İÇİNDEKİLER

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

BÖLÜM 1

FONKSİYONLAR

Yeni bölüme başlarken daha önce gördüğümüz kartezyen çarpım, bağıntı, fonksiyonlarda işlemler ve fonksiyon çeşitlerini hatırlatacağız.

SIRALI İKİLİ ; SIRALI ÜÇLÜ ; SIRALI n–Lİ :

TANIM : x ve y gibi iki elemanın öncelik sırası gözetilerek elde edilen (x,y) elemanına sıralı ikili; x, y ve z gibi üç elemanın öncelik sırası gözetilerek elde edilen (x, y,z) elemanına sıralı üçlü; $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ gibi n tane elemanın öncelik sırası gözetilerek elde edilen $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ elemanına sıralı n–li denir.

Sıralı n–lide her bir elemana bileşen denir.

(x_1, x_2, x_3)
- x_3 → 3. bileşen
- x_2 → 2. bileşen
- x_1 → 1. bileşen

(x, y)
- y → 2. bileşen
- x → 1. bileşen

SIRALI n–LİLERİN EŞİTLİĞİ :

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ ise $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$, ..., $x_n = y_n$ dir.

$(a, b, c) = (x, y, z) \Rightarrow a = x, \; b = y, \; c = z$ dir.

$(a, b) = (x, y) \Rightarrow a = x, \; b = y$ dir.

UYARI

Sıralı ikililerde, üçlülerde, ... , n–lilerde sıralama önemlidir. Sıralamada elemanlar yer değiştirirse bu Sıralı n–liler birbirinden farklı olur.

Yani $(x, y) \neq (y, x)$, $(x, y, z) \neq (y, x, z) \neq (z, x, y)$ dir.

ÖRNEK $(\log_3\sqrt{3}, \sqrt[3]{y^2}) = (x, 8)$ **ise x . y çarpımı kaçtır?**

ÇÖZÜM Sıralı ikililerin (n–lilerin) eşitliğinden $\log_3\sqrt{3} = x \Rightarrow \log_3 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \log_3 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$\sqrt[3]{y^2} = 8 \Rightarrow y^{\frac{2}{3}} = 2^3 \Rightarrow y = 2^{\frac{9}{2}}$ $\quad x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{9}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^4 = 8\sqrt{2}$ bulunur.

ÖRNEK

$\left(\sum_{k=1}^{n} c,\ \prod_{k=1}^{4} k,\ 2^{\log_2 y^3}\right) = (100c,\ 6x,\ 8)$ **ise (n + x + y) toplamı kaçtır?**

ÇÖZÜM

Sıralı üçlülerin (n–lilerin) eşitliğinden

$\sum_{k=1}^{n} c = 100\,c \Rightarrow n.\,c = 100.c \Rightarrow n = 100$;

$\prod_{k=1}^{4} k = 6x \Rightarrow 1.2.3.4 = 6.x \Rightarrow x = 4$;

$2^{\log_2 y^3} = 2^3 \Leftrightarrow \log_2 y^3 = 3 \Rightarrow y^3 = 2^3 \Rightarrow y = 2$ olur.

$n + x + y = 100 + 4 + 2 = 106$ bulunur.

İKİ KÜMENİN KARTEZYEN ÇARPIMI :

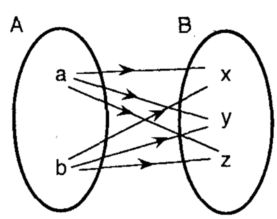
TANIM : A ve B boş kümeden farklı iki küme olsun. $x \in A$ ve $y \in B$ olmak üzere bütün (x, y) ikililerin kümesine A ile B nin **kartezyen çarpımı** denir. A x B biçiminde gösterilir. Buna göre ;

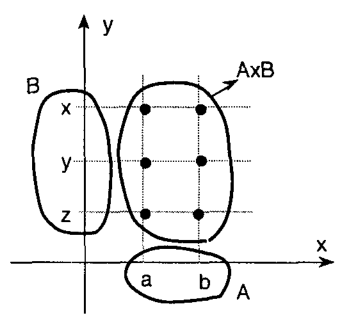
$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \text{ ve } y \in B\}$ dir.

ÖRNEK

A = {a, b} , B = {x, y, z} ise **A x B ve B x A kümelerini bulunuz.**

ÇÖZÜM





A x B = { (a, x) , (a, y) , (a, z) , (b, x) , (b, y) , (b, z)}

B x A = { (x, a) , (x, b) , (y, a) , (y, b) , (z, a) , (z, b)} dır.

NOT : Görüldüğü gibi kartezyen çarpımın değişme özelliği yoktur. Yani $A \times B \neq B \times A$ dır.

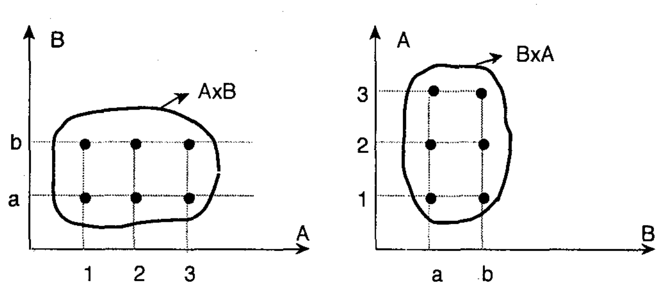
ÖRNEK

A = {1, 2, 3} , B = {a, b} ise **A x B ve B x A kümelerini bulup kartezyen şemasını çiziniz.**

ÇÖZÜM

A x B = { (1, a) , (1, b) , (2, a) , (2, b) , (3, a) , (3, b) }

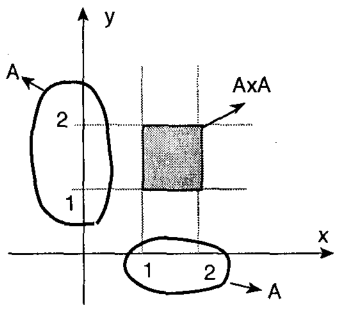
B x A = { (a, 1), (a, 2) , (a, 3) , (b, 1) , (b, 2) , (b, 3) }



ÖRNEK

$A = \{x \mid 1 \le x \le 2,\ x \in R\}$ kümesi veriliyor. **A x A kümesinin grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

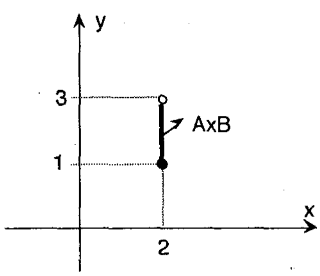


$A \times A = \{\ (x, y) \mid 1 \le x \le 2 \text{ ve } 1 \le y \le 2,\ x,y \in A\}$

ÖRNEK

$A = \{2\}$, $B = \{y \mid y \in R,\ 1 \le y < 3\}$ kümeleri veriliyor. **A x B kümesinin grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

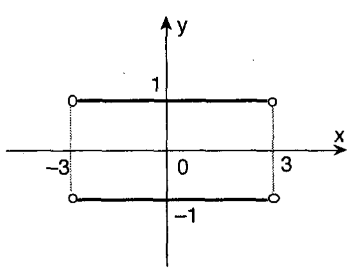


$A \times B = \{\ (x, y) \mid x = 2 \text{ ve } 1 \le y < 3,\ x \in A \text{ ve } y \in B\}$

ÖRNEK

$A = \{\ x \mid x \in R,\ |x| < 3\}$ ve $B = \{y \mid y \in R,\ |y| = 1\}$ kümeleri veriliyor. **A x B kümesinin grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM



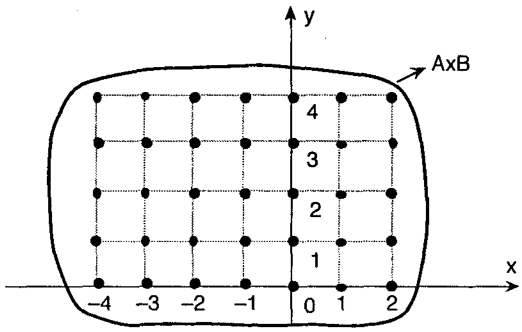
$A \times B = \{\ (x, y) \mid -3<x<3 \text{ ve } y = \mp 1,\ x \in A \text{ ve } y \in B\}$

ÖRNEK

$A = \{x \mid x \in Z,\ |1 + x| < 4\}$

$B = \{y \mid y \in N,\ 0 \le y < 5\}$ kümeleri veriliyor. **A x B kümesini koordinat sisteminde gösteriniz.**

ÇÖZÜM



$A = \{x \mid x \in Z, |1 + x| < 4\}$
$= \{x \mid x \in Z, -4 < x + 1 < 4\}$
$= \{x \mid x \in Z, -5 < x < 3\}$
$= \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
$B = \{y \mid y \in N, 0 \leq y < 5\}$
$= \{0, 1, 2, 3, 4\}$

KARTEZYEN ÇARPIMIN ÖZELLİKLERİ

❶ $A \times \varnothing = \varnothing$

❷ $A \neq B$ ise $A \times B \neq B \times A$

❸ $\begin{matrix} s(A) = a \\ s(B) = b \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} s(A \times B) = s(A) \, . \, s(B) = a \, . \, b = s(B \times A) \\ s(A \times A) = a \, . \, a = a^2 \end{cases}$

❹ $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ Birleşme Özelliği

❺ $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ Dağılma özelliği

❻ $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ Dağılma özelliği

BAĞINTI

TANIM :

A ve B boş olmayan kümeleri için A x B kümesinin her alt kümesine A dan B ye bir bağıntı denir. β sembolü ile gösterilir.

$\beta \subset A \times B \Leftrightarrow \beta$, A'dan B'ye bağıntıdır. β bağıntısı için $(x, y) \in \beta$ ise bu durum $y \, \beta x$ ile ifade edilir ve y elemanı β bağıntısı ile x elemanına bağlıdır diye okunur.

BİR BAĞINTININ TERSİ

TANIM : A ve B boş kümeden farklı iki küme olsun. A dan B ye tanımlı $\beta = \{(x, y) \mid x \in A, \ y \in B$ ve $y \, \beta x\}$ bağıntısı için B'den A'ya $\beta^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \beta\}$ bağıntısına, β bağıntısının tersi denir.

$\beta \subset A \times B$ ise $\beta^{-1} \subset B \times A$ ve $(x, y) \in \beta \Leftrightarrow (y, x) \in \beta^{-1}$ dir.

ÖRNEK $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{1, 4, 8, 9, 27\}$ kümeleri veriliyor.

a) $\beta_1 = \{ (x, y) \mid x \in A, y \in B, \ x^3 = y\}$

b) $\beta_2 = \{ (x, y) \mid x \in A, y \in B, 2x = y\}$

bağıntılarının ters bağıntılarını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) $\beta_1 = \{ (1, 1) , (2,8) , (3, 27) \} \Rightarrow \beta^{-1} = \{ (1,1) , (8,2) , (27,3) \}$

b) $\beta_2 = \{ (2,4) \} \Rightarrow \beta_2^{-1} = \{ (4,2) \}$ dir.

İKİ BAĞINTININ BİLEŞKESİ :

TANIM : A dan B'ye $\beta_1 = \{ (x, y) \mid x \in A$ ve $y \in B\}$ ve B den C'ye $\beta_2 = \{ (y, z) \mid y \in B$ ve $z \in C\}$ bağıntıları verilsin.

A'dan C'ye $\beta_2 \circ \beta_1 = \{ (x, z) \mid (x, y) \in \beta_1$ ve $(y, z) \in \beta_2\}$ olarak tanımlanan bağıntıya β_1 ile β_2 bağıntısının bileşkesi denir. "o" simgesi ile gösterilir.

ÖRNEK A= {1, 2, 3} , B = {2, 4, 5, 6} , C = {6, 8, 9, 12} kümeleri ile A'dan B'ye

$\beta_1 = \{ (1, 2) , (2, 4) , (3,6) \}$ ve B'den C'ye $\beta_2 = \{(2, 6) , (2,9) , (4,12) , (5,12) \}$ bağıntıları veriliyor. **A dan C ye $\beta_2 \circ \beta_1$ bağıntısını bulunuz.**

ÇÖZÜM $\beta_2 \circ \beta_1 = \{ (x, z) \mid (x, y) \in \beta_1$ ve $(y, z) \in \beta_2\} = \{ (1,6) , (1,9) , (2,12) \}$ bulunur.

BİR KÜMEDE TANIMLI BAĞINTILARIN ÖZELLİKLERİ :

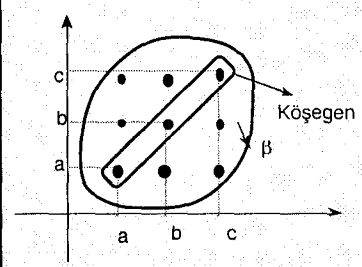
β bağıntısı, A kümesinde tanımlı olsun.

1. YANSIMA ÖZELLİĞİ :

Tanım : $\forall x \in A$ için $(x , x) \in \beta$ ise, β bağıntısına yansıyan bağıntıdır, denir.

ÖRNEK A = {a, b,c} kümesinde tanımlı $\beta = \{ (a, a) , (a, b) , (b, b) , (c, c)\}$ bağıntısı yansıyandır.

UYARI



Bir A kümesinde tanımlı ve kartezyen şemasında köşegen üzerindeki elemanları kapsayan bağıntı yansıyandır.

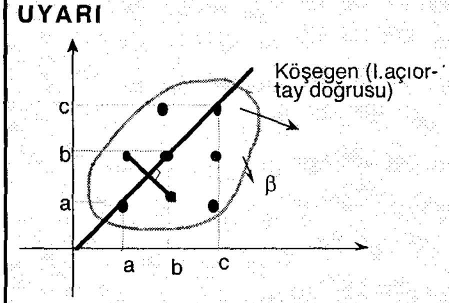
2. SİMETRİ ÖZELLİĞİ :

Tanım : $x, y \in A$ için $(x, y) \in \beta$ iken $(y, x) \in \beta$ ise, β bağıntısına simetrik bağıntıdır denir.

ÖRNEK Düzlemde doğruların dik olma bağıntısı simetriktir.

ÖRNEK Kuvvet kümesinde kümeler arasında ayrık olma bağıntısı simetriktir.

UYARI



Bir A kümesinde tanımlı β bağıntısı kartezyen şemasında köşegene göre simetrik ise β bağıntısı simetriktir.

3. TERS SİMETRİK ÖZELLİĞİ :

Tanım : $x, y \in A$ için veya $(x, y) \in \beta$ iken $(y, x) \in \beta$ ise $x = y$ bağıntısına ters simetrik bağıntı denir. $(x, y) \in \beta$ iken $(y, x) \notin \beta$ ise β bağıntısına ters simetrik bağıntıdır denir.

ÖRNEK R'de tanımlı $\beta = \{ (x, y) \mid x \leq y\}$ bağıntısı ters simetriktir. Çünkü $x < y \Rightarrow y \not< x$ dir. Tanıma göre $x = y$ olması, yani $x \leq y$ iken $y = x$ olması ters simetri özelliğini bozmaz. O halde verilen β bağıntısı ters simetriktir.

4. GEÇİŞME ÖZELLİĞİ :

Tanım : $x, y, z \in A$ için, $(x, y) \in \beta$ ve $(y, z) \in \beta$ iken $(x, z) \in \beta$ ise β bağıntısına geçişli (geçişken) bağıntıdır denir.

ÖRNEK $\beta = \{ (x, y) \mid x, y \in R, x < y\}$ bağıntısı geçişken bir bağıntıdır. Çünkü $x, y, z \in R$ için

$x < y$ ve $y < z$ ise $x < z$ dir.

ÖRNEK Düzlemde doğruların paralel olma bağıntısı geçişkendir.

UYARI :

BİR A KÜMESİNDE TANIMLI β BAĞINTISININ ELEMAN SAYISI

1. $s(A) = n$, $s(B) = m$ ise A dan B ye tanımlanan bağıntı sayısı $= 2^{m.n}$ dir.
   A dan A ya tanımlanan bağıntı sayısı $= 2^{n.n} = 2^{n^2}$ dir.
2. A dan A ya tanımlanan yansıyan bağıntı sayısı $= 2^{n^2 - n}$ dir.
3. A dan A ya tanımlanan simetrik bağıntı sayısı $= 2^{\frac{n^2+n}{2}}$ dir.
4. A dan A ya tanımlı ters simetrik bağıntı sayısı $= 2 . 2^{\frac{n^2+n}{2}} - 2^n$ dir.
5. A dan A ya tanımlı ters simetrik olupta simetrik olmayan bağıntı sayısı $= 2^{\frac{n^2+n}{2}}$ dir.
6. A dan A ya tanımlı hem simetrik, hem de ters simetrik bağıntısı sayısı $= 2^n$ dir.

DENKLİK BAĞINTISI :

Tanım : Bir A kümesinde tanımlı β bağıntısının yansıma, simetri ve geçişme özellikleri varsa, β bağıntısına **denklik bağıntısı** denir.

SIRALAMA BAĞINTISI :

Tanım : Bir A kümesinde tanımlı β bağıntısının yansıma, ters simetri ve geçişme özellikleri varsa β bağıntısına **sıralama bağıntısı** denir.

FONKSİYON :

Tanım : A ve B boş olmayan kümeleri için, A'nın her elemanını B'nin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen f bağıntısına A'dan B'ye bir **fonksiyon** denir. Bir başka deyişle $\forall\, x_1, x_2 \in A$ için $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ oluyorsa f bağıntısına fonksiyon denir.

$f : A \rightarrow B$ veya $x \rightarrow y = f(x)$ biçiminde gösterilir. Burada x'e **bağımsız değişken** y'ye de x'e **bağlı (bağımlı) değişken** denir.

Ayrıca, A kümesine **tanım kümesi;**

B kümesine **değer kümesi;**

A' nın her elemanını f ile B'nin elemanlarına eşleyen f(A) kümesine de **görüntü kümesi** denir.

ÖRNEK

A = {1, 2, 3} ve B = {a, b, c} olmak üzere; **A → B ye tanımlanan aşağıdaki bağıntılardan kaç tanesi A dan B ye bir fonksiyondur?**

A) $\beta_1 = \{ (1, a), (2, a), (3, c) \}$ **B)** $\beta_2 = \{ (1, a), (2, b), (3, b) \}$

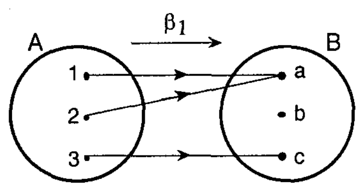
C) $\beta_3 = \{ (1, b), (2, c) \}$ **D)** $\beta_4 = \{ (1, a), (2, a), (3, b), (3, c) \}$

E) $\beta_5 = \{ (1, a), (2, a), (3, a) \}$

ÇÖZÜM

Bağıntıların herbirinin şemasını çizip yorumlarını yapalım.

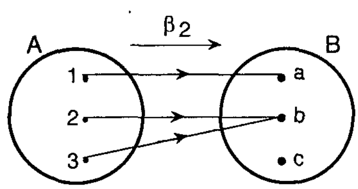
A)



Tanım kümesinde açıkta eleman kalmadığından ve A nın her elemanı B nin elemanları ile bir defa eşlendiğinden,

$\beta_1 : A \to B$ fonksiyondur.

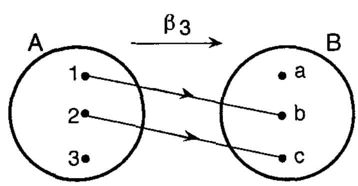
B)



β_1 için söylediklerimiz β_2 içinde geçerlidir.

$\beta_2 : A \to B$ fonksiyondur.

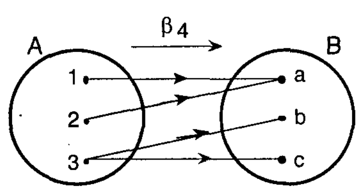
C)



3 elemanının görüntüsü olmadığı (eşlenmediği) için β_3 fonksiyon tanımına uymaz.

$\beta_3 : A \to B$ fonksiyon değildir.

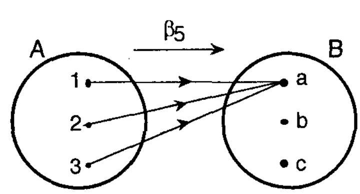
D)



3 elemanı B nin farklı iki elemanı, b ve c elemanları ile eşlendiğinden β_4 fonksiyon tanımına uymaz.

$\beta_4 : A \to B$ fonksiyon değildir.

E)



β_5 fonksiyon tanımına uyar.

A nın her elemanının β nin aynı elemanı ile eşlenmiştir.

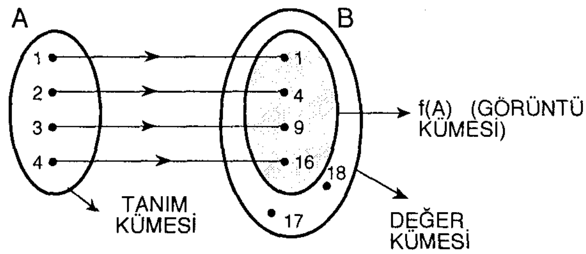
$\beta_5 : A \to B$ bir fonksiyondur.

ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi ve $B = \{1, 4, 9, 16, 17, 18\}$ kümesi veriliyor.

$f : A \to B$, $f(x) = x^2$ ise **f(A) görüntü kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM



$f(1) = 1$
$f(2) = 4$
$f(3) = 9$
$f(4) = 6$
$f(A) = \{1, 4, 9, 16\}$
$f(A) \subset B$ olduğuna dikkat ediniz.

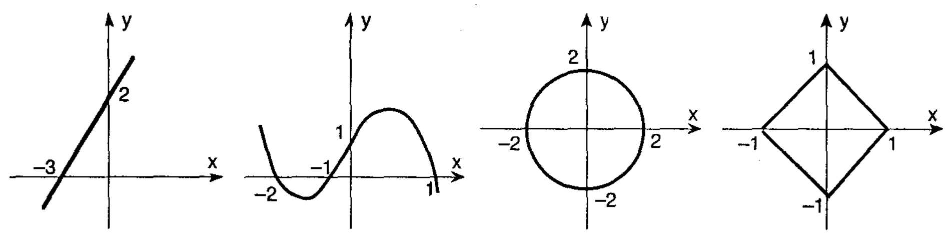
UYARI

Grafiği verilen bir bağıntının fonksiyon olup olmadığını anlamak için grafiğin tanımlı olduğu noktalardan y – eksenine paralel doğrular çizilir.

y – eksenine çizilen her paralel doğru grafiği yalnız bir noktada kesiyorsa bağıntı fonksiyondur. Aksi halde fonksiyon değildir.

ÖRNEK

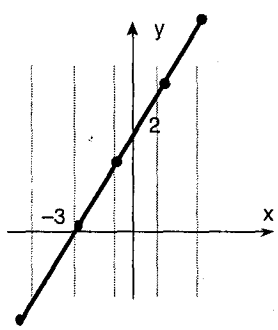
Aşağıda grafiği verilen bağıntıların hangileri bir fonksiyonun grafiğidir?



ÇÖZÜM

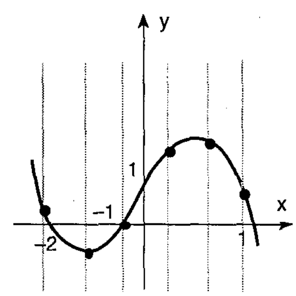
Grafiği verilen bir bağıntının fonksiyon olup olmadığını araştırırken y eksenine çizilen paralel doğruların grafiği kestiği noktalara bakacağız.

A)



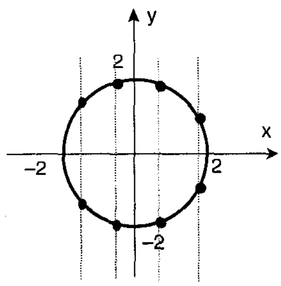
y – eksenine çizilen paralel doğrular grafiği yalnız bir noktada kestiğinden, verilen bağıntı bir fonksiyondur.

B)



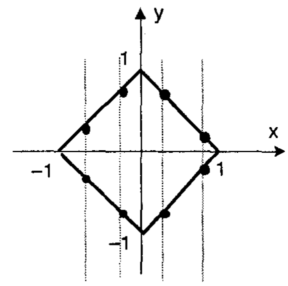
y – eksenine çizilen paralel doğrular grafiği yalnız bir noktada kestiğinden, verilen bağıntı bir fonksiyondur.

C)



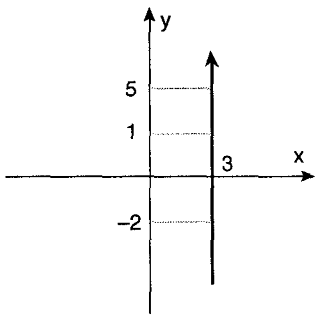
y – eksenine çizilen paralel doğrulardan en az biri grafiği farklı iki noktada kestiğinden verilen bağıntı bir fonksiyon değildir.

D)



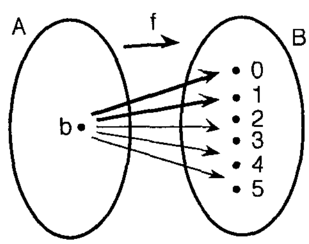
y – eksenine çizilen paralel doğrulardan en az biri grafiği farklı iki noktada kestiğinden verilen bağıntı bir fonksiyon değildir.

ÖRNEK



Şekilde grafiği verilen ve f : {3} → R tanımlanan **f bağıntısı bir fonksiyon mudur?**

ÇÖZÜM



x = 3 doğrusu üzerinde apsisi 3 ordinatı farklı olan sonsuz tane nokta vardır.

Örneğin

f(3) = 2

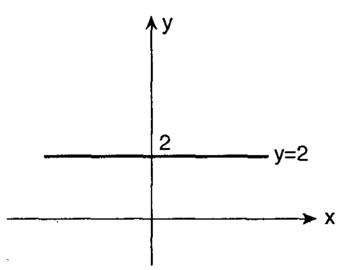
f(3) = 1

f(3) = 5

f(3) = 0 gibi sonsuz nokta bulunur.

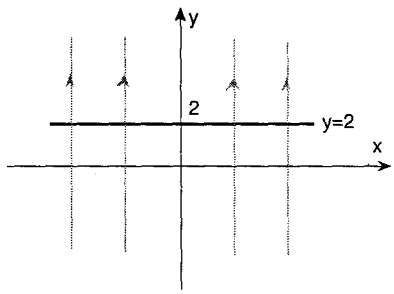
O halde verilen f bağıntısı bir fonksiyon değildir.

ÖRNEK



Şekilde grafiği verilen ve f : R → {2} tanımlı f bağıntısı bir fonksiyon mudur?

ÇÖZÜM



y eksenine çizdiğimiz paralel doğrular grafiği en-çok bir noktada kestiği için, verilen bağıntı bir fonksiyondur.

FONKSİYONLAR KÜMESİNDE İŞLEMLER

f ve g iki fonksiyon olsun.

1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

2) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

3) $(f \, . \, g)(x) = f(x) \, . \, g(x)$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$

ÖRNEK $f : R \to R$, $f(x) = x^3 + 3x$ ve $g : R \to R$, $g(x) = x^2 + 1$ fonksiyonları için

a) $f(x) + g(x) = (x^3 + 3x) + (x^2 + 1) = x^3 + x^2 + 3x + 1$

b) $f(x) - g(x) = (x^3 + 3x) - (x^2 + 1) = x^3 + 3x - x^2 - 1 = x^3 - x^2 + 3x - 1$

c) $f(x) \, . \, g(x) = (x^3 + 3x)(x^2 + 1) = x^5 + x^3 + 3x^3 + 3x = x^5 + 4x^3 + 3x$

d) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}$

FONKSİYONLAR SINIFLANDIRMASI

FONKSİYONLAR
- **Cebirsel**
  - **İrrasyonel**
  - **Rasyonel**
    - **Tamrasyonel**
    - **Kesirli rasyonel**
- **Yüksek**
  - **Üstel**
  - **Logaritmik**
  - **Trigonometrik**

1. **Cebirsel Fonksiyonlar** : $y = f(x)$ gibi bir fonksiyonda x değişkeni ile yapılan işlemler toplama, çarpma, bölme, kök veya kuvvet alma gibi işlemlerden ibaret ise f(x) fonksiyonuna **cebirsel fonksiyon** denir.

2. **Rasyonel Fonksiyonlar** : x değişkeni ile yapılan işlemler toplama, çıkarma, çarpma ve bölme gibi 4 işlemden ibaret ise bu tür cebirsel fonksiyonlara **rasyonel fonksiyon** denir.

3. **Tam Rasyonel Fonksiyonlar** : x değişkeni ile yapılan işlemler, toplama , çıkarma ve çarpmadan ibaret ise bu çeşit fonksiyonlara **tam rasyonel fonksiyonlar** denir.

4. **Kesirli Rasyonel Fonksiyonlar** : Paydası x 'e veya başka bir değişkene göre bir polinom olan fonksiyonlara denir.

5. **İrrasyonel Fonksiyonlar** : Değişkeni, kök içinde olan cebirsel fonksiyonlara denir.

6. **Yüksek (Transcendant) Fonksiyonlar** : Cebirsel olmayan fonksiyonlara yüksek fonksiyon denir.

ÖRNEKLER

CEBİRSEL FONKSİYONLAR	$y = x^5 + 8x^2 - 12$	Tam Rasyonel
	$y = a_n x^n + a_{n-1}{}^{n-1} + \ldots + a_0$	Fonksiyon
	$y = \dfrac{x^2+1}{x^3+8}$	Kesirli rasyonel fonksiyon
	$y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}$	Kesirli irrasyonel fonksiyon
YÜKSEK FONKSİYONLAR	$y = 2^x + 1$	Üstel fonksiyon
	$y = \log_2(x+1)$	Logaritmik fonksiyon
	$y = \dfrac{\sin^3 + \tan x}{\cos x - 1}$	Trigonometrik Fonksiyon

FONKSİYONLARIN TANIM, DEĞER KÜMELERİNE VE DEĞİŞKENİNE GÖRE ADLANDIRILMASI

Tanım 1. $f : R \to R$, $x \to f(x)$ fonksiyonuna bir gerçel değişkenli ve gerçel değerli fonksiyon denir.

ÖRNEK $f : R \to R$, $f(x) = x^3 + x + 1$ ile tanımlı f fonksiyonu gerçel değişkenli ve gerçel değerli bir fonksiyondur.

Tanım 2. $n \in N$ ve $n > 1$ olmak üzere $f : R \to R^n$, $x \to f(x) = (x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)$ fonksiyonuna bir gerçel değişkenli ve nokta değerli (Vektör değerli) fonksiyon denir.

ÖRNEK $f : R \to R^3$, $f(x) = (5x, x + 3, 2x - 3)$ fonksiyonu gerçel değişkenli, nokta değerli bir fonksiyondur.

$f(2) = (5.2\,,\ 2 + 3,\ 2.2 - 3) = (10, 5, 1) \in R^3$ uzayının bir noktasıdır.

Tanım 3. $n \in N$ ve $n > 1$ olmak üzere $f : R^n \to R$ fonksiyonuna n gerçel değişkenli ve gerçel değerli fonksiyon denir.

ÖRNEK $f : R^3 \to R$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - 5x_3)$ fonksiyonu 3 gerçel değişkenli ve gerçel değerli bir fonksiyondur.

$f(1, 4, -3) = (2.1 + 4 - 5.(-3)) = (2 + 4 + 15)$

$f(1, 4, -3) = 21$

Tanım 4. $n, m \in N$ ve $n > 1$, $m > 1$ olmak üzere ; $f : R^n \to R^m$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f(x_1, x_2, \ldots x_n) = (y_1, y_2, \ldots y_m)$ fonksiyonuna n boyutlu R^n uzayından m boyutlu R^m uzayına bir dönüşüm denir.

ÖRNEK $f : R^2 \to R^3$: $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2\,,\ 3x_2\,,\ 5x_1 + 3x_2)$ **fonksiyonu (1, 0) noktasını hangi noktaya dönüştürür?**

ÇÖZÜM $f(1, 0) = (1 + 0,\ 3.0\,,\ 5.1 + 3.0)$

$f(1,0) = (1, 0, 5)$ olur.

Yani iki boyutlu R^2 nin (1, 0) noktasını 3 boyutlu R^3 ün (1, 0, 5) noktasına dönüştürür.

BAZI ÖZEL KURALLARI İLE VERİLEN FONKSİYONLARIN ADLANDIRILMASI

$x, y \in R^+$ olmak üzere

1. $f(x\,.\,y) = f(x) + f(y)$ ve

$f\left(\dfrac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ özelliklerini taşıyan fonksiyonlar **LOGARİTMİK FONKSİYONLAR** dır.

$\boxed{f(x) = \log_a x}$ $(a \neq 1\,,\ a > 0)$

2. $f(x + y) = f(x)\,.\,f(y)$ ve

$f(x - y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$ özelliklerini taşıyan fonksiyonlar **ÜSTEL FONKSİYONLARDIR.**

$\boxed{f(x) = a^x}$ $(a \neq 1\,,\ a > 0)$

3. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ve

$f(x - y) = f(x) - f(y)$ özelliklerini taşıyan fonksiyonlar **DOĞRUSAL (LİNEER) DÖNÜŞÜM** adını alır.

$\boxed{y = mx}$ $(m \in R)$ bir doğrusal dönüşümdür.

4. $f(x\,.\,y) = f(x)\,.\,f(y)$

$f\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$ özelilklerini taşıyan fonksiyonlar $y = x^a$ **BİÇİMİNDEKİ POLİNOM FONKSİYONLARDIR.** $(a \in N)$

ÖRNEK $f(x\,.\,y) = f(x) + f(y)$ ve $f(4) = 2 \Rightarrow$ **f(16) kaçtır?**

ÇÖZÜM $f(x\,.\,y) = f(x) + f(y) \Rightarrow f(x) = \log_a x$ dir.

$$f(4) = \log_a 4 = 2 \Rightarrow a^2 = 4$$

$$a = 2$$

$$f(x) = \log_2 x \Rightarrow f(16) = \log_2 16 = 4 \text{ tür.}$$

ÖRNEK $f(y) = \dfrac{f(x + y)}{f(x)}$, $f(x) \neq 0$ ve $f(3) = 4$ ise **f(9) kaçtır?**

ÇÖZÜM $f(y) = \dfrac{f(x+y)}{f(x)} \Rightarrow f(x+y) = f(x) \,.\, f(y)$ olduğundan f üstel fonksiyondur.

$f(x) = a^x$ olsun

$f(3) = a^3 = 4 \Rightarrow f(9) = a^9 = (a^3)^3 = (4)^3 = 64$ bulunur.

ÖRNEK $f(x) = f(x-y) + f(y)$ ve $f(3) = 6$ ise;

a) $f(5)$ kaçtır?

b) $f^{-1}(18)$ kaçtır?

ÇÖZÜM $f(x) = f(x-y) + f(y) \Rightarrow f(x-y) = f(x) - f(y)$ olduğundan $f(x) = mx$ biçiminde bir doğrusal dönüşümdür.

a) $f(3) = 6 \Rightarrow f(3) = 3m = 6 \Rightarrow m = 2$ olur.

$m = 2 \Rightarrow f(x) = 2x$ ve

$f(5) = 2.5 = 10$ bulunur.

b) $f(x) = 2x \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2}$

$f^{-1}(18) = \dfrac{18}{2} = 9$ bulunur.

ÖRNEK $\dfrac{f(x)}{f(y)} = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ ve $f(4) = 64 \Rightarrow$ **$f(2\sqrt[3]{2})$ kaçtır?**

ÇÖZÜM $f\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{f(x)}{f(y)} \Rightarrow f(x) = x^a$ biçiminde bir polinom fonksiyondur.

$f(4) = 4^a = 64$

$4^a = 4^3 \Rightarrow a = 3$

$f(x) = x^3$

$f(2\sqrt[3]{2}) = (2\sqrt[3]{2})^3 = 2^3 \,.\, 2 = 16$ olur.

ÖRNEK $f(a \,.\, b) = f(a) + f(b) \Rightarrow$ **$f(1)$ kaçtır?**

ÇÖZÜM–1 Bu örnekte f in türünü belirlemeden $a = 1$ alalım.

$f(1.b) = f(1) + f(b)$

$f(b) = f(1) + f(b) \Rightarrow f(1) = 0$ bulunur.

ÇÖZÜM–2 $f(a.b) = f(a) + f(b) \Rightarrow$ f logaritmik fonksiyondur.

$f(x) = \log_a x$ olur.

$f(1) = \log_a 1 = 0$ bulunur.

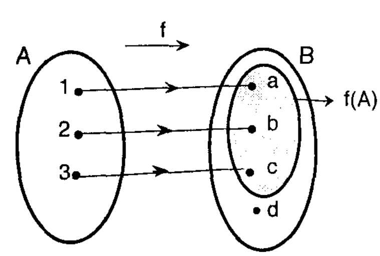
FONKSİYON ÇEŞİTLERİ

1) İÇİNE FONKSİYON

TANIM :

$f : A \to B$ fonksiyonu için $f(A) \subset B$ ve $f(A) \neq B$ ise fonksiyon içine fonksiyondur.

ÖRNEK



Yanda şema ile verilen $f : A \to B$ fonksiyonu içine fonksiyon mudur?

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = a \\ f(2) = b \\ f(3) = c \end{array}\right\} \; f(A) = \{a, b, c\}\; f(A) \subset B \text{ ve } f(A) \neq B \text{ olduğundan f içine fonksiyondur.}$$

ÖRNEK

$f : Z \rightarrow R$, $f(x) = 3x - 3$ olarak tanımlı fonksiyon içine fonksiyon mudur?

ÇÖZÜM

$\forall\, x \in Z$ için $f(x) \in Z$ dir. O halde $Z \subset R$ ve $Z \neq R$ olduğundan fonksiyon içine fonksiyondur.

ÖRNEK

$f : N \rightarrow N$, $f(x) = 2x$ **içine fonksiyon mudur?**

ÇÖZÜM

$\forall\, x \in N$ için $f(x) \in N$ dir.

Ancak $f(A) = \{0, 2, 4, 6, \ldots\ldots, 2x, \ldots\ldots.\} \subset N$ ve $f(A) \neq N$ olduğundan fonksiyon içinedir.

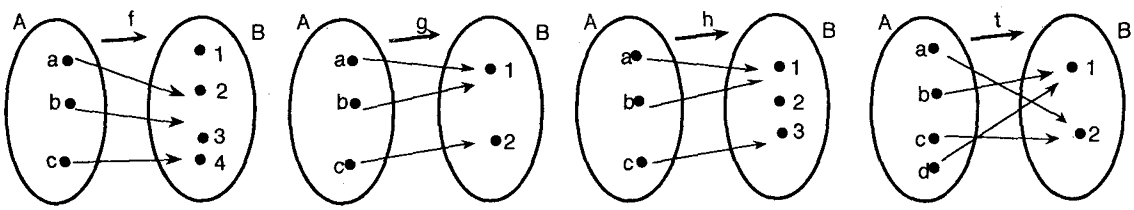
2) ÖRTEN FONKSİYON

TANIM

$f : A \rightarrow B$ fonksiyonu için $f(A) = B$ ise f örten fonksiyondur. (görüntü kümesi değer kümesine eşit ise fonksiyon örtendir.)

Başka bir yazılımla

$y = f(x)$ için $\forall\, y \in B$ için $\exists\, x \in A \Rightarrow$ f örtendir.



f örten değil ($f(A) \neq B$) g örten ($g(A) = B$) h örten değil ($h(A) \neq B$) t örten ($t(A) = B$)

ÖRNEK

$f : Z \rightarrow Z$, $f(x) = 5x + 6$ fonksiyonu örten midir?

ÇÖZÜM

$y = 5x + 6$ için $x \in Z$ varsa örtendir.

$$x = \frac{y - 6}{5}$$

$$y = 3 \text{ için } x = \frac{3 - 6}{5}$$

$$x = \frac{-3}{5} \notin z \text{ olduğundan örten değildir.}$$

ÖRNEK

$\cos : R \rightarrow [-1, 1]$, $x \rightarrow \cos x$ biçiminde tanımlanan cosinüs fonksiyonu örten midir?

ÇÖZÜM

$y \in [-1, 1]$ olmak üzere $\forall y$ için $\exists\, x \in R$ dir. Daha açık anlatımla, $[-1, 1]$ aralığından seçilen her y için $\cos x = y$ olacak biçimde en az bir tane x reel sayısı vardır. Bu nedenle fonksiyon örtendir.

ÖRNEK $f : R \to R$ tanımlı $f(x) = x^2 - 3$ **fonksiyonu örten midir?**

ÇÖZÜM $f(x) = x^2 - 3 \Rightarrow y = x^2 - 3 \Rightarrow x = \sqrt{y+3}$ olur.

$\Rightarrow y < -3$ için x değerleri bulunamaz. Yani $f(A) \subset R$ dir. O halde fonksiyon örten değildir.

ÖRNEK $f : R \setminus \{2\} \to R$ **tanımlanan** $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ **fonksiyonu örten midir?**

ÇÖZÜM $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2} \Rightarrow y = \dfrac{x+1}{x-2} \Rightarrow yx - 2y = x + 1 \Rightarrow x = \dfrac{2y+1}{y-1}$

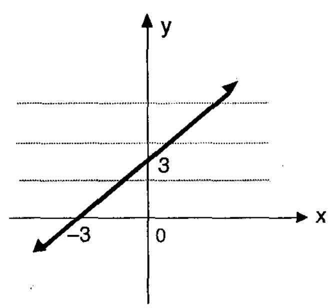
$y = 1$ için x değeri bulunamaz. Yani $f(A) \subset R$ dir. O halde fonksiyon örten değildir.

