir.}$$

YANIT "A"

22. $f: R^2 \to R^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - 5x_2)$ doğrusal dönüşümünün çekirdeği **aşağıdakilerden hangisidir?** ($k \in R$)

A) (k, 5k) B) (5k, k) C) (–k, 5k)

D) (5k, –k) E) (–5k, k)

ÇÖZÜM

$f(x_1, x_2) = x_1 - 5x_2 = 0$ olmalıdır.

$x_2 = k$ denilirse $x_1 = 5x_2$ den

$x_1 = 5k$ olur.

Yani;

$f(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow (x_1, x_2) = (5k, k)$, $k \in R$ dir.

$$\text{çekf} = \{(5k,k) \mid k \in R\}$$

$$\text{çekf} = \{(5,1)k \mid k \in R\} \text{ olur.}$$

YANIT "B"

23. (2, –1) öteleme vektörü **(4,3) vektörünü hangi vektöre dönüştürür?**

A) (–2, –4) B) (2, 4) C) (6, 2)
D) (2, 6) E) (6, 4)

ÇÖZÜM

(4, 3) vektörünün (2, –1) vektörü kadar ötelenmişi;

(4 + 2, 3 + (–1)) = (6, 2) dir.

YANIT "C"

24. f: $R^2 \to R^2$, f(x,y) = (x–1, y+3) ötelemesinin **tersi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $f^{-1}(x,y) = (x-1, y+3)$
B) $f^{-1}(x,y) = (x+1, y-3)$
C) $f^{-1}(x,y) = (x+1, y+3)$
D) $f^{-1}(x,y) = (-x+1, y+3)$
E) $f^{-1}(x,y) = (-x+1, -y-3)$

ÇÖZÜM

$f(x, y) = (x-1, y+3)$

$x - 1 = X \quad \wedge \quad y + 3 = Y$

$x = X + 1 \qquad y = Y - 3$ olur.

$f^{-1}(x, y) = (x+1, y-3)$ bulunur.

YANIT "B"

25. $f(x, y) = (x-4, y+1)$

$g(x, y) = (x+2, y-4)$

ötelemeleri için (fog) ötelemesi **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) (fog) (x, y) = (2x – 2, 2y – 3)
B) (fog) (x, y) = (x + 2, y + 3)
C) (fog) (x, y) = (–x + 2, y – 3)
D) (fog) (x, y) = (x – 2, –y + 3)
E) (fog) (x, y) = (x – 2, y – 3)

ÇÖZÜM

(fog) (x, y) = f[g(x, y)]
= f(x + 2, y – 4)
= (x + 2 – 4, y – 4 + 1)
= (x – 2, y – 3) bulunur.

YANIT "E"

26. Düzlemde, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ **radyanlık pozitif yöndeki dönme matrisinde (2, 4) noktasının görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(3\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ B) $(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$
C) $(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$ D) $(-\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$
E) $(-\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

ÇÖZÜM

Dönme matrisi $= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

(2, 4) noktasının görüntüsü:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \left(-\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)$$

YANIT "D"

27. R^2 de x eksenine göre simetrik dönüşümün matrisi A, y = x doğrusuna göre simetrik dönüşümün matrisi B ise **A.B matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

x eksenine göre simetrik dönüşümün matrisi;

$A_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ve

$y = x$ doğrusuna göre simetrik dönüşümün matrisi;

$B_{y=x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$A_x \cdot B_{y=x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ elde edilir.

YANIT "B"

28. R^2 de orijine göre simetrik dönüşümün matrisi A, $y = -x$ doğrusuna göre simetrik dönüşümün matrisi B dir.

Buna göre $A.B^d$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

Orijine göre simetrik dönüşümün matrisi:

$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ve

$y = -x$ doğrusuna göre simetrik dönüşümün matrisi

$B_{y=-x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ olup,

$B^d = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ dır.

$A \cdot B^d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

elde edilir.

YANIT "B"

29. Orijin noktası etrafında $\frac{3\pi}{2}$ radyanlık dönme matrisi, **bu dönme altında (–2, 4) noktasını hangi noktaya dönüştürür?**

A) (4, 2) B) (4, –2) C) (–4, 2)

D) (–4, –2) E) (2, –4)

ÇÖZÜM

Bu dönmenin matrisi,

$A_{\frac{3\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ dır.

(–2, 4) noktasının bu dönme altındaki görüntüsü

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = (4,2)$ dir.

YANIT "A"

30. $f: R^2 \to R^2$ doğrusal (lineer) dönüşümünün standart tabana göre matrisi $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ dir. **Bu dönüşüm $x + y + 1 = 0$ denklemi ile verilen doğru üzerindeki hangi noktayı kendisine eşler?**

A) (–1, 0) B) (1, –2) C) (0, –1)

D) (2, –3) E) (–2, 1)

ÇÖZÜM

$x + y + 1 = 0$ doğrusu üzerinde herhangi bir A noktası alalım A(t, –t – 1) biçimindedir.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ -t-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t-1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} t \\ -2t-t-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t-1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} t \\ -3t-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t-1 \end{bmatrix}$

$-3t - 1 = -t - 1$

$2t = 0$

$t = 0$ olur.

Öyleyse dönüşüm, $x + y + 1 = 0$ doğrusu üzerindeki A(0, –1) noktasını kendisine eşler.

YANIT "C"