UYARI

Grafiği verilen bir fonksiyonun örten olup olmadığı araştırılırken, değer kümesi içinden seçtiğimiz her y için x eksenine paralel doğru çizdiğimizde bu paralel doğru grafiği en az bir noktada kesiyorsa, fonksiyon örten, en az bir noktada kesmiyorsa örten değildir.

ÖRNEK $f : R \to R$, $f(x) = x + 3$ **örten midir?**

ÇÖZÜM–1

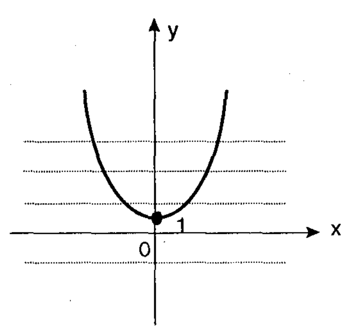


x – eksenine çizdiğimiz paralel doğrular fonksiyonun grafiğini en az bir noktada kestiği için fonksiyon örtendir.

ÇÖZÜM–2 $\forall x \in R$ için $x + 3 = y \Rightarrow x = y - 3$ olup, $f(x) \in R$ ve $f(A) = f(R) = R$ olduğundan fonksiyon örtendir.

ÖRNEK $f : R \to R$, $f(x) = x^2 + 1$ **fonksiyonu örten midir?**

ÇÖZÜM

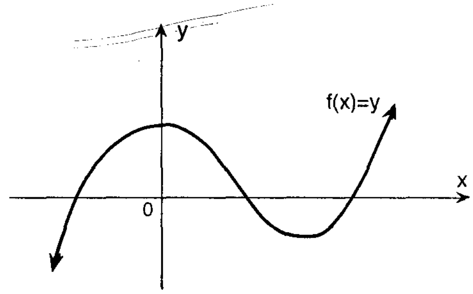


x eksenine çizilen paralel doğrulardan en az biri grafiği kesmediğinden fonksiyon örten değildir.

UYARI

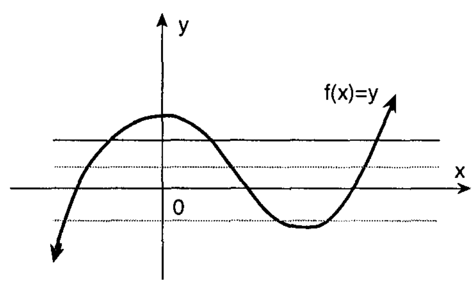
Fonksiyonun değer kümesini $[1, +\infty)$ aralığı olarak alırsak fonksiyon örten olur. Şekli dikkatle izleyerek görebilirsiniz.

ÖRNEK



Şekilde grafiği verilen ve $f : R \to R$ tanımlanan fonksiyon örten midir?

ÇÖZÜM



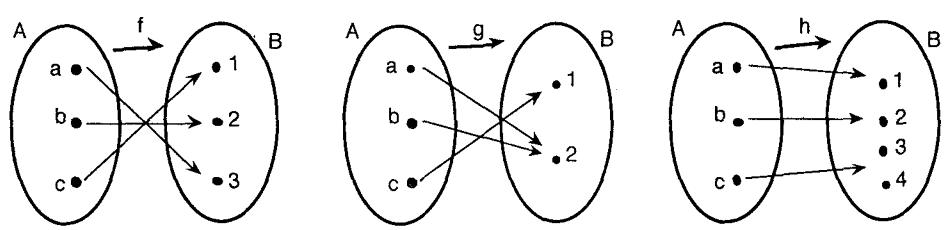
x – eksenine çizdiğimiz paralel doğrular fonksiyonun grafiğini en az bir noktada kestiği için fonksiyon örtendir.

3) BİRE - BİR (1 – 1) FONKSİYON

TANIM :

$f : A \to B$ bir fonksiyon olsun. Tanım kümesinin her elemanı, değer kümesinin farklı bir elemanı ile eşleniyorsa f fonksiyonu birebirdir denir.

Başka bir yazılımla $\forall$ a, b $\in$ A için $f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$ ise f birebirdir.

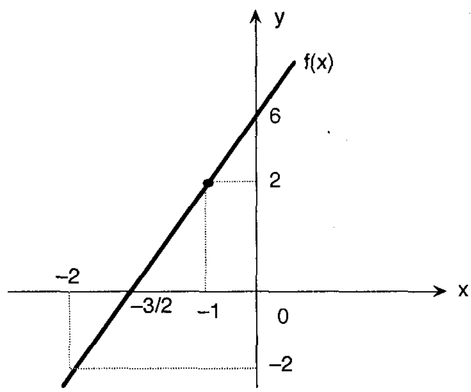


f : (1 – 1) g : (1 – 1) değil h : (1 – 1)

ÖRNEK **$f : R \to R$, $f(x) = 4x + 6$ fonksiyonu birebir midir?**

ÇÖZÜM $f(a) = f(b)$ iken $a = b$ ise fonksiyon bire–bir dir. Buna göre

$4a + 6 = 4b + 6 \Leftrightarrow 4a = 4b \Leftrightarrow a = b$ f fonksiyonu birebir dir.



$f(0) = 6$

$f(-1) = 2$

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$

$f(-2) = -2$

Farklı x lerin görüntülerinin de farklı olduğu görülüyor.

ÖRNEK ***f : R → R tanımlanan $f(x) = x^3 - x$ fonksiyonu (1 – 1) midir?***

ÇÖZÜM $x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$ olur.

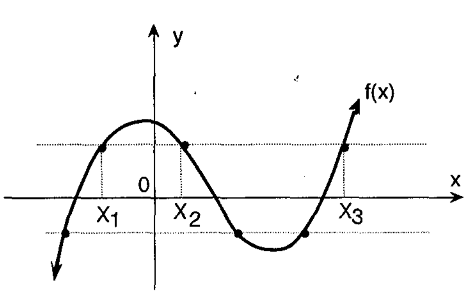
Yani $x_1 \neq x_2 \neq x_3$ iken $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ olur. $f(x) = x^3 - x$ fonksiyonu (1–1) değildir.

ÖRNEK **f : R → R tanımlanan $f(x) = x^3$ fonksiyonu (1–1) midir?**

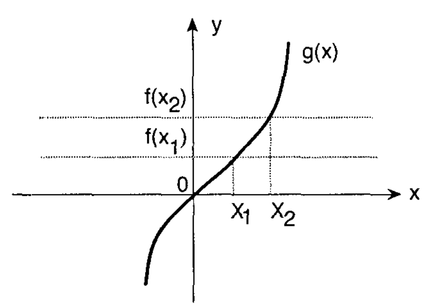
ÇÖZÜM $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ olduğundan $f(x) = x^3$ fonksiyonu (1–1) dir.

UYARI

Grafiği verilen bir fonksiyonun birebir olup olmadığı araştırılırken, x eksenine paralel doğrular çizilir. Paralel doğrular grafiği bir noktada kesiyorsa fonksiyon birebir, birden fazla noktada kesiyorsa birebir değildir.



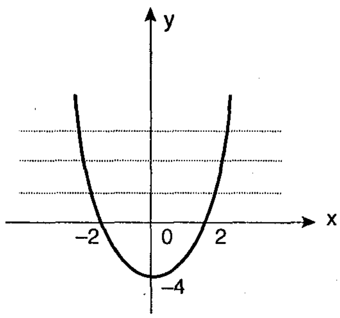
x – eksenine çizdiğimiz paralel doğrulardan en az biri fonksiyonun grafiğini farklı iki noktada kestiğinden f, (1–1) değildir.



x – eksenine çizilen paralel doğrular g nin grafiğini en çok bir noktada kestiği için g fonksiyonu (1 – 1) dir.

ÖRNEK **$f : R \to R$, $f(x) = x^2 - 4$ fonksiyonu birebir midir?**

ÇÖZÜM–1 Grafiğini çizelim.



$f(2) = 0$

$f(-2) = 0$

2 ve –2 nin görüntüsü aynı olduğundan veya x eksenine çizdiğimiz paralel doğrular, grafiği farklı iki nokta da kestiğinden fonksiyon birebir değildir.

ÇÖZÜM–2 $f(b) = f(a) \Leftrightarrow a = b$

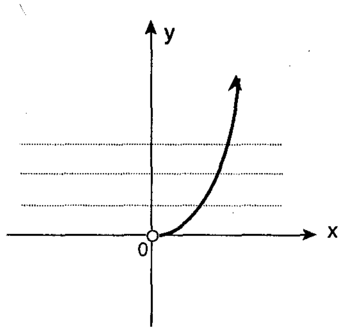
$b^2 - 4 = a^2 - 4$

$b^2 = a^2$

$|b| = |a| \Rightarrow b = a$ ve $b = -a$ olduğundan fonksiyon birebir değildir.

ÖRNEK **$f : R^+ \to R^+$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu birebir midir?**

ÇÖZÜM–1 Grafiğini çizelim.



x – eksenine çizdiğimiz paralel doğrular, grafiği en çok bir noktada keser. Bu nedenle fonksiyon birebirdir.

ÇÖZÜM–2 $f(b) = f(a) \Leftrightarrow a = b$

$b^2 = a^2 \Leftrightarrow |a| = |b|$

$a = b$ veya $a = -b$ dir. a ve b pozitif olduğu için $a = -b$ olmaz.

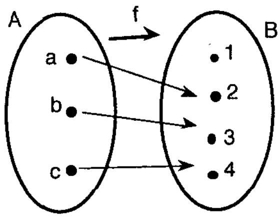
Bu nedenle, $a = b$ olmalıdır.

O halde fonksiyon birebir dir.

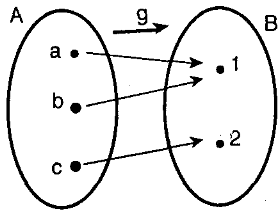
4) BİREBİR VE ÖRTEN FONKSİYON

TANIM :

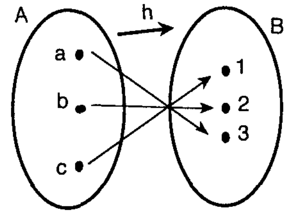
f : A → B fonksiyonu hem birebir ve hem de örten ise f birebir ve örten fonksiyondur.



f, birebir, örten değil



g, örten , birebir değil



h, birebir ve örtendir.

5) EŞİT FONKSİYONLAR

TANIM :

f ve g : A → B iki fonksiyon olsun ∀ x ∈ A için f(x) = g(x) oluyorsa f ve g fonksiyonlarına **eşit fonksiyonlar** denir.

ÖRNEK A = {0, 1} , B = {0, 3} olmak üzere ;

f : A → B , f(x) = 3x ve

g : A → B , $g(x) = 3x^2$ **fonksiyonları eşit fonksiyonlar mıdır?**

ÇÖZÜM f(1) = 3 ve g(1) = 3 , f(0) = 0 ve g(0) = 0

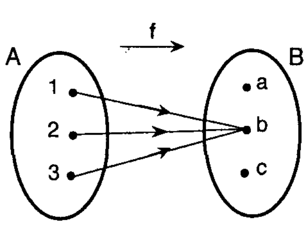
∀ x ∈ A için f(x) = g(x) olduğundan f = g fonksiyonlar eşittir.

6) SABİT FONKSİYON

TANIM :

f : A → B tanımlı fonksiyonda ∀ x ∈ A için, f(x) = a, (a ∈ B) ise f **sabit fonksiyon**dur. Kısaca f fonksiyonu, tanım kümesinin her farklı elemanını değer kümesinin aynı elemanı ile eşliyorsa f sabit fonksiyon dur.

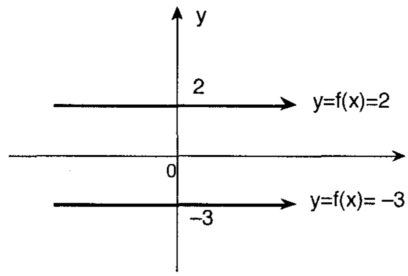
ÖRNEK



Şema ile verilen **f : A → B fonksiyonu sabit fonksiyon mudur?**

ÇÖZÜM f(1) = b , f(2) = b , f(3) = b dir. ∀ x ∈ A için f(x) = b ∈ B olduğundan f sabit fonksiyondur.

ÖRNEK



$f : R \to \{2\}$, $f(x) = 2$

$f : R \to \{-3\}$, $f(x) = -3$ fonksiyonları sabit fonksiyonlardır.

UYARI

$f : R \to R$, $f(x) = c$

Sabit fonksiyonlarının grafikleri x eksenine paralel doğrulardır.

ÖRNEK $f : R \to R$ ye tanımlanan, $f(x) = (a-3)x + 5$ fonksiyonunun sabit fonksiyon olması için **a ne olmalıdır?**

ÇÖZÜM–1 f nin sabit olması için f(x) fonksiyonunda x değişkeninin bulunmaması gerekir. Buna göre $f(x) = (a-3)x + 5$ fonksiyonunda $a - 3 = 0$ olmalıdır. $a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$ bulunur.

ÇÖZÜM–2 f(x) fonksiyonu sabit ise $f(0) = f(1)$ dir. Buna göre $(a-3) . 0 + 5 = (a-3) . 1 + 5 \Rightarrow$ $a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$ bulunur.

ÖRNEK $f : R \setminus \{2\} \to R$ ye tanımlanan $f(x) = \dfrac{2x+a}{3x-6}$ fonksiyonunun sabit olması için **a ne olmalıdır?**

ÇÖZÜM–1 f(x) sabit ise $f(0) = f(1)$ olmalıdır.

Buna göre $\dfrac{2.0+a}{3.0-6} = \dfrac{2.1+a}{3.1-6} \Rightarrow \dfrac{a}{-6} = \dfrac{2+a}{-3} \Rightarrow a = 4 + 2a \Rightarrow a = -4$ bulunur.

ÇÖZÜM–2 $f(x) = \dfrac{2x+a}{3x-6} = \dfrac{2x+a}{3(x-2)}$ olur. f(x)'in sabit olması için kesrin paydasında bulunan $(x-2)$ çarpanının, kesrin payında da olması gerekir. Buna göre $2.2 + a = 0 \Rightarrow a = -4$ bulunur.

ÖRNEK $f : R \to R$ ye tanımlanan, $f(x) = (a-2).x^2 + (b-3)x + 4$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise **a + b toplamı kaçtır?**

ÇÖZÜM f(x) fonksiyonu sabit fonksiyon ise f(x)'de x değişkenlerinin bulunmaması gerekir. Buna göre $a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$ ve $b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a + b = 2 + 3 = 5$ bulunur.

ÖRNEK

$f : R \to R$ ye tanımlanan, $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{ax^2 + bx + 10}$ fonksiyonu sabit bir fonksiyon **ise $\dfrac{a}{b}$ oranı nedir?**

ÇÖZÜM

f(x) sabit fonksiyon ise $f(0) = f(1) = f(2) = ... = f(n) = ...$ dir.

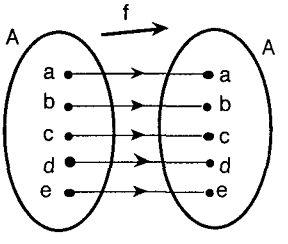
$$\frac{5}{10} = \frac{2-3+5}{a+b+10} = \frac{8-6+5}{4a+2b+10} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-2 \\ 2a+b=2 \end{cases} \Rightarrow a = 4 \quad \text{ve} \quad b = -6$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{-6} = \frac{-2}{3} \text{ bulunur.}$$

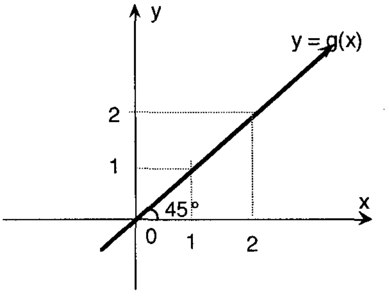
7) BİRİM (ETKİSİZ) FONKSİYON

TANIM :

$f : A \to A$ tanımlı f fonksiyonu verilsin. $\forall\, x \in A$ için $f(x) = x$ ise f fonksiyonuna **birim fonksiyon** denir. $I(x) = x$ biçiminde gösterilir.



f birim fonksiyondur.



$R \to R$, $g(x) = x$ ise g birim fonksiyondur.

ÖRNEK

$f : R \to R$ ye tanımlanan, $f(x) = (a + 1).x + b + 4$ fonksiyonu birim fonksiyon ise **a.b çarpımı kaçtır?**

ÇÖZÜM–1

f(x) birim fonksiyon ise $f(x) = (a + 1).x + b + 4$ fonksiyonunda sabit terim sıfır ve x değişkeninin önündeki çarpanın 1 olması gerekir. Buna göre,

$a + 1 = 1 \Rightarrow a = 0$ ve $b + 4 = 0 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow a.b = 0.\,(-4) = 0$ bulunur.

ÇÖZÜM–2

f(x) birim fonksiyon ise $f(1) = 1$ ve $f(0) = 0$ dır.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = (a+1).0 + b + 4 = 0 \Rightarrow b = -4 \\ f(1) = (a+1).1 + b + 4 = 1 \Rightarrow a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a.b = 0 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$f : R - \{0\} \to R$ tanımlanan $f(x) = \dfrac{x^2 + ax}{bx}$ fonksiyonu birim fonksiyon ise **a + b toplamı kaçtır?**

ÇÖZÜM–1

f(x) birim fonksiyon ve $x \neq 0$ olduğundan, $f(1) = 1$ ve $f(2) = 2$ dir.

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = \dfrac{1+a}{b} = 1 \Rightarrow 1 + a = b \\ f(2) = \dfrac{4+2a}{2b} = 2 \Rightarrow a + 2 = 2b \end{array}\right\} \Rightarrow b = 1 \quad \text{ve} \quad a = 0 \text{ olur.}$$

$a + b = 0 + 1 = 1$ bulunur.

ÇÖZÜM-2 $f(x) = x$ olmalıdır.

$$f(x) = \frac{x^2 + ax}{bx} = \frac{x(x+a)}{bx} = \frac{x+a}{b} \Rightarrow \frac{x+a}{b} = x \Rightarrow x + a = bx$$

Polinom eşitliğinden $b = 1$ ve $a = 0$ olur. $a + b = 1$ bulunur.

ÖRNEK $f : R \to R$ ye tanımlanan, $f(x) = (a-3)x^2 + (b-4)x + c - 2$ fonksiyonu birim fonksiyon **ise a + b + c toplamı kaçtır?**

ÇÖZÜM $f(x) = (a-3)x^2 + (b-4)x + c - 2$ fonksiyonu birim fonksiyon ise x^2'li terimin katsayısı sıfır, x'li terimin katsayısı 1 ve sabit terimin sıfır olması gerekir. Buna göre ;

$a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$; $b - 4 = 1 \Rightarrow b = 5$; $c - 2 = 0 \Rightarrow c = 2$ olur.

$a + b + c = 3 + 5 + 2 = 10$ bulunur.

8) TERS FONKSİYON

TANIM :

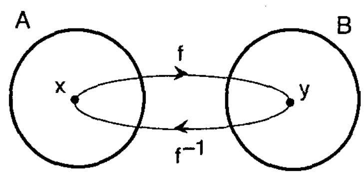
$y = f(x)$ ile tanımlı $f : A \to B$ fonksiyonu verilmiş olsun. B'den A'ya bir bağıntı olan

$f^{-1} = \{(y, x) : x \in A$ ve $y \in B,\ y = f(x)\}$ kümesine f fonksiyonunun ters bağıntısı denir.

$f : A \to B$, $x \to y = f(x)$ birebir ve örten ise

$f^{-1} : B \to A$, $y \to x = f^{-1}(y)$ ters bağıntısı bire–bir ve örtendir. Bu durumda f^{-1} fonksiyonuna f fonksiyonunun **ters fonksiyonu** denir.

$$f : A \to B \Leftrightarrow f^{-1} : B \to A$$



$f(A) = B$

$f^{-1}(B) = A$ dır.

$$f : A \to B,\ f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1} : B \to A \text{ ve } f^{-1}(y) = x$$

Bir fonksiyonun tersini bulurken;

Genel olarak x yerine "y" y yerine "x" yazıp, y yi yalnız bırakırız.

ÖRNEK **$f : R \to R$, $f(x) = 3x + 5 \Rightarrow f^{-1}(x)$ i bulunuz.**

ÇÖZÜM $y = 3x + 5$ fonksiyonunda x yerine y, y yerine x yazalım.

$x = 3y + 5$

$y = \frac{x-5}{3}$

$f^{-1} : R \to R$, $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{3}$ bulunur.

UYARI

1. Bir fonksiyonun tersinin olması için fonksiyonun birebir ve örten olması gerekir.

2. Bir fonksiyonun tersini araştırırken : Birebir ve örten olduğunu gördükten sonra fonksiyonun yapısında bulunan işlemlerin tersleri aşağıdaki sırada uygulanarak bulunabilir.

a) + işlemi varsa tersi –

b) • işlemi varsa tersi ÷

c) Kök alma işlemi varsa tersi üs alma işlemidir.

$f(x) = \frac{x+7}{5} \Rightarrow f^{-1}(x) = 5x - 7$

$f(x) = \frac{x^3+1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x-1}$

$f(x) = 5x^7 + 10 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[7]{\frac{x-10}{5}}$

$f(x) = \sqrt[3]{x} + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-2)^3$

$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+3}{7}} \Rightarrow f^{-1}(x) = 7x^3 - 3$

olduğunu a, b, c adımları uygulayarak sizde görünüz.

ÖRNEK **$f : R \to R,\ f(x) = \frac{x+7}{3} \Rightarrow f^{-1}(5)$ nedir?**

ÇÖZÜM–1 $f(x) = \frac{x+7}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = 3x - 7 \Rightarrow f^{-1}(5) = 3.5 - 7 = 8$

ÇÖZÜM–2 $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ olduğundan

$f(x) = \frac{x+7}{3} = 5 \Rightarrow x + 7 = 15 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow f^{-1}(5) = 8$ bulunur.

ÖRNEK **$f(x) = 2^{x+3} \Rightarrow f^{-1}(4)$ kaçtır?**

ÇÖZÜM $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

$2^{x+3} = 4$

$2^{x+3} = 2^2$

$x + 3 = 2$

$x = -1 \Rightarrow f^{-1}(4) = -1$

ÖRNEK **$f(3x + 5) = 2x - 2 \Rightarrow f^{-1}(3)$ kaçtır?**

ÇÖZÜM $f(3x + 5) = 2x - 2$ ise

$f^{-1}(2x - 2) = 3x + 5$ dir.

$2x - 2 = 3 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ değeri $f^{-1}(2x - 2)$ de yerine yazılırsa ;

$f^{-1}(3) = 3 . \frac{5}{2} + 5 = \frac{25}{2}$ bulunur.

ÖRNEK $f : R \to R$, $f(x^3 + 1) = 2x - 8 \Rightarrow f^{-1}(2)$ **kaçtır?**

ÇÖZÜM $f(x^3 + 1) = 2x - 8 \Rightarrow f^{-1}(2x - 8) = x^3 + 1$ dir.

$2x - 8 = 2 \Rightarrow x = 5$ dir.

$x = 5$ için ; $f^{-1}(2.5 - 8) = 5^3 + 1$

$f^{-1}(2) = 126$ bulunur.

ÖRNEK $f : R - \{2\} \to R - \{3\}$, $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 2} \Rightarrow f^{-1}(x)$ **fonksiyonunu bulunuz.**

ÇÖZÜM $y = \dfrac{3x - 1}{x - 2}$ $\begin{pmatrix} \text{x yerine y} \\ \text{y yerine x yazılarak} \end{pmatrix}$

$x = \dfrac{3y - 1}{y - 2}$ elde edilir. Buradan da y'yi yalnız bırakalım.

$xy - 2x = 3y - 1$

$xy - 3y = 2x - 1$

$y(x - 3) = 2x - 1$

$y = \dfrac{2x - 1}{x - 3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 3}$ bulunur.

UYARI

Tanımlı olduğu değerler için

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}$$

(a ve d nin yer ve işaret değiştirdiğine dikkat ediniz.)

Bu kuralı uygulayarak

$f(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 3}$ olduğunu hemen bulabiliriz.

Tanımlı olduğu değerler için aşağıdaki fonksiyonların ters fonksiyonlarını bulalım.

a) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{3x - 5} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{5x + 1}{3x - 2}$

b) $f(x) = \dfrac{4x}{x + 1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{-x}{x - 4}$

c) $f(x) = \dfrac{3}{x + 2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{-2x + 3}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{-2}{5x - 3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{3x - 2}{5x}$

e) $f(x) = \dfrac{2}{x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{2}{x}$

FONKSİYON SAYISI

A ve B boş olmayan iki küme ve $s(A) = n$, $s(B) = m$ olsun.

1. A dan B ye fonksiyon sayısı $= m^n$
2. A dan A ya 1 – 1 örten fonksiyon sayısı $= n!$
3. A dan B'ye birebir fonksiyon sayısı $= P(m,n) = \dfrac{m!}{(m-n)!}$
4. A dan B'ye tanımlanan sabit fonksiyon sayısı m tanedir.

UYARI :
A dan B ye birebir fonksiyon tanımlanabilmesi için $m \geq n$ olmalıdır.

ÖRNEK $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$ kümeleri veriliyor.

a) $A \to B$ tanımlı bağıntı sayısı nedir?

b) $A \to B$ tanımlı fonksiyon sayısı nedir?

c) $A \to B$ birebir fonksiyon tanımlanabilir mi?

ÇÖZÜM

a) $s(A) = 4$, $s(B) = 3$ olduğundan $2^{4 \times 3} = 2^{12}$ tane bağıntı tanımlanabilir.

b) $A \to B$, $s(B)^{s(A)} = 3^4 = 81$ tane fonksiyon tanımlanabilir.

c) $s(A) > s(B)$ olduğundan $A \to B$ birebir fonksiyon tanımlanamaz.

ÖRNEK $s(A) = 2$ ve $s(B) = 4$ olduğuna göre

a) $A \to B$ kaç tane fonksiyon olmayan bağıntı vardır?

b) $A \to B$ kaç tane birebir olmayan fonksiyon vardır?

ÇÖZÜM

a) Bağıntı sayısı $2^{2 \times 4} = 2^8 = 256$

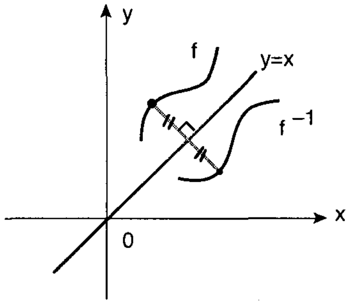
fonksiyon sayısı $s(B)^{s(A)} = 4^2 = 16$
fonksiyon olmayan bağıntı sayısı $= 256 - 16 = 240$

b) $A \to B$, fonksiyon sayısı 16 bulunmuştu.
$A \to B$, 1 – 1 fonksiyon sayısı, $P(4,2) = 4.3 = 12$
$A \to B$, 1 – 1 olmayan fonksiyon sayısı, $16 - 12 = 4$

BİR FONKSİYON İLE TERSİNİN GRAFİĞİ

$f: A \to B$, $f(x) = y \Rightarrow f^{-1}: B \to A$, $f^{-1}(y) = x$ idi.

Bu ilişkiyi şöyle yorumlayabiliriz.



f i oluşturan noktalar (x, y) iken

f^{-1} i oluşturan noktalar (y, x) dir.

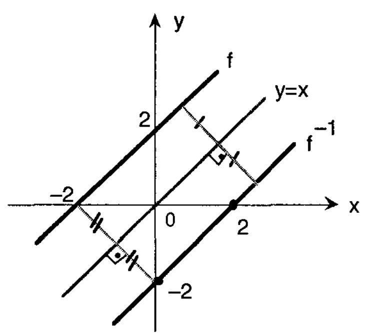
P(x , y) noktasının y = x doğrusuna göre simetriği olan nokta P'(y , x) tir.

Bu düşünceden hareketle, bir fonksiyon ile tersi olan fonksiyonun grafikleri y = x (I. açıortay) doğrusuna göre simetriktir diyebiliriz.

ÖRNEK

$f: R \to R$, $f(x) = x + 2$ fonksiyonu veriliyor. **f ile f^{-1} in y = x doğrusuna göre simetrik olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM



$f: R \to R$, $f(x) = x + 2$ fonksiyonunun grafiğinin y = x doğrusuna göre simetriği, $f^{-1}: R \to R$, $f^{-1}(x) = x - 2$ fonksiyonunun grafiğidir.

ÖRNEK

$f: R^+ \to R$, $f(x) = \log_2 x$ fonksiyonu veriliyor.

a) f in ters fonksiyonunu bulunuz.

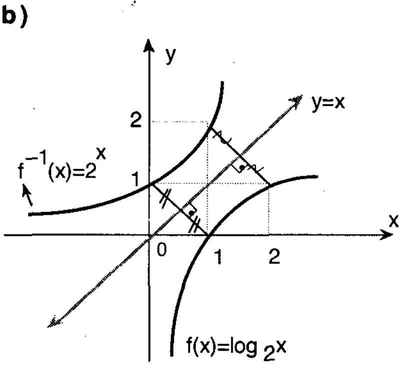
b) f ile f^{-1} fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

ÇÖZÜM

a) $f(x) = \log_2 x \Rightarrow y = \log_2 x$ (x yerine y, y yerine x yazarsak)

$x = \log_2 y \Rightarrow 2^x = y \Rightarrow f^{-1}(x) = 2^x$ olur.

b)

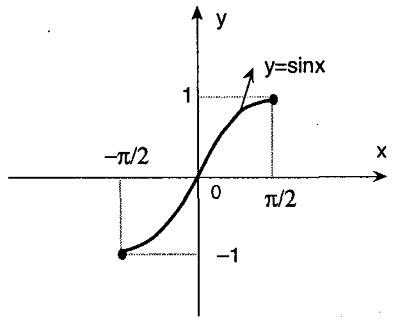


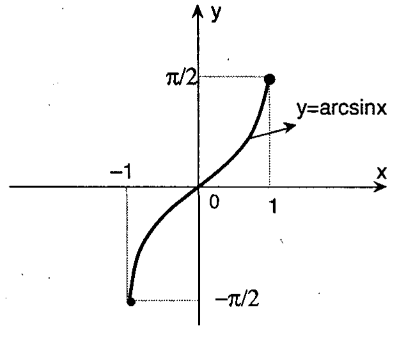
$f(x) = \log_2 x$ in grafiğinin y = x doğrusuna göre simetriği $f^{-1}(x) = 2^x$ fonksiyonunun grafiğidir.

TRİGONOMETRİK VE TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

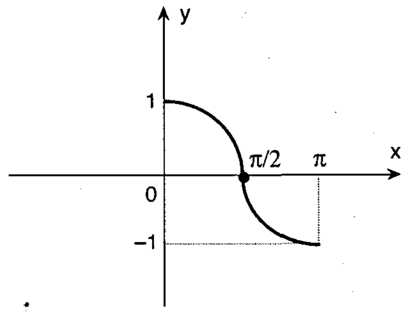
Tanım ve değer kümeleri belirtilerek bütün trigonometrik fonksiyonların ve terslerinin grafikleri aşağıda gösterilmiştir. Grafikleri dikkatle izleyerek fonksiyon bilginizi pekiştiriniz.

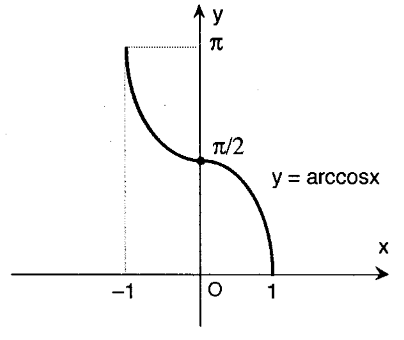
1) sin : $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} [-1, 1]$, $x \to \sin x \Rightarrow$ arcsin: $[-1,1] \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \to \arcsin x$



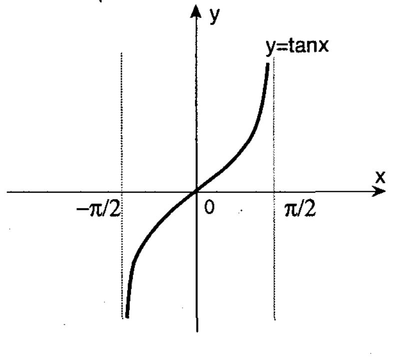


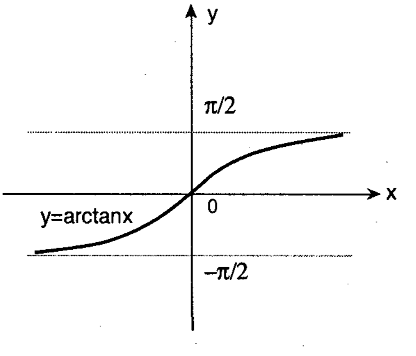
2) cos : $[0, \pi] \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} [-1, 1]$, $x \to \cos x \Rightarrow$ arc cos: $[-1,1] \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} [0, \pi]$, $x \to$ arcosx



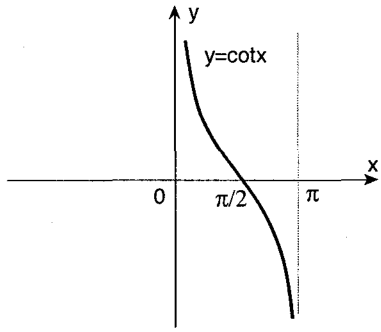


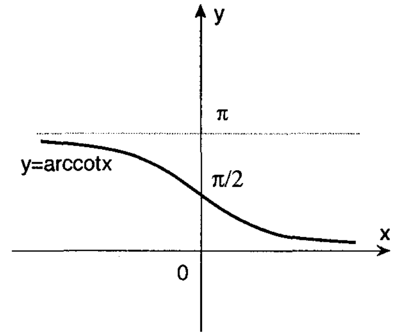
3) tan: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} R$, $x \to \tan x \Rightarrow$ arctan: $R \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \to \arctan x$





4) $\cot : [0, \pi] \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} R$, $x \to \cot x$ $\Rightarrow$ $\text{arc cot} : R \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} [0, \pi]$, $x \to \text{arcot}x$

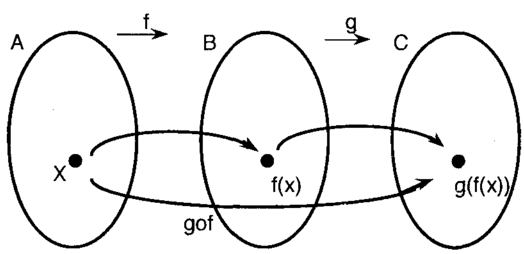




BİLEŞKE FONKSİYON

$f : A \to B$ ve $g : B \to C$ birer fonksiyon ise, A daki her elemanı f ve g fonksiyonları ile C nin elemanlarına dönüştüren fonksiyona f ile g nin bileşkesi denir.

$gof : A \to C$ biçiminde gösterilir ve $(gof)(x) = g(f(x))$ biçiminde uygulanır.



Bileşke İşleminin Özellikleri :

f, g ve h fonksiyonları için ;

1. $fog \neq gof$
2. $(fog)oh = fo(goh)$
3. $fof^{-1} = f^{-1}of = I$ (I birim fonksiyon)
4. $foI = Iof = f$
5. $(f^{-1})^{-1} = f$
6. $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$
7. $(fogoh)^{-1} = h^{-1}og^{-1}of^{-1}$
8. $fog = h \Rightarrow f = hog^{-1}$ ve $g = f^{-1}oh$

ÖRNEK $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = \dfrac{x+1}{3} \end{array}\right\}$ ise a) $(fog)(x)$

b) $(gof)(x)$ **fonksiyonlarını bulunuz.**

ÇÖZÜM **a)** $(fog)(x) = f(g(x))$

$$= f\left(\frac{x+1}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{x+1}{3}\right)^2$$

b) $(gof)(x) = g(f(x))$

$$= g(x^2)$$

$$= \frac{x^2+1}{3}$$

ÖRNEK **$f(x) = x^3$ ise (fofof) (x) değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM $(fofof)(x) = f[\,f(f(x))\,]$

$= f[\,f(x^3)\,]$

$= f[(x^3)^3]$

$= ((x^3)^3)^3 = x^{27}$

ÖRNEK $f : Z \to Z,\ f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \text{ çift ise} \\ x+3, & x \text{ tek ise} \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.

(fofof) (4) değeri kaçtır?

ÇÖZÜM $(fofof)(4) = f[\,f(f(4))\,]$ $\qquad f(4) = \frac{4}{2} = 2$

$= f[\,f(2)\,]$ $\qquad f(2) = \frac{2}{2} = 1$

$= f(1) = 1 + 3 = 4$

ÖRNEK $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \geq 0 \text{ ise} \\ 1-3x, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor. **(fof) (–2) değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM $(fof)(-2) = f(\,f(-2)\,) = f(1-3(-2))$

$= f(7) = 7^2 + 1 = 50$

ÖRNEK **$f(x) = 2^x$ ise $(fof^{-1})(x)$ ve $(f^{-1} \text{ o } f)(x)$ fonksiyonlarını bulunuz.**

ÇÖZÜM–1 $f(x) = 2^x \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2 x$ olduğunu hatırlayınız.

$(fof^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\log_2 x) = 2^{\log_2 x}$ ($a^{\log_a x} = x$ olduğundan)

$(fof^{-1})(x) = x$ olur.

ÇÖZÜM–2 $(fof^{-1})(x) = I$ idi. O halde $(fof^{-1})(x) = x$ olur.

ÖRNEK $f(2x + 3) = 5x + 8$ ise **f(x) 'i bulunuz.**

ÇÖZÜM $f(2x + 3) = 5x + 8$ eşitliğinde $(2x+3)^{-1} = \frac{x-3}{2}$ dir.

eşitliğin iki tarafındaki x'in yerine $\frac{x-3}{2}$ yazılırsa $f\left(2 \cdot \frac{x-3}{2} + 3\right) = 5 \cdot \frac{x-3}{2} + 8$

$f(x) = \frac{5x-15}{2} + 8 = \frac{5x+1}{2}$ bulunur.

ÖRNEK $(gof)(x) = x + 2$ ve $g(x) = \frac{x+3}{2}$ ise **f(x) i bulunuz.**

ÇÖZÜM–1 $(gof)(x) = g(\,f(x)\,) = x + 2 \Rightarrow \frac{f(x)+3}{2} = x + 2 \Rightarrow f(x) + 3 = 2x + 4 \Rightarrow f(x) = 2x + 1$

bulunur.

ÇÖZÜM-2 $(gof)(x) = x + 2$ eşitliğinin her iki yanını g(x) in olduğu taraftan g^{-1} ile bileşke işlemi uygulayalım.

$(g^{-1}ogof)(x) = (g^{-1}ogof)(x)$

$[(g^{-1}og)of](x) = [g^{-1}o(gof)](x)$

$(Iof)(x) = [g^{-1}o(gof)](x)$

$f(x) = [g^{-1}o(gof)](x)$ olur.

$f(x) = g^{-1} o (x + 2)$, $g(x) = \frac{x+3}{2} \Rightarrow g^{-1}(x) = 2x - 3$

$f(x) = g^{-1}(x + 2)$,

$f(x) = 2(x + 2) - 3 \Rightarrow f(x) = 2x + 1$ bulunur.

ÖRNEK $f(x) = x + 1$, $(gof)(x) = 5x + 8 \Rightarrow$ **g(x) 'i bulunuz.**

ÇÖZÜM $(gof)(x) = 5x + 8$ eşitliğin her iki tarafını f^{-1} ile eşleyelim.

$(gofof^{-1})(x) = (5x + 8) o f^{-1}$

$g(x) = 5 f^{-1}(x) + 8$ $(f^{-1}(x) = x - 1)$

$g(x) = 5(x - 1) + 8$

$g(x) = 5x + 3$

PERMÜTASYON FONKSİYON

TANIM :

A boş olmayan bir küme olsun. $A \to A$ tanımlanan 1 – 1 ve örten her fonksiyona A nın bir permütasyonu denir.

$s(A) = n$ ise $A \to A$ ya $n!$ tane permütasyon fonksiyon vardır.

ÖRNEK $A = \{1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde tanımlanabilecek bütün 1 – 1 örten fonksiyonları (Permütasyon fonksiyon) gösteriniz.

ÇÖZÜM $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

permütasyon sayısının $3! = 6$ olduğuna dikkat ediniz.

ÖRNEK $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi ve $f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $g : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ fonksiyonları veriliyor.

a) f^{-1} fonksiyonunu bulunuz.

b) fog fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM a) $f^{-1} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (Tanım ve değer kümelerini yer değiştirdik.)

b) $fog : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Bileşke işlemine sağdaki fonksiyon olan g den başlayalım.

$1 \to 2$ ve f de $2 \to 1 \Rightarrow 1 \to 1$

$2 \to 3$ ve f de $3 \to 2 \Rightarrow 2 \to 2$

$3 \to 4$ ve f de $4 \to 4 \Rightarrow 3 \to 4$

$4 \to 1$ ve f de $1 \to 3 \Rightarrow 4 \to 3$

O halde; $fog : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ bulunur.

TEK VE ÇİFT FONKSİYONLAR

TANIM :

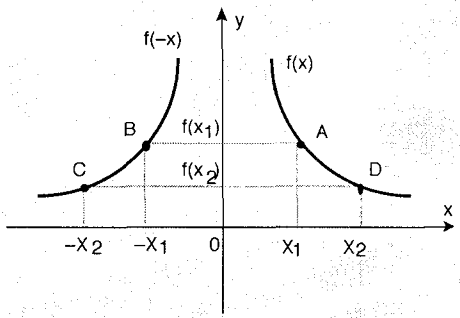
f : A → B , y = f(x) biçiminde bir fonksiyon olsun.

1. ∀ x ∈ A için f(–x) = –f(x) ise f fonksiyonu TEK fonksiyon,

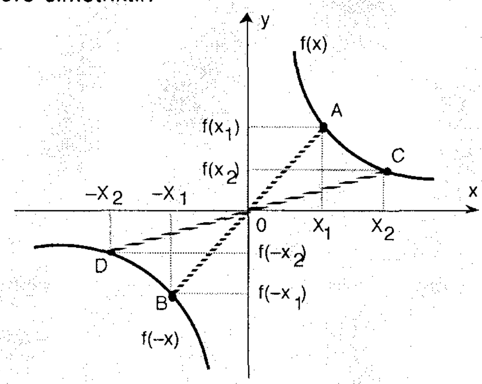
2. ∀ x ∈ A için f(–x) = f(x) ise f ÇİFT fonksiyondur.

UYARI :

- TEK fonksiyonların grafikleri (0, 0) orijin noktasına göre simetriktir.
- ÇİFT fonksiyonların grafikleri y eksenine göre simetriktir.



Yukarıda grafiği verilen f(x) fonksiyonunda, ∀ x ∈ R için f(–x) = f(x) olduğundan f(x) çift fonksiyondur.

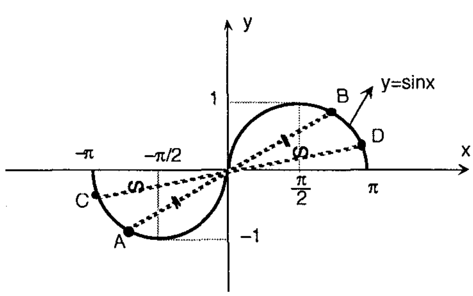


Yukarıda grafiği verilen f(x) fonksiyonunda ∀x ∈ R için f(–x) = –f(x) olduğundan f(x) tek fonksiyondur.

ÖRNEK

f : [–π, π] → [–1, 1], f(x) = sinx fonksiyonunun tek fonksiyon ve grafiğinin (0,0) noktasına göre simetrik olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

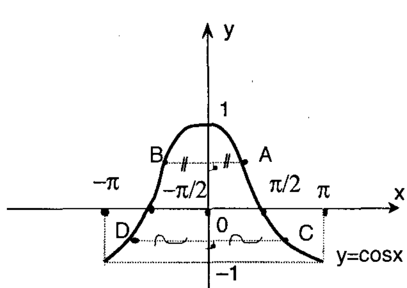


f(–x) = –f(x) olduğunu gösterelim.
∀ x ∈ R için sin(–x) = –sinx olduğundan f tek fonksiyondur.

ÖRNEK

f : [–π, π] → [–1, 1], f(x) = cosx fonksiyonunun çift fonksiyon olduğunu ve grafiğinin y eksenine göre simetrik olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM



f(–x) = f(x) olduğunu gösterelim.
∀ x ∈ R için cos(–x) = cosx olduğundan f çift fonksiyondur.

TEK VE ÇİFT FONKSİYONLARLA İLGİLİ ÖZELLİKLER

1. İki çift fonksiyonun çarpımı çift fonksiyondur.
2. İki çift fonksiyonun bölümü çift fonksiyondur.
3. Biri tek diğeri çift iki fonksiyonun çarpımı veya bölümü tek fonksiyondur.
4. Çift fonksiyonların toplamı çift fonksiyondur.
5. Tek fonksiyonların toplamı tek fonksiyondur.
6. Çift fonksiyonların tam sayı olan tüm kuvvetleri çift fonksiyondur.
7. Tek fonksiyonların tek tamsayı kuvvetleri tek; çift tamsayı kuvvetleri çift fonksiyondur.
8. f veya g'den biri çift fonksiyon ise (fog) ve (gof) fonksiyonları çifttir.
9. f tek fonksiyon ise (fof) tek fonksiyon, f çift fonksiyon ise (fof) çift fonksiyondur.

ÖRNEK $R \to R : f(x) = -x^4 + 5x^2 - 1$ **fonksiyonu çift midir?**

ÇÖZÜM $\forall x \in R$ için $f(-x) = -((-x)^4) + 5(-x)^2 - 1$

$= -x^4 + 5x^2 - 1$

$f(-x) = f(x)$ olduğundan f çifttir.

ÖRNEK **$f(x) = \cos x + \tan x$ fonksiyonun tanımlı olduğu değerler için tek veya çift olduğunu araştırınız.**

ÇÖZÜM $f(-x) = \cos(-x) + \tan(-x)$

$= \cos x - \tan x$ olur. O halde f ne tek, ne de çift fonksiyondur.

ÖRNEK f "tek fonksiyon", g ise "çift fonksiyon"dur. $h(4-x) = \dfrac{g(x-3) - f(x^2-1)}{g(3-x) - f(x+1)}$ ve $g(3) = 2$, $f(-1) = 3$ **ise h(4) kaçtır?**

ÇÖZÜM $h(4-x) = \dfrac{g(x-3) - f(x^2-1)}{g(3-x) - f(x+1)}$ eşitliğinde

$x = 0$ için $h(4) = \dfrac{g(-3) - f(-1)}{g(3) - f(1)}$ olur.

$\left(\begin{array}{l} g(-3) = g(3) \text{, g çift olduğundan} \\ -f(1) = f(-1) \text{ f tek olduğundan} \end{array} \right)$

$h(4) = \dfrac{g(3) - f(-1)}{g(3) + f(-1)}$ $\quad h(4) = \dfrac{2-3}{2+3}$

$h(4) = \dfrac{-1}{5}$ bulunur.

ÖRNEK f tek fonksiyon, g ise çift fonksiyondur.

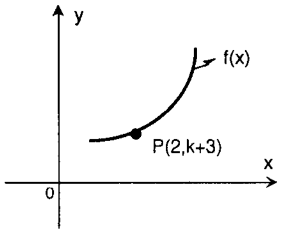
$h(x) = \dfrac{f(x) + g(x)}{f(x)}$ ve $f(-2) = 4$, $g(-2) = 1$ ise **h(2) kaçtır?**

ÇÖZÜM $h(2) = \dfrac{f(2) + g(2)}{f(2)}$ olur.

$\left(\begin{array}{l} \text{f tek ise } f(2) = -f(-2) \\ \text{g çift ise } g(-2) = g(2) \text{ olur.} \end{array} \right)$

$h(2) = \dfrac{-4+1}{-4} = \dfrac{-3}{-4} = \dfrac{3}{4}$ bulunur.

ÖRNEK



Yandaki grafik R den R ye çift fonksiyon olan f(x) 'e aittir.

f(–2) = 6 ise k kaçtır?

ÇÖZÜM f çift fonksiyon olduğundan $f(-2) = f(2) = 6$ ve $P(2, k + 3)$ olduğundan $f(2) = k + 3 = 6$

$k = 3$ bulunur.

PARÇALI TANIMLI FONKSİYON

TANIM :

$A, B, C, D \subset R$ olmak üzere $f : A \to B$, $g : C \to D$ ye tanımlı fonksiyonlar için, $h : (A \cup C) \to (B \cup D)$ ye

$h(x) = \begin{cases} f(x) , & x \in A \text{ ise} \\ g(x) , & x \in C \text{ ise} \end{cases}$ biçiminde tanımlı fonksiyona **PARÇALI TANIMLI FONKSİYON** denir.

ÖRNEK $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} \log_2 x , & x > 0 \text{ ise} \\ \dfrac{2x-1}{x-2} , & x \le 0 \text{ ise} \end{cases}$ biçiminde tanımlı fonksiyon için,

f(4) + f(–1) toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM $4 > 0$ olduğundan fonksiyon $f(x) = \log_2 x$ dir. O halde $f(4) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$

$-1 \le 0$ olduğundan fonksiyon $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$ dir. O halde, $f(-1) = \dfrac{2.(-1)-1}{-1-2} = \dfrac{-3}{-3} = 1$

$f(4) + f(-1) = 2 + 1 = 3$ bulunur.

ÖRNEK $f : R \to R$, $f(x) \begin{cases} x^2 - ax , & x < -2 \text{ ise} \\ 3x - b , & -2 \le x < 5 \text{ ise} \\ \dfrac{x+1}{x-3} , & 5 \le x \text{ ise} \end{cases}$ biçiminde tanımlı f(x) fonksiyonu

için f(–3) + f(0) + f(7) = a – b ise a kaçtır?

ÇÖZÜM $x = -3$ için $f(x) = x^2 - ax$ dir.

$f(-3) = 9 + 3a$ .... (1)

$x = 0$ için $f(x) = 3x - b$ dir.

$f(0) = -b$ .... (2)

$x = 7$ için $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ dür.

$f(7) = \dfrac{7+1}{7-3} = 2$ .... (3)

$f(-3) + f(0) + f(7) = a - b$

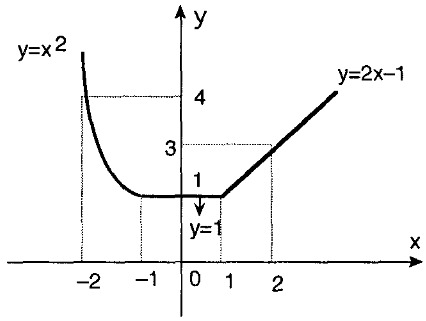
$9 + 3a + (-b) + 2 = a - b$

$2a = -11 \Rightarrow a = -\dfrac{11}{2}$ bulunur.

ÖRNEK

$f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < -1 \text{ ise} \\ 1 & , -1 \le x \le 1 \text{ ise} \\ 2x - 1 & , 1 < x \text{ ise} \end{cases}$ **biçiminde tanımlı fonksiyonun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM



$x < -1$ için $y = x^2$ nin grafiği
$-1 \le x \le 1$ için $y = 1$ nin grafiği
$1 < x$ için $y = 2x - 1$ in grafiği çizilmiştir.

ÖRNEK

$f : R \to R$, $f(x) = 2x - 1$ ve $g(x) = \begin{cases} x + 1 & , x < 0 \\ x^2 & , x \ge 0 \end{cases}$ ile tanımlı f ve g fonksiyonları veriliyor. **Buna göre fog ve gof fonksiyonlarını bulunuz.**

ÇÖZÜM

$(fog)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 2(x+1) - 1 & , x < 0 \\ 2x^2 - 1 & , x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow fog(x) = \begin{cases} 2x + 1 & , x < 0 \\ 2x^2 - 1 & , x \ge 0 \end{cases}$

(gof) (x)'i bulmak için f(x) fonksiyonunun pozitif ve negatif olduğu bölgeleri bulalım.

$f(x) = 2x - 1$'e bakarsak $x < \frac{1}{2}$ iken $f(x) = 2x - 1 < 0$ ve $x \ge \frac{1}{2}$ iken $f(x) = 2x - 1 \ge 0$ dır.

Buna göre;

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} (2x-1) + 1 & , x < \frac{1}{2} \\ (2x-1)^2 & , x \ge \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (gof)(x) = \begin{cases} 2x & , x < \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 4x + 1 & , x \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

bulunur.

f^+ FONKSİYONU

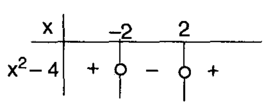
TANIM : $f^+ = \begin{cases} f(x) & , f(x) \ge 0 \text{ ise} \\ 0 & , f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$ biçiminde tanımlı fonksiyonu **f^+ fonksiyonu** denir.

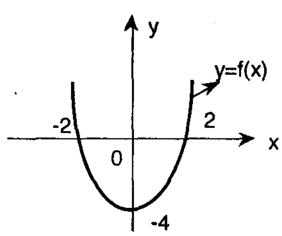
ÖRNEK

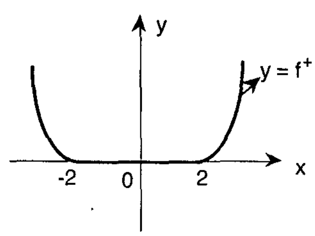
$f : R \to R$, $f(x) = x^2 - 4$ fonksiyonu için f^+ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

$f(x) = x^2 - 4 \Rightarrow f^+ \begin{cases} x^2 - 4 & , x \le -2 \text{ veya } x \ge 2 \text{ ise} \\ 0 & , -2 < x < 2 \text{ ise} \end{cases}$





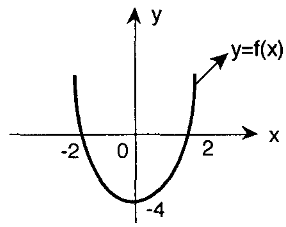


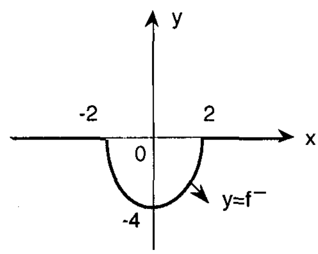
f^- FONKSİYONU

TANIM : $f^- = \begin{cases} 0 & , \ f(x) \geq 0 \text{ ise} \\ f(x) & , \ f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$ biçiminde tanımlı fonksiyona **f^- fonsiyonu** denir.

ÖRNEK $f : R \to R$, $f(x) = x^2 - 4$ fonksiyonu için, **f^- fonksiyonun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM $f(x) = x^2 - 4 \Rightarrow f^- = \begin{cases} 0 & , \ x \leq -2 \text{ veya } x \geq 2 \text{ ise} \\ x^2 - 4 & , \ -2 < x < 2 \text{ ise} \end{cases}$





PERİYODİK FONKSİYON

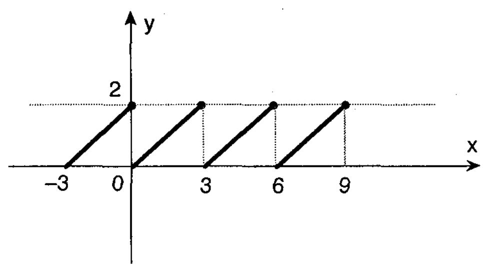
Tanım : $A \subset R$ olmak üzere ; $f : A \to R$, $y = f(x)$ fonksiyonunda; $n \in N^+$ için

$f(x) = f(x + t) = f(x + 2t) = ... = f(x + n.t)$ eşitliğini sağlayan $t \in R$ sayısı varsa fonksiyona **periyodik fonksiyon** denir. $f(x) = f(x + t)$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif t reel sayısına da fonksiyonunun periyodu denir.

f fonksiyonu periyodik bir fonksiyon ise $f(x + t) = f(x) \Rightarrow f(x + t) - f(x) = 0$ dır.

$\Rightarrow x + t - x = t$ dir.

ÖRNEK



Şekilde R den R ye tanımlı olan f(x) fonksiyonu periyodik bir fonksiyon mudur? **Periyodik ise periyodunu ve görüntü kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM Fonksiyonun görüntü kümesi, $f(R) = [0,2]$ olduğu şekilde verilen grafikte görülmektedir.

$f(x) = f(x + 3) = f(x + 2.3) = ... = f(x + n.3)$ ve $(x + 6) - (x + 3) = t \Rightarrow t = 3$ olduğundan fonksiyonun periyodu 3 dür. Gerçekten ;

$0 \leq x \leq 3$ ise $f([0,3]) = [0, 2]$

$3 \leq x \leq 6$ ise $f([3,6]) = [0, 2]$

$f(x + t) - f(x) = ([0, 2]) - [0, 2] = 0$ dır.

ÖRNEK R den R ye tanımlı f ve g fonksiyonları periyodik fonksiyonlardır.

$f(x) = f(x + 4) = f(x + 8) = f(x + 12)$ .... ve $g(x) = f\left(\frac{3}{2}x + 5\right)$ ise **g(x) fonksiyonunun periyodu nedir?**

ÇÖZÜM $g(x + t) = g(x) \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}(x + t) + 5\right) = f\left(\frac{3}{2}x + 5\right)$ f nin periyodu 4 olduğundan

$\frac{3}{2}x + \frac{3t}{2} + 5 - \frac{3x}{2} - 5 = 4 \Rightarrow \frac{3t}{2} = 4 \Rightarrow t = \frac{8}{3}$ olup g(x) fonksiyonunun periyodu $\frac{8}{3}$ bulunur.

MUTLAK DEĞER FONKSİYONU

TANIM : $A \subset R$ olmak üzere ; $f : A \to R$ ye

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & , \ f(x) \geq 0 \text{ ise} \\ -f(x) & , \ f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde parçalı tanımlı fonksiyona **mutlak değer** fonksiyonu denir.

Mutlak değer fonksiyonunun özellikleri :

1. $\forall \ x \in R$ için **$y = |f(x)| \geq 0$**, (mutlak değer fonksiyonun en küçük değeri sıfırdır)
2. **$|f(x)| = a \ , \quad a \in R^+ \cup \{0\} \Rightarrow f(x) = \pm a$**
3. **$|f(x)| \leq a \ , \quad a \in R^+ \Rightarrow -a \leq f(x) \leq a$**
4. **$|f(x)| \geq a \ , \quad a \in R^+ \Rightarrow f(x) \geq a$ veya $f(x) \leq -a$ dır.**
5. **$|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)|$**
6. **$\left| \dfrac{f(x)}{g(x)} \right| = \dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} \quad (g(x) \neq 0)$**
7. **$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$**
8. **$|f(x) - g(x)| \geq |f(x)| - |g(x)|$**
9. **$a < b$ ve $a, b \in R^+$** olmak üzere **$a < |f(x)| < b \Leftrightarrow \begin{cases} -b < f(x) < -a \\ a < f(x) < b \end{cases}$** dir.

UYARI

f(x) ve g(x) gibi herhangi iki fonksiyon için geçerli olan bu özellikler, x ve y gibi iki reel sayı içinde geçerlidir.

$\forall x \in R$ için ; $\sqrt{x^2} = |x|$ dir.

MUTLAK DEĞER FONKSİYONUN PARÇALI TANIMLANMASI

Mutlak değer fonksiyonunun parçalı tanımlanması için, mutlak değerin içini sıfır yapan noktalar kritik nokta olarak alınır. Bu kritik noktaya göre mutlak değer fonksiyonu parçalı tanımlı olarak yazılır.

ÖRNEK **$f : R \to R$, $f(x) = |x^2 - 4|$ fonksiyonunu parçalı tanımlayınız.**

ÇÖZÜM $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \mp 2$ noktaları kritik noktalardır.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		+	0	−	0	+	

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & , \ x \leq -2 \text{ veya } x \geq 2 \text{ ise} \\ -(x^2 - 4) & , \ -2 < x < 2 \text{ ise} \end{cases}$$

ÖRNEK $f : R \to R$, $f(x) = \sqrt{x^2} - 2|x - 3|$ **fonksiyonunun parçalı tanımlı yazınız.**

ÇÖZÜM

$f(x) = \sqrt{x^2} - 2\,|x-3|$ ise $f(x) = |x| - 2|x-3|$ olur. $x = 0$ ve $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ noktaları kritik noktalardır.

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
x	−	0	+		+
x − 3	−		−	0	+

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2(x-3), & x < 0 \text{ ise} \\ x + 2(x-3), & 0 \le x < 3 \text{ ise} \\ x - 2(x-3), & x \ge 3 \text{ ise} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 6, & x < 0 \text{ ise} \\ 3x - 6, & 0 \le x < 3 \text{ ise} \\ -x + 6, & x \ge 3 \text{ ise} \end{cases} \text{ bulunur}$$

ÖRNEK

$f : R \to R$, $f(x) = |x-1| + |x+1| - x$ **fonksiyonunu parçalı tanımlayınız.**

ÇÖZÜM

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$; $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$; noktaları kritik noktalardır.

x	$-\infty$	−1		1	$+\infty$
(x − 1)	−		−	0	+
(x + 1)	−	0	+		+

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1) - (x+1) - x, & x < -1 \text{ ise} \\ -(x-1) + (x+1) - x, & -1 \le x < 1 \text{ ise} \\ x - 1 + x + 1 - x, & x \ge 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 - x - 1 - x, & x < -1 \text{ ise} \\ -x + 1 + x + 1 - x, & -1 \le x < 1 \text{ ise} \\ x - 1 + x + 1 - x, & x \ge 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -3x, & x < -1 \text{ ise} \\ -x + 2, & -1 \le x < 1 \text{ ise} \\ x, & x \ge 1 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK

$f : R \to R$, $f(x) = |x^3 - x| + |x - 1|$ **fonksiyonunu parçalı tanımlayınız.**

ÇÖZÜM

Kritik noktaları bulalım.

$x^3 - x = 0$; $x - 1 = 0$

$x(x^2 - 1) = 0$; $x = 1$

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$;

x	$-\infty$	−1		0		1	$+\infty$
$x^3 - x$	−	0	+	0	−	0	+
x − 1	−		−		−	0	+

$$f(x)=\begin{cases} -(x^3-x)-(x-1) \ , & x<-1 \text{ veya } 0\le x<1 \text{ ise} \\ x^3-x-(x-1) \ , & -1\le x<0 \text{ ise} \\ x^3-x+x-1 \ , & x\ge 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^3 \ , & x<-1 \text{ veya } 0\le x<1 \text{ ise} \\ x^3-2x+1 \ , & -1\le x<0 \\ x^3-1 \ , & x\ge 1 \end{cases}$$ bulunur.

MUTLAK DEĞERLİ DENKLEMLER

A) $|f(x)|=a$, $a\in R^+\cup\{0\}$ biçimindeki denklemlerin çözüm kümesi $f(x)=a$ veya $f(x)=-a$ denklemleri çözülerek bulunur. $f(x)=a$ denkleminin çözüm kümesi $ç_1$ ve $f(x)=-a$ denkleminin çözüm kümesi $ç_2$ ise $|f(x)|=a$ denkleminin çözüm kümesi $ç=ç_1\cup ç_2$ olur.

ÖRNEK $|x^2+1|=5$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x^2+1=5$; $x^2+1=-5$

$x^2=4$; $x^2=-6 \Rightarrow Ç_2=\varnothing$

$x=\pm 2$

$Ç_1=\{-2,2\}$ bulunur. O halde $Ç=\{-2,2\}$ olur.

ÖRNEK R den R ye tanımlı, $f(x)=|x^2-9|+4$ ve $g(x)=5|x+3|+4$ **eğrilerinin kesim noktalarının apsisleri çarpımı kaçtır?**

ÇÖZÜM $|x^2-9|+4=5|x+3|+4$

$|x^2-9|-5|x+3|=0$

$|x-3|\,|x+3|-5|x+3|=0$

$|x+3|\,(|x-3|-5)=0$

$|x+3|=0 \ \vee \ |x-3|-5=0$

$x_1=-3 \ \vee \ |x-3|=5 \Rightarrow x-3=5 \Rightarrow x_2=8$

$x-3=-5 \Rightarrow x_3=-2$ bulunur.

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3=(-3)\cdot 8\cdot(-2)=48$ bulunur.

ÖRNEK $|\log_2(x-2)|=2$ **denkleminin köklerinin çarpımı nedir?**

ÇÖZÜM $|\log_2(x-2)|=2$ ise

$\log_2(x-2)=2$ veya $\log_2(x-2)=-2$ dir.

($\log_a b=x \Rightarrow b=a^x$ olduğunu hatırlayınız.)

$x-2=2^2$ veya $x-2=2^{-2}$

$x_1=6$ veya $x_2=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}$ dür.

$x_1\cdot x_2=6\cdot\frac{9}{4}=\frac{27}{2}$ bulunur.

B) $| f(x) | + |g(x)| = 0$ **biçimindeki denklemlerin çözüm kümesi** $\forall x \in R$ **için**
$|f(x)| \geq 0$ **ve** $|g(x)| \geq 0$ **olduğundan**
$|f(x)| + |g(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ **ve** $g(x) = 0$ **olmalıdır.**
$f(x) = 0$ **denkleminin çözüm kümesi** $Ç_1$
$g(x) = 0$ **denkleminin çözüm kümesi** $Ç_2$ **olsun.**
$| f(x) | + | g(x) | = 0$ **denkleminin çözüm kümesi :** $Ç = Ç_1 \cap Ç_2$ **dir.**

ÖRNEK $|x^2 - 3x + 2| + |x^2 - 1| = 0$

ÇÖZÜM $|x^2 - 3x + 2| + |x^2 - 1| = 0 \Rightarrow |x^2 - 3x + 2| = 0$ ve $|x^2 - 1| = 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ $\quad x^2 - 1 = 0$
$(x - 2)(x - 1) = 0$ $\quad x^2 = 1$
$x_1 = 2$, $x_2 = 1$ $\quad x_3 = 1$ ve $x_4 = -1$ dir.
$Ç_1 = \{1,2\}$ $\quad Ç_2 = \{-1, 1\}$
$Ç_1 \cap Ç_2 = \{ 1 \}$ bulunur.

ÖRNEK $3\sqrt{x^2 + 4x + 4} + 5\sqrt{1 - 2x + x^2} = 0$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $3\sqrt{x^2 + 4x + 4} + 5\sqrt{1 - 2x + x^2} = 3\sqrt{(x + 2)^2} + 5\sqrt{(x - 1)^2}$

$\Rightarrow 3|x + 2| + 5|x - 1| = 0$
$x + 2 = 0$ ve $x - 1 = 0$
$x_1 = -2$, $x_2 = 1$
$Ç = \{ -2 \}$ $\quad Ç = \{ 1 \}$
$Ç_1 \cap Ç_2 = \varnothing$ olduğundan

$3\sqrt{x^2 + 4x + 4} + 5\sqrt{1 - 2x + x^2} = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\varnothing$ dur.

UYARI
$x = -2$, $x = 1$ sayılarının denklemi sağlamadığını görebilirsiniz.

C) $g(x) \geq 0$ **olmak üzere;** $| f(x) | = g(x)$ **biçimindeki denklemlerin çözüm kümesi;** $f(x) = g(x)$ **ve** $f(x) = -g(x)$ **denklemleri çözülür. Bulunan köklerden** $g(x) \geq 0$ **koşuluna uyanlar denklemin çözüm kümesini oluştururlar.**

ÖRNEK $|x + 2| = -2x + 4$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $-2x + 4 \geq 0$ $\quad x + 2 = -2x + 4$ veya $x + 2 = -(-2x + 4)$

$x \leq 2$ olmalıdır. $\quad 3x = 1$ $\quad x + 2 = 2x - 4$

$x = \frac{1}{3}$ $\quad -x = -6$

$x = 6$

$x = \frac{1}{3}$, $x \leq 2$ koşuluna uyar.

$x = 6$, $x \leq 2$ koşuluna uymaz. Öyleyse $Ç = \{ \frac{1}{3} \}$ bulunur.

ÖRNEK

$f : R \to R$, $f(x) = |x^2 - 2| + x$ fonksiyonunun **x eksenini kestiği noktaların apsisleri çarpımı kaçtır?**

ÇÖZÜM

f'in x eksenini kestiği noktalarda $f(x) = 0$ olacağından ;

$|x^2 - 2| + x = 0$ denklemi çözülmelidir.

$-x > 0 \Rightarrow x < 0$ olmak üzere

$x^2 - 2 = -x$ ve $x^2 - 2 = -(-x)$

$x^2 + x - 2 = 0$; $x^2 - x - 2 = 0$

$(x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -2$ $(x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x_3 = 2$ $x_4 = -1$ bulunur.

$x_2 = 1$

Bulunan köklerin $x < 0$ koşuluna uygunluğunu kontrol edersek, $x = -2$ ve $x = -1$ sayılarının $(x^2 - 2) + x = 0$ denklemin kökleri olduğunu $x = 1$ ve $x = 2$ sayılarının kök olmadığını görürüz. Buna göre kökler çarpımı $(-2) . (-1) = 2$ bulunur.

D) İçinde Mutlak Değer Bulunduran Parçalı Tanımlanarak Çözülebilen Denklemler

ÖRNEK

$x|x - 2| = 3$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$|x - 2| = \begin{cases} -x + 2 , & x < 2 \text{ ise} \\ x - 2 , & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

$x < 2$ iken ; $x(-x + 2) = 3 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0$

$\Delta = 4 - 4.1.3 = -8 < 0$ kök yok.

$x \geq 2$ iken ; $x(x - 2) = 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$

$x_2 = -1$

$x = -1$, $x \geq 2$ koşuluna uymadığından denklemin çözüm kümesi Ç = {3} olur.

ÖRNEK

$x \in R$ olmak üzere ; $|x - 1|(x - 1) + 1 = x$ **denkleminin köklerinin toplamı nedir?**

ÇÖZÜM

$$|x - 1| = \begin{cases} -x + 1 & x < 1 \text{ ise} \\ x - 1 & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$x < 1$ iken $(-x + 1)(x - 1) + 1 = x$; $x \geq 1$ iken $(x - 1)(x - 1) + 1 = x$

$-(x - 1)^2 + 1 = x$ $x^2 - 2x + 1 + 1 = x$

$-x^2 + 2x - 1 + 1 = x$ $x^2 - 3x + 2 = 0$

$-x^2 + x = 0$ $x_3 = 2$ $x_4 = 1$

$x_1 = 0$

$x_2 = 1$

$x_2 = 1$ kökü $x < 1$ koşuluna uymaz. Bu kökler ise $x \geq 1$ koşuluna uyar.

O halde Kökler toplamı $x_1 + x_3 + x_4 = 3$ olur.

ÖRNEK R den R'ye , $f(x) = |x+2| - \sqrt{x^2}$ ve $g(x) = 2$ **tanımlı fonksiyonlarının kesim noktalarının apsislerini bulunuz.**

ÇÖZÜM İki fonksiyonun varsa kesim noktalarını bulmak için, fonksiyonların denklemleri birbirine eşitlenerek, ortak çözüm yapılır.

$f(x) = g(x)$

$|x+2| - \sqrt{x^2} = 2$ $\qquad (\sqrt{x^2} = |x|)$

$|x+2| - |x| = 2$

Şimdi denklemin tablosunu yapıp kökleri bulalım. Kritik noktalar $x = -2$ ve $x = 0$ dır.

x	$-\infty$ … -2	-2 … 0	0 … $+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$
$\lvert x+2\rvert - \lvert x\rvert = 2 \Rightarrow$	$-x-2+x=2$ $-2=2$ $Ç = \varnothing$	$x+2+x=2$ $2x=0$ $x=0$	$-x+2-x=0$ $2=0$ $Ç=\varnothing$

Kesim noktalarının apsisi sıfırdır.

MUTLAK DEĞERLİ EŞİTSİZLİKLER

A) $|f(x)| < a$, $a \in R^+ \Leftrightarrow -a < f(x) < a$; $a \notin R^+$ **ise çözüm kümesi** $\varnothing$ **dir.**

ÖRNEK $|x+2| \le 3$ **eşitsizliğinin R deki çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $|x+2| \le 3 \Rightarrow -3 \le x+2 \le 3$

$-5 \le x \le 1 \Rightarrow Ç = [-5, 1]$ dir.

ÖRNEK $\left|\dfrac{2x-1}{3}\right| < 4$ **eşitsizliğini sağlayan tam sayıların toplamı nedir?**

ÇÖZÜM

$-4 < \dfrac{2x-1}{3} < 4$

$-12 < 2x - 1 < 12$

$-11 < 2x < 13$

$\dfrac{-11}{2} < x < \dfrac{13}{2}$ bu aralıktaki tamsayıların toplamı

$-5 -4 -3 - 2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 6$ bulunur.

ÖRNEK $|x^2 + 1| < 10$ **eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\forall x \in R$ için $x^2 + 1 > 0$ olduğundan

$|x^2 + 1| < 10 \Rightarrow x^2 + 1 < 10$ olur.

$x^2 + 1 < 10 \Rightarrow x^2 - 9 < 0 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{9} \Rightarrow |x| < 3$

$\Rightarrow -3 < x < 3 \Rightarrow Ç = (-3, 3)$ bulunur.

B) $|f(x)| > a$ ise,

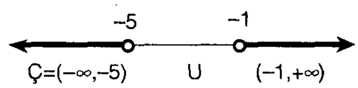
i. $a \in R^+ \Rightarrow f(x) > a$ veya $f(x) < -a$ dır.

ii. $a \in R^- \Rightarrow Ç = R$ dir.

ÖRNEK $|x + 3| > 2$ **eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $|x + 3| > 2 \Rightarrow x + 3 > 2$ veya $x + 3 < -2$

$x > -1$ veya $x < -5$

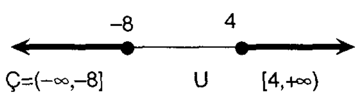


veya $Ç = R - [-5, -1]$ dir.

ÖRNEK $|x + 2| \geq 6$ **eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $|x + 2| \geq 6 \Rightarrow x + 2 \geq 6$ veya $x + 2 \leq -6$

$x \geq 4$ veya $x \leq -8$



$Ç = R - (-8, 4)$ dır.

C) $|f(x)| < |g(x)|$ veya

$|f(x)| > |g(x)|$ biçimindeki eşitsizlikler çözülürken, her iki tarafın karesi alınarak mutlak değer kaldırılır ve çözüm kümesi bulunur.

ÖRNEK $|x - 1| > |x - 2|$ **eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $|x - 1| > |x - 2|$ eşitsizliğinin her iki tarafının karesini alalım.

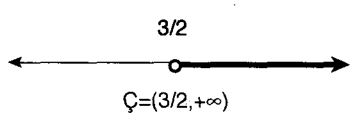
$$(|x - 1|)^2 > (|x - 2|)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 > x^2 - 4x + 4$$

$$2x > 3$$

$$x > \frac{3}{2}$$

$$Ç = (3/2, +\infty)$$



ÖRNEK $|x - 3| \leq |x + 5|$ **eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $|x - 3| \leq |x + 5|$ eşitsizliğinin her iki tarafının karesini alalım.

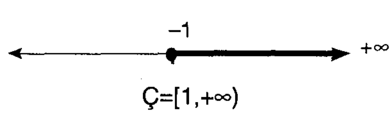
$$(x - 3)^2 \leq (x + 5)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 \leq x^2 + 10x + 25$$

$$-16x \leq 16$$

$$x \geq -1$$

$$Ç = [-1, +\infty)$$



D) $b < | f(x) | < a$ biçimindeki eşitsizliklerin çözüm kümesi bulunurken $b < f(x) < a$ veya $b < -f(x) < a$ eşitsizliklerinin çözüm kümeleri bulunur. Bu aralıkların birleşim kümesi çözüm kümesi olarak yazılır.

ÖRNEK $3 < |x + 2| < 5$ **eşitsizliğini sağlayan kaç tamsayı vardır?**

ÇÖZÜM

I. $3 < x + 2 < 5$

$1 < x < 3$

$x = 2 \in Z$

II. $3 < -(x + 2) < 5$

$-5 < x + 2 < -3$

$-7 < x < -5$

$x = -6 \in Z$

Eşitsizliği sağlayan iki tane tamsayı değeri vardır.

ÖRNEK $6 < |2x + 7| < 10$ **eşitsizliğini sağlayan tamsayıların toplamı nedir?**

ÇÖZÜM

$6 < 2x + 7 < 10$, $6 < -(2x + 7) < 10$

$-1 < 2x < 3$, $-10 < 2x + 7 < -6$

$-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$, $-17 < 2x < -13$

$x_1 = 0$, $-\frac{17}{2} < x < -\frac{13}{2}$

$x_2 = 1$, $x_3 = -8$

$x_4 = -7$

O halde, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 + 1 + (-8) + (-7) = -14$ bulunur.

MUTLAK DEĞER FONKSİYONUNUN GRAFİĞİ

Yapısında mutlak değer bulunduran fonksiyonları üç gruba ayırıp grafiklerinin nasıl çizildiğini açıklayacağız.

A) $y = | f(x) |$

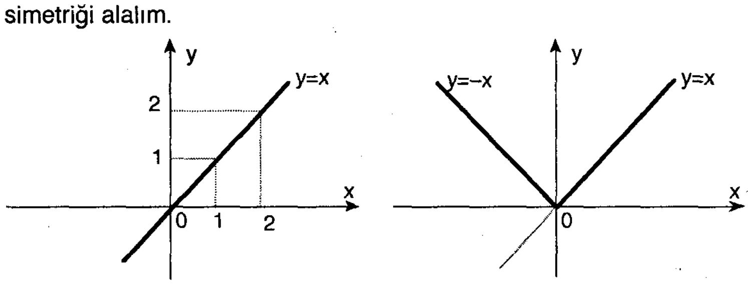
Tüm terimleri mutlak değer içinde olan fonksiyonların, grafiklerini çizerken fonksiyonu parçalı tanımlamaya gerek yoktur.

I. Mutlak değeri düşünmeden f(x)'in grafiğini çizilir.

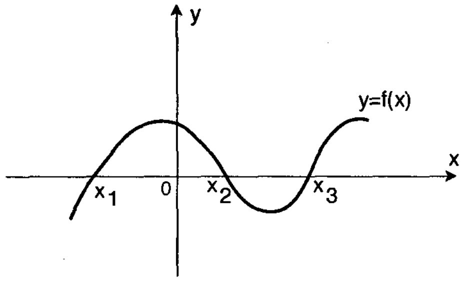
II. Grafiğin x ekseninin alt tarafındaki kısmının (varsa), x eksenine göre simetriği alınır.

ÖRNEK **$y = |x|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM *Önce f(x) = x grafiğini çizip sonra x – ekseni altında kalan kısmının x – eksenine göre simetriği alalım.*



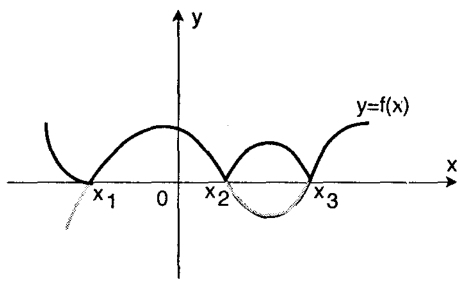
ÖRNEK



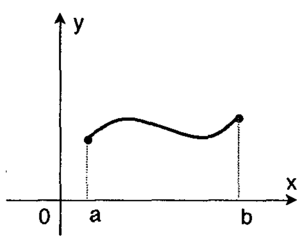
y = f (x) fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. **Buna göre y = |f(x)| fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

x eksenin alt tarafındaki kısmının, alınırsa y = |f(x)| in grafiği bulunur.



ÖRNEK



f (x) in [a, b] aralığındaki grafiği yandaki gibi ise, **| f(x) | in grafiği nedir?**

ÇÖZÜM

f(x) in x ekseninin alt tarafında görüntüsü olmadığından | f(x) | in grafiği f(x) in aynısıdır.

Yani şekilde grafiği verilen f(x) fonksiyonu için f(x) = | f(x) | dir.

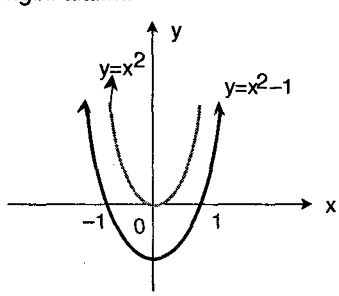
ÖRNEK

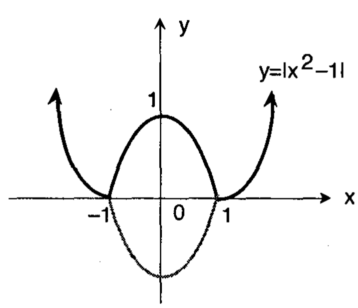
f(x) = | x^2 – 1 | fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

Önce f(x) = x^2 – 1 in grafiğini çizelim.

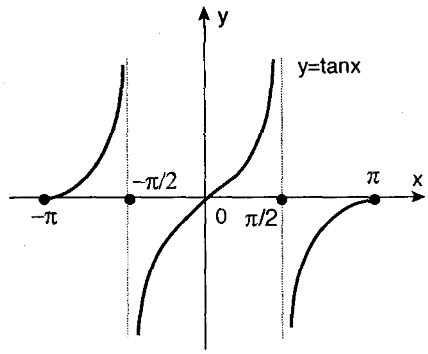
Sonrada, f(x) in grafiğinin x ekseninin alt tarafındaki kısmının x – eksenine göre simetriğini alalım.

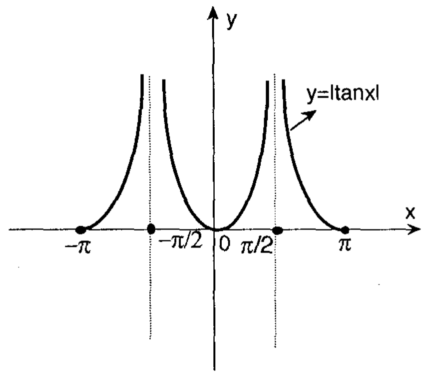




ÖRNEK **$f : [-\pi , \pi] \rightarrow R$, $f(x) = |\tan x|$ in grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM Önce $y = \tan x$ 'in grafiğini çizelim. Sonra x ekseninin altındaki kısmının x – eksenine göre simetriğini alalım.



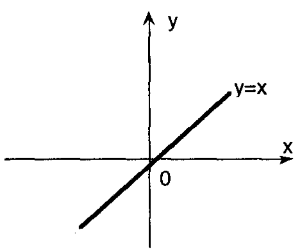


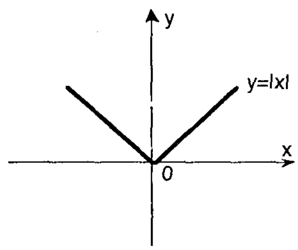
B) $y = |f(x)| + a$ ($a \in R$) biçiminde verilen fonksiyonların grafikleri çizilirken, önce $|f(x)|$ grafiği çizilir. Sonra grafik a nın işaretine göre y ekseni boyunca,

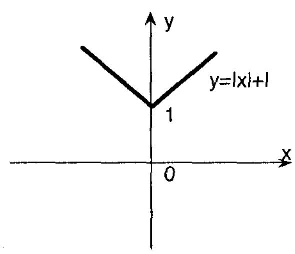
- **a birim yukarı ($a > 0$ ise)**
- **$|a|$ birim aşağı ($a < 0$ ise) ötelenir.**

ÖRNEK **f: $R \rightarrow R$, $f(x) = |x| + 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM







1 Önce y = x fonksiyonunun grafiği çizilir.

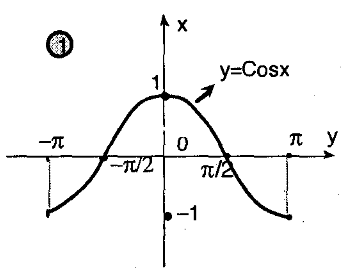
2 sonra y = |x| fonksiyonunun grafiği çizilir.

3 y = |x| fonksiyonunun grafiği y ekseninde +1 birim ötelenir.

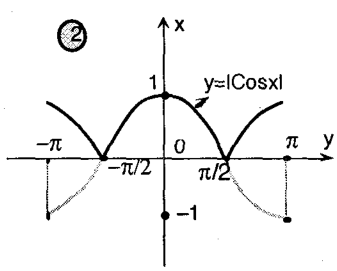
ÖRNEK **$f : [-\pi, \pi] \rightarrow R$, $f(x) = |\cos x| - 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

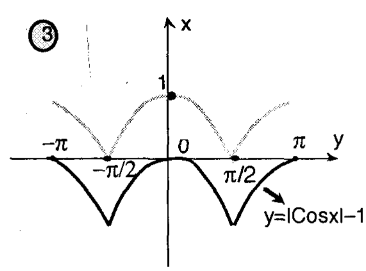
1



2



3

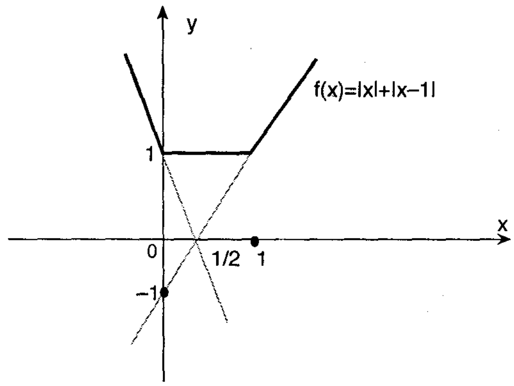


C) $y = |f(x)| \pm g(x)$, $y = |f(x)| \cdot g(x)$, $y = |f(x)| \cdot |g(x)|$, **v.b biçimde verilen fonksiyonların grafikleri çizilirken fonksiyon parçalı olarak tanımlanır.**

ÖRNEK **f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| + |x - 1|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM Önce fonksiyonu parçalı tanımlayalım.

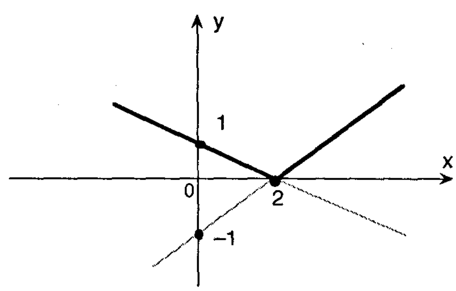
$$f(x) = \begin{cases} -x - (x-1) = -2x + 1 & , \; x < 0 \text{ ise} \\ +x - (x-1) = 1 & , \; 0 \le x < 1 \text{ ise} \\ +x + x - 1 = 2x - 1 & , \; x \ge 1 \text{ ise} \end{cases}$$



ÖRNEK **f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{|x-2|}{2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

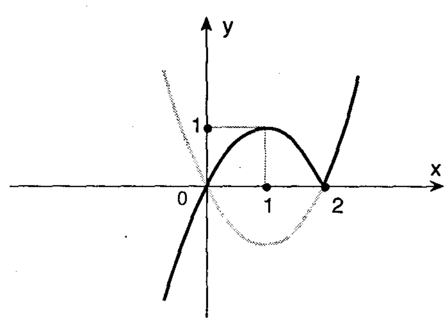
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{1}{2}x - 1 & , \; x \ge 2 \text{ ise} \\ \dfrac{-(x-2)}{2} = -\dfrac{1}{2}x + 1 & , \; x < 2 \text{ ise} \end{cases}$$



ÖRNEK **f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\,|x - 2|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

$$f(x) = \begin{cases} -x(x-2) = -x^2 + 2x & , \; x < 2 \text{ ise} \\ x(x-2) = x^2 - 2x & , \; x \ge 2 \text{ ise} \end{cases}$$

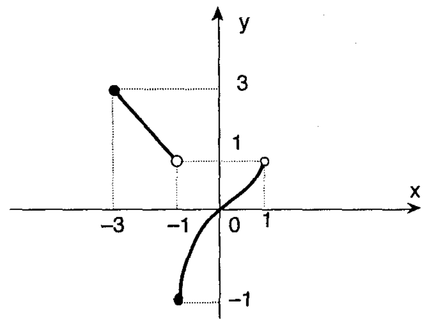


ÖRNEK

$f : [-3, 1) \to R,\ f(x) = \begin{cases} |x| &, x < -1 \text{ ise} \\ x|x| &, -1 \le x < 1 \text{ ise} \end{cases}$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

$$f(x) = \begin{cases} -x &, -3 \le x < -1 \text{ ise} \\ x(-x) = -x^2 &, -1 \le x < 0 \text{ ise} \\ x(+x) = x^2 &, 0 \le x < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

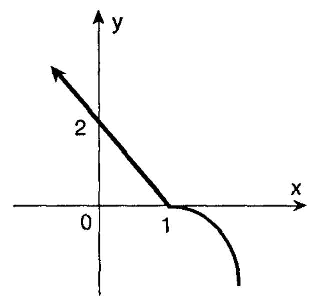


ÖRNEK

y = f(x) fonksiyonun grafiği yanda verilmiştir.

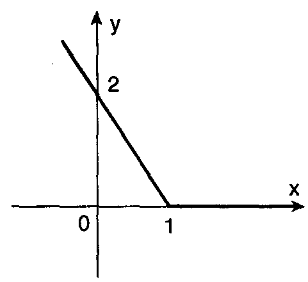
Buna göre, $g(x) = \dfrac{|f(x)| + f(x)}{2}$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



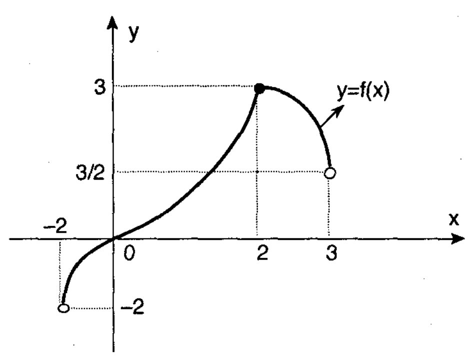
ÇÖZÜM

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) + (-f(x))}{2} = 0, & x > 1 \text{ ise} \\ \dfrac{f(x) + f(x)}{2} = f(x), & x \le 1 \text{ ise} \end{cases}$$



ÖRNEK

f : (–2, 3) → R tanımlı fonksiyonun grafiği yanda verilmiştir. Buna göre $g(x) = \dfrac{2f(x) - |f(x)|}{3}$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**



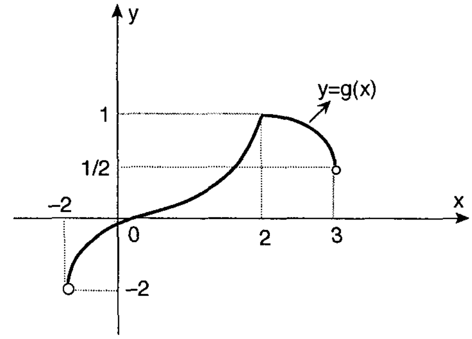
ÇÖZÜM

$-2 < x < 0$ ise $f(x) < 0$ ve $|f(x)| = -f(x)$ dir.

$0 \le x < 3$ ise $f(x) \ge 0$ ve $|f(x)| = f(x)$ dir.

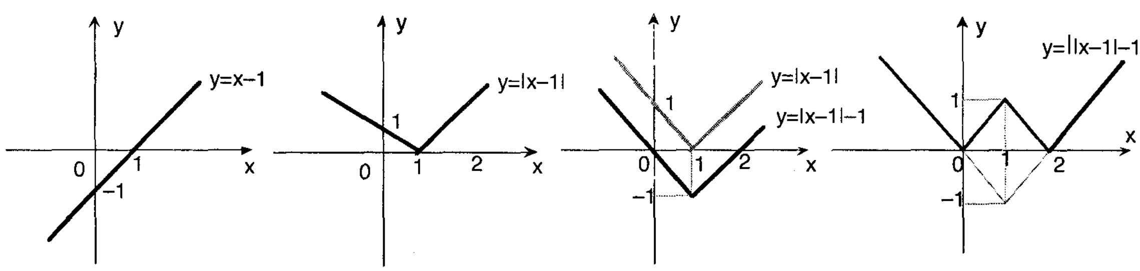
O halde

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2f(x) - [-f(x)]}{3} = f(x) & , -2 < x < 0 \text{ ise} \\ \dfrac{2f(x) - f(x)}{3} = \dfrac{f(x)}{3} & , 0 \le x < 3 \text{ ise} \end{cases}$$



ÖRNEK $f : R \to R$, $f(x) = \big|\, |x-1| - 1 \,\big|$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

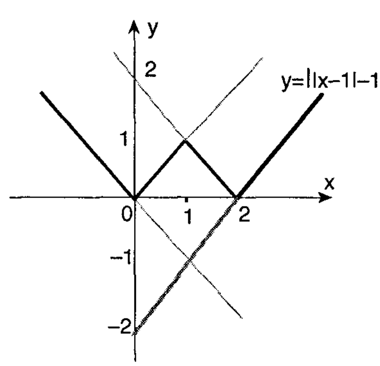
ÇÖZÜM–1



ÇÖZÜM–2

$$f(x) = \begin{cases} |-x+1-1| = |-x| & , \quad x < 1 \\ |x-1-1| = |x-2| & , \quad x \ge 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad x < 0 \quad \text{ise} \\ -(-x) = x & , \quad 0 \le x < 1 \quad \text{ise} \\ -x+2 & , \quad 1 \le x < 2 \quad \text{ise} \\ x-2 & , \quad x \ge 2 \quad \text{ise} \end{cases}$$



ÖRNEK $f : [-\pi, \pi] \to R$, $f(x) = \sin|x| + |\sin x|$ **fonksiyonun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

f (x) = sin|x| + |sinx| fonksiyonunda ;

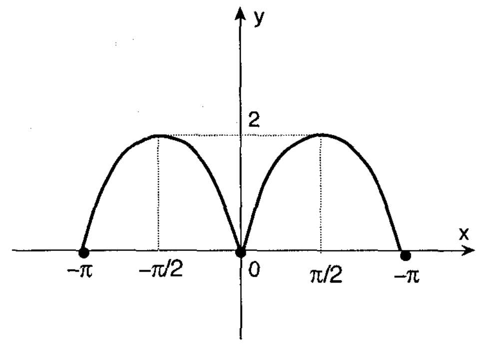
sin |x| = g(x)

|sinx| = h(x) alalım ve parçalı olarak tanımlayalım.

f(x) = g(x) + h(x) olur.

$$g(x) = \begin{cases} \sin(-x) = -\sin x \ , & -\pi \le x < 0 \ \text{ise} \\ \sin x \ , & 0 \le x \le \pi \ \text{ise} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} -\sin x \ , & -\pi \le x < 0 \ \text{ise} \\ \sin x \ , & 0 \le x < \pi \ \text{ise} \end{cases}$$



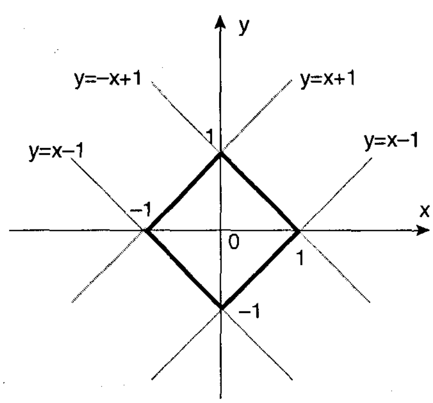
$$f(x) = h(x) + g(x) = \begin{cases} -\sin x - \sin x = -2\sin x \ , & -\pi \le x < 0 \ \text{ise} \\ \sin x + \sin x = 2\sin x \ , & 0 \le x \le \pi \ \text{ise} \end{cases}$$

ÖRNEK

|x| + |y| = 1 **bağıntısının grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

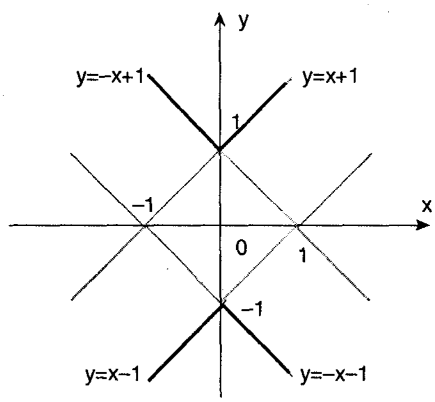
$$|x| + |y| = \begin{cases} x + y = 1 \Rightarrow y = -x + 1 \ , & x \ge 0 \ \text{ve} \ y \ge 0 \ \text{ise} \\ -x + y = 1 \Rightarrow y = x + 1 \ , & x < 0 \ \text{ve} \ y \ge 0 \ \text{ise} \\ -x - y = 1 \Rightarrow y = -x - 1 \ , & x < 0 \ \text{ve} \ y < 0 \ \text{ise} \\ x - y = 1 \Rightarrow y = x + 1 \ , & x \ge 0 \ \text{ve} \ y < 0 \ \text{ise} \end{cases}$$



ÖRNEK **$|y| - |x| = 1$ bağıntısının grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

$$|y| - |x| \Rightarrow \begin{cases} y - x = 1 \Rightarrow y = x + 1 & , \ x \geq 0 \text{ ve } y \geq 0 \text{ ise} \\ y - (-x) = 1 \Rightarrow y = -x + 1 & , \ x < 0 \text{ ve } y \geq 0 \text{ ise} \\ -y - (-x) = 1 \Rightarrow y = x - 1 & , \ x < 0 \text{ ve } y < 0 \text{ ise} \\ -y - x = 1 \Rightarrow y = -x - 1 & , \ x \geq 0 \text{ ve } y < 0 \text{ ise} \end{cases}$$



ÖRNEK **$|x.y| = 1$ bağıntısının grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

$|f(x)| = a \Rightarrow f(x) = \pm a$ olduğunu biliyorsunuz.

$|x \cdot y| = 1 \Rightarrow x \cdot y = 1$ veya $x \cdot y = -1$

$x \cdot y = 1 \Rightarrow x > 0$ ve $y > 0$ (I bölgede)

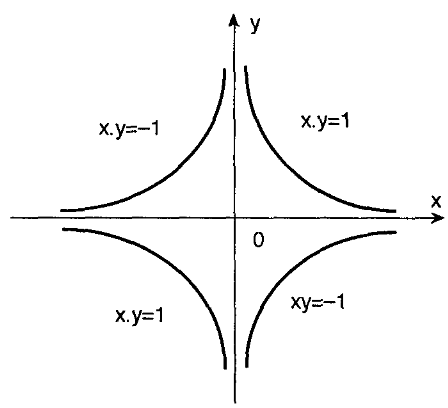
$\Rightarrow x < 0$ ve $y < 0$ (III. bölgede)

$x \cdot y = -1 \Rightarrow x < 0$ ve $y > 0$ (II. bölgede)

$\Rightarrow x > 0$ ve $y < 0$ (IV. bölgede)

$x \cdot y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$ (çift kanatlı hiperbol denilen eğri gösterir.)

$x \cdot y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{x}$ (çift kanatlı hiperbol denilen eğri gösterir.)



ÖRNEK

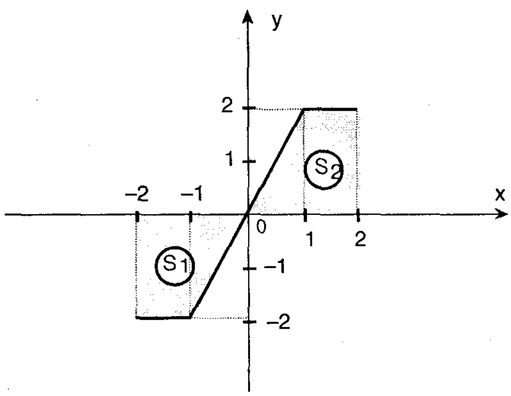
$f : [-2, 2] \to R$, $f(x) = |x + 1| - |x - 1|$ fonksiyonun grafiği ve **x ekseni ile sınırlı bölgenin alanı kaç br^2 dir?**

ÇÖZÜM

Önce fonksiyonu parçalı tanımlayalım. Kritik noktalar x = 1 ve x = –1 dir.

x	–2		–1		1		2
x + 1		–	0	+		+	
x – 1		–		–	0	+	

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1) + (x-1), & -2 \le x < -1 \text{ ise} \\ x + 1 + x - 1, & -1 \le x < 1 \text{ ise} \\ x + 1 - (x - 1), & 1 \le x \le 2 \text{ ise} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2, & -2 \le x < -1 \text{ ise} \\ 2x, & -1 \le x < 1 \text{ ise} \\ 2, & 1 \le x \le 2 \text{ ise} \end{cases}$$



S_1 ve S_2 alanları birer dik yamukta olup orijine göre simetrik olduklarından $S_1 = S_2$ dir.

$S_1 = S_2 = \dfrac{2+1}{2} \cdot 2 = 3$ br^2 dir. O halde

$S_1 + S_2 = 3 + 3 = 6$ br^2 bulunur.

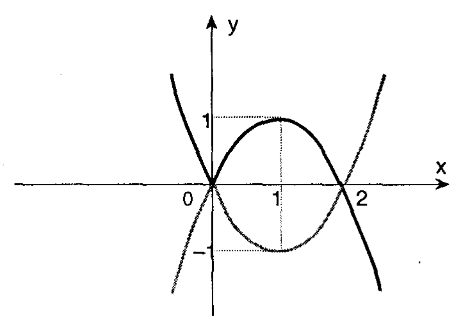
ÖRNEK

$f : R \to R$, $f(x) = 2|x| - x|x|$ **fonksiyonun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot (-x) - x \cdot (-x), & x < 0 \text{ ise} \\ 2 \cdot (+x) - x \cdot (+x), & x \ge 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x < 0 \text{ ise} \\ -x^2 + 2x, & x \ge 0 \text{ ise} \end{cases}$$



SİGNUM (İŞARET) FONKSİYONU

Tanım $A \subseteq R$ olmak üzere $f : A \to R$

$$(sgnof)(x) = sgn(f(x)) = \begin{cases} 1 \ , & f(x) > 0 \text{ ise} \\ 0 \ , & f(x) = 0 \text{ ise} \\ -1 \ , & f(x) < 0 \text{ ise biçiminde tanımlı} \end{cases}$$

$sgnof : A \to \{-1, 0, 1\}$ fonksiyonuna f fonksiyonun işaret fonksiyonu denir.

ÖRNEK $f(x) = sgn(x^2 - 4)$ **fonksiyonunu parçalı tanımlı yazınız.**

ÇÖZÜM İşaret fonksiyonunun tanımından da anlaşılacağı gibi, işaret fonksiyonunun f(x) ini sıfır yapan noktalar kritik noktalardır. Buna göre

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \mp 2$ kritik noktalardır.

x		−2		2	
x^2-4	+	0	−	0	+

$$f(x) = sgn(x^2 - 4) = \begin{cases} 1 \ , & x < -2 \text{ ve } x > 2 \text{ ise} \\ 0 \ , & x = -2 \text{ ve } x = 2 \text{ ise} \\ -1 \ , & -2 < x < 2 \text{ ise} \end{cases}$$

ÖRNEK **$sgn(\ln x) = -1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $sgn(\ln x) = -1 \Rightarrow \ln x < 0 \Rightarrow x < e^{\circ} \Rightarrow x < 1$ olur.

Diğer taraftan $y = \ln x$'in tanımlı olabilmesi için, $x > 0$ olmalıdır. Buna göre ;
$Ç = \{ x \mid x \in R \text{ ve } 0 < x < 1 \}$ dir.

ÖRNEK **$sgnx \,.\, sgn(x - 1) = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $sgnx \,.\, sgn(x - 1) = 1 \Leftrightarrow sgnx > 0$ ve $sgn(x - 1) > 0$ veya $sgnx < 0$ ve $sgn(x - 1) < 0$ dır.

Buna göre ;

$$\left.\begin{aligned} sgnx > 0 &\Rightarrow x > 0 \\ sgn(x-1) > 0 &\Rightarrow x > 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x > 1 \text{ dir. } Ç_1 = (1, +\infty)$$

$$\left.\begin{aligned} sgnx < 0 &\Rightarrow x < 0 \\ sgn(x-1) < 0 &\Rightarrow x < 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x < 0 \text{ dır. } Ç_2 = (-\infty, 0)$$

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ veya $Ç = R - [0, 1]$ bulunur.

ÖRNEK **$sgn(2x+1)=2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM *$sgn\, f(x) \neq 2$ olacağından çözüm kümesi $\varnothing$ dir.*

ÖRNEK $f(x)=x^2$, $g(x)=sgn(x)$ **ise (gof) (x) ve (fog) (x) fonksiyonlarını bulunuz.**

ÇÖZÜM $(gof)(x)=g(f(x))=g(x^2)=sgnx^2=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ bulunur.

$(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases}(-1)^2, & x<0 \text{ ise}\\ 0, & x=0 \text{ ise}\\ 1^2, & x>0 \text{ ise}\end{cases} \Rightarrow (fog)(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0 \text{ ise}\\ 0, & x=0 \text{ ise}\end{cases}$ bulunur.

ÖRNEK **$sgnx < sgn(x+1)$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM **I. durum :**

$sgnx=-1$ iken $\begin{cases}sgn(x+1)=0\\ sgn(x+1)=1\end{cases}$ dir.

$$\left.\begin{array}{ll} sgn\,x=-1 & \Leftrightarrow x<0\\ sgn(x+1)=0 & \Leftrightarrow x=-1\\ sgn(x+1)=1 & \Leftrightarrow x>-1\end{array}\right\} \Rightarrow -1\leq x<0 \text{ olur.}$$

II. durum

$sgnx=0$ iken $sgn(x+1)=1$ dir.

$$\left.\begin{array}{ll} sgnx=0 & \Leftrightarrow x=0\\ sgn(x+1)=1 & \Leftrightarrow x>-1\end{array}\right\} \Rightarrow x=0 \text{ olur.}$$

O halde $Ç=\{x \mid x\in R,\ -1\leq x\leq 0\}$ bulunur.

ÖRNEK $\sum_{k=-1}^{3}[2|k|+sgnk]$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\sum_{k=-1}^{3}[2|k|+sgnk]=2.|-1|+sgn(-1)+2.|0|+sgn0+2.|1|+sgn1+2|2|+sgn2$

$+2|3|+sgn3$

$=2-1+0+0+2+1+4+1+6+1=16$ bulunur.

ÖRNEK $sgn(|2x+6|-5)<1$ **eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?**

ÇÖZÜM $sgn(|2x+6|-5)<1 \Rightarrow |2x+6|-5\leq 0$

$|2x+6|\leq 5$

$-5\leq 2x+6\leq 5$

$-11\leq 2x\leq -1$

$\frac{-11}{2}\leq x\leq -\frac{1}{2}$

$Ç=\left[-\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ bulunur.

ÖRNEK $|x + 1| = sgn(x + 1)$ **denkleminin çözüm kümesi nedir?**

ÇÖZÜM $|x + 1| \geq 0$ olduğundan $sgn(x + 1) \geq 0$ olur.

1. $sgn(x + 1) = 0$ ise $x = -1$ ve $|x + 1| = 0 \Rightarrow x = -1$
2. $sgn(x + 1) = 1$ ise $x > -1$ ve $|x + 1| = 1 \Rightarrow x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$

$x + 1 = -1 \Rightarrow x = -2$ dir.

$x - 2$ değeri $x > -1$ koşuluna uymadığı için kök olamaz. $Ç = \{-1, 0\}$ dır.

ÖRNEK $sgn\,[\ln(x + 2)] = -1$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $sgn\,[\ln(x + 2)] = -1$

$\ln(x + 2) < 0$

$\ln(x + 2) < \ln 1$

$x + 2 < 1$

$x < -1$ ve $y = \ln(x + 2)$ fonksiyonunun tanımlı olması için $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$ olmalıdır.

Öyleyse

$-2 < x < -1 \Rightarrow Ç = (-2, -1)$ bulunur.

ÖRNEK $(a_n) = (sgn(n))$ **dizisi için EBAS + EKÜS toplamı kaçtır?**

ÇÖZÜM $(a_n) = (sgn(n)) = (sgn1, sgn2, sgn3, \ldots, sgnk, \ldots) = (1, 1, 1, 1, \ldots, 1 \ldots) = (1)$

O halde EBAS = 1 ve EKÜS = 1 olup (a_n) sabit dizidir. EBAS + EKÜS = 2 bulunur.

ÖRNEK **sgnk, sgn(k + 1), sgn(k + 2) sonlu bir aritmetik dizinin ardışık ilk üç terimi ise k kaçtır?**

ÇÖZÜM $y = sgn\,[f(x)]$ fonksiyonunun alabileceği değerler -1, 0, 1 dir. Bu terimlerde sonlu bir aritmetik dizinin ardışık üç terimi olabilir.

O halde;
$$\left.\begin{array}{l} sgnk = -1 \Rightarrow k < 0 \\ sgn(k + 1) = 0 \Rightarrow k = -1 \\ sgn(k + 2) = 1 \Rightarrow k > -2 \end{array}\right\} \Rightarrow k = -1 \text{ bulunur.}$$

İŞARET FONKSİYONUNUN GRAFİĞİ

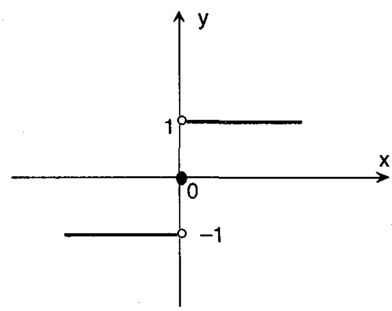
$y = sgn[f(x)]$ fonksiyonunun grafiği çizilirken, f(x) fonksiyonunun kökleri bulunarak, işareti incelenir. Bunun yardımı ile işaret fonksiyonunun grafiği çizilir.

Grafiği verilen f(x) fonksiyonu için sgn [f(x)] 'in grafiğinin çizimi isteniyorsa, f(x)'in y değerlerinin negatif olduğu yerler (x – ekseninin altında kalan yerler) (–1) ; grafiğin x – eksenini kestiği noktalar sıfır ; y değerlerinin pozitif olduğu yerler (x – ekseninin üstünde kalan yerler) 1 olarak alınır ve sgn [f(x)]'in grafiği çizilir.

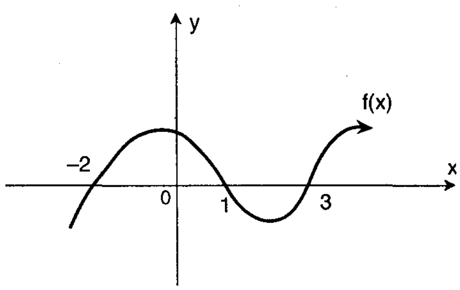
ÖRNEK **y = sgnx. fonksiyonunun grafiğini çiziniz?**

ÇÖZÜM

$$y = \text{sgn}x = \begin{cases} 1 \ , & x > 0 \\ 0 \ , & x = 0 \\ -1 \ , & x < 0 \end{cases}$$ dır. Buna göre grafik yandaki gibidir.



ÖRNEK



f(x) fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir.

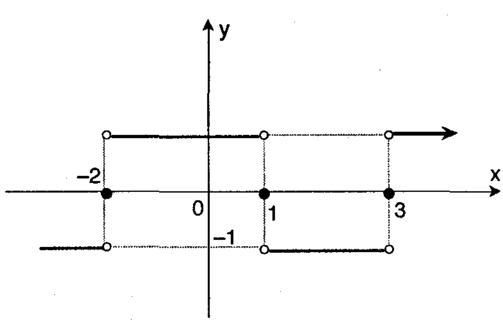
Buna göre sgn f(x) 'in grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM f in grafiğine göre işaret tablosu oluşturalım.

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$
f(x)	$-$	o	$+$	o	$-$	o	$+$
sgn [f(x)]	-1	o	$+1$	o	-1	o	$+1$

olur.

sgn f[(x)] in grafiği



$$y = \text{sgn}[f(x)] = \begin{cases} -1 \ , & x < -2 \text{ veya } 1 < x < 3 \text{ ise} \\ 0 \ , & x = -2, x = 1, x = 3 \text{ ise} \\ 1 \ , & -2 < x < 1 \text{ veya } 3 < x \text{ ise} \end{cases}$$

UYARI

$y = \text{sgn}\,[f(x)]$ biçimindeki fonksiyonların grafikleri çizilirken ;

1. $f(x) = 0$ denkleminin kökleri ile kritik noktalar belirlenir.
2. İşaret tablosu oluşturulur.
3. $f(x) > 0$ için $y = 1$
4. $f(x) < 0$ için $y = -1$
5. $f(x) = 0$ için $y = 0$ doğrular üzerinde grafik çizilir.

ÖRNEK $f : R \to R$, $f(x) = \text{sgn}(x^2 + 2x)$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

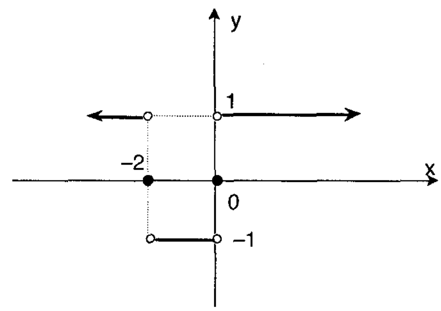
ÇÖZÜM $x^2 + 2x$ ifadesinin işaretini inceleyelim.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$x^2 + 2x$		+	0	−	0	+	
$\text{sgn}(x^2 + 2x)$		+1	0	−1	0	+1	

$x^2 + 2x = 0$

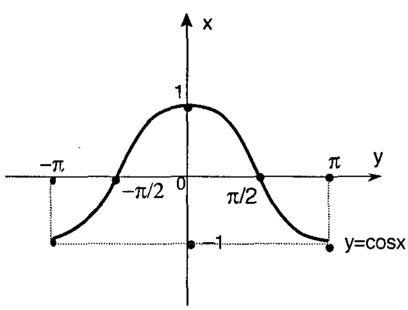
$x_1 = 0$

$x_2 = -2$

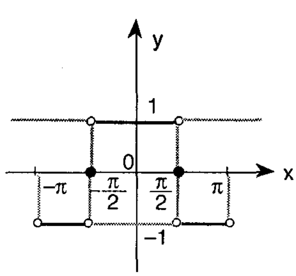


ÖRNEK $f : [-\pi, \pi] \to [-1, 1]$, $f(x) = \text{sgn}(\cos x)$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM Önce $y = \cos x$ in grafiğini çizelim.



x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
Cosx		−	0	+			0	−	
$f(x) = \text{sgn}(\cos x)$		−1	0	+1			0	−1	
	−1		0				0		−1



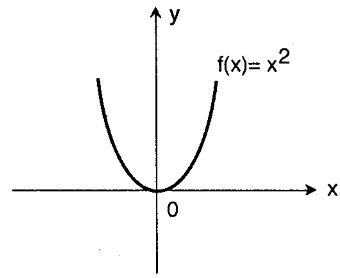
$$f(x) = \text{sgn}(\cos x) = \begin{cases} -1 \ , & -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \text{ ve } \frac{\pi}{2} < x \le \pi \text{ ise} \\ 0 \ , & x = -\frac{\pi}{2} \text{ ve } x = \frac{\pi}{2} \text{ ise} \\ +1 \ , & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ise} \end{cases}$$

ÖRNEK $f: R \to R$, $f(x) = x \cdot |x| \cdot \text{sgn}x$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

$$f(x) = \begin{cases} x.(-x)\,(-1) = x^2 & , \; x < 0 \text{ ise} \\ 0 & , \; x = 0 \text{ ise} \\ x(+x)\,.\,(1) = x^2 & , \; x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

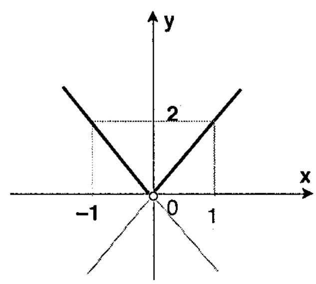
olur.
O halde $f(x) = x^2$ bulunur.



ÖRNEK $f: R \to R - \{0\}$, $f(x) = |x| + \dfrac{x}{\text{sgn}x}$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

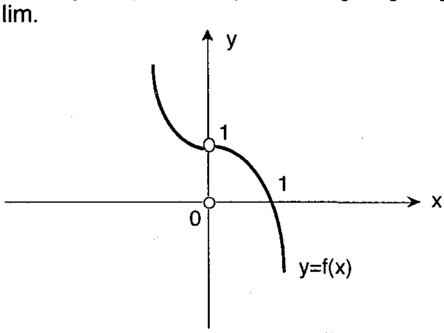
$$f(x) = \begin{cases} -x + \dfrac{x}{-1} = -2x & , \; x < 0 \text{ ise} \\ x + \dfrac{x}{+1} = 2x & , \; x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

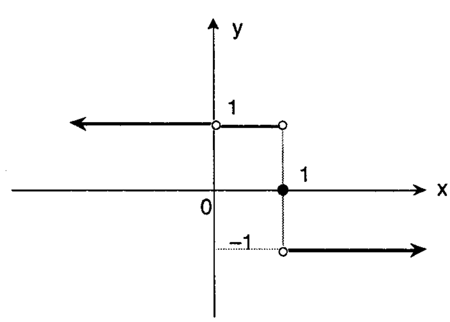


ÖRNEK $f: R - \{0\} \to R$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \; x < 0 \text{ ise} \\ 1 - x^2 & , \; x > 0 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.
$y = \text{sgn}\, f(x)$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

Önce $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.





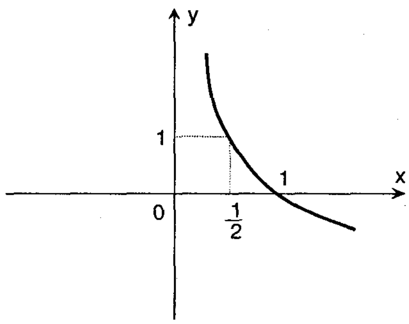
$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $y = \text{sgn}\,[f(x)]$ fonksiyonunu parçalı tanımlayalım.

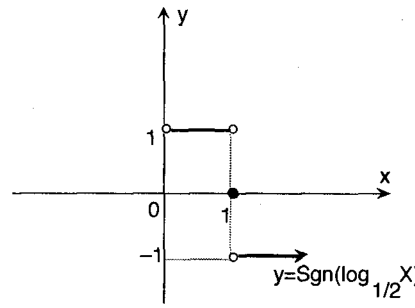
$$y = \text{sgn}\,[f(x)] = \begin{cases} 1 & , \; x < 0 \text{ ve } \; 0 < x < 1 \text{ ise} \\ 0 & , \; x = 1 \text{ ise} \\ -1 & , \; x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ÖRNEK $y = \text{sgn}\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ olsun. f(x) in grafiği

$$y = \text{sgn}\,[f(x)] = \text{sgn}\,(\log_{\frac{1}{2}} x) = \begin{cases} +1, & 0 < x < 1 \text{ ise} \\ 0, & x = 1 \text{ ise} \\ -1, & 1 < x \text{ ise} \end{cases}$$





ÖRNEK **f(x) = sgn(cotx) fonksiyonunun (0, π) aralığındaki grafiğini çiziniz.**

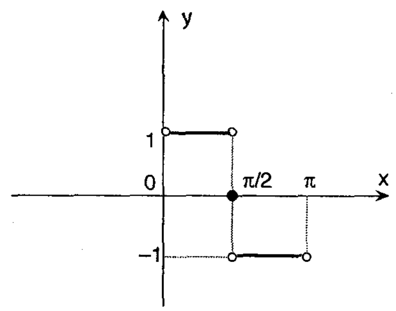
ÇÖZÜM

$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cot x > 0 \Rightarrow \text{sgn}(\cot x) = 1$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cot x = 0 \Rightarrow \text{sgn}(\cot x) = 0$

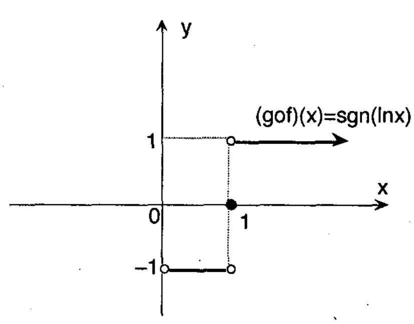
$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cot x < 0 \Rightarrow \text{sgn}(\cot x) = -1$

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ ise} \\ 0, & x = \frac{\pi}{2} \text{ ise} \\ 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ ise} \end{cases}$$



ÖRNEK f : R → R, f(x) = lnx ve g(x) = sgnx fonksiyonları veriliyor. **(gof) (x) fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM $(gof)(x) = g(f(x)) = \text{sgn}(\ln x) \Rightarrow (gof)(x) = \text{sgn}(\ln x) = \begin{cases} -1, & 0 < x < 1 \text{ ise} \\ 0, & x = 1 \text{ ise} \\ 1, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$



ÖRNEK $|y| = sgn(x^2 - 4)$ **bağıntısının grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
x^2-4	$+$		$-$		$+$
$sgn(x^2-4)$	$+1$		-1		$+1$

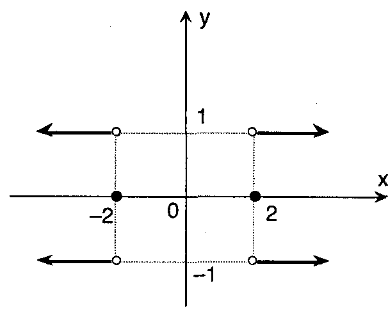
$\forall x \in R$ için $|y| \geq 0$ olacağından

$|y| = 1$ veya $|y| = 0$ olduğu bölgelerde

grafiği çizebiliriz.

$|y| = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x < -2$ veya $x > 2$

$|y| = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -2$ veya $x = 2$



TAMDEĞER FONKSİYONU

TANIM :

$x \in R$ olmak üzere; x gerçel sayısından büyük olmayan en büyük tamsayıya x in tam değeri denir ve $[\![x]\!]$ biçiminde gösterilir.

a) $x \in Z$ ise, $[\![x]\!] = x$ dir.

b) $x \notin Z$ ise, $a \in Z$ ve $a \leq x < a + 1 \Rightarrow [\![x]\!] = a$ dır.

Yani, tamsayı olmayan sayıların tam değeri, o sayıdan küçük en büyük tamsayıdır.

ÖRNEK

$[\![3]\!] = 3$	$[\![3,1]\!] = 3$	$[\![3,9]\!] = 3$	$[\![3,999]\!] = 3$
$[\![-3]\!] = -3$	$[\![-3,1]\!] = -4$	$[\![-3,9]\!] = -4$	$[\![-3,999]\!] = -4$
$[\![\pi]\!] = 3$	$[\![-\pi]\!] = -4$	$[\![e]\!] = 2$	$[\![-e]\!] = -3$
$[\![\pi + e]\!] = 5$	$[\![\pi - e]\!] = 0$	$[\![e - \pi]\!] = -1$	$[\![\log 15]\!] = 1$

TANIM :

$A \subset R$, $g : A \to Z$ tanımlı $g(x) = [\![f(x)]\!]$ fonksiyonuna $f(x)$ in tam değer fonksiyonu denir.

$$g(x) = [\![f(x)]\!] = \begin{cases} f(x) & , \ f(x) \in Z \text{ ise} \\ f(x) \text{ den küçük} & \\ \text{enbüyük tamsayı} & , \ f(x) \notin Z \text{ ise} \end{cases}$$

TAMDEĞER ÖZELLİKLERİ :

1. $\forall x \in R$ için $[\![x]\!] \le x < [\![x]\!] + 1$
2. $x \in R$ ve $a \in Z$ olmak üzere; $[\![x]\!] = a \Leftrightarrow a \le x < a + 1$
3. $x \in R$ ve $a \in Z$ olmak üzere; $[\![x + a]\!] = [\![x]\!] + a$
4. $x, y \in R$ olmak üzere ; $[\![x + [\![y]\!]]\!] = [\![x]\!] + [\![y]\!]$ dir.
5. $x,y \in R$ olmak üzere; $[\![x + y]\!] \ge [\![x]\!] + [\![y]\!]$
6. $x \in R$ olmak üzere; $[\![-x]\!] = \begin{cases} -x & , x \in Z \text{ ise} \\ -[\![x]\!] - 1 & , x \notin Z \text{ ise} \end{cases}$

ÖRNEK $[\![x + [\![x]\!]]\!] = 4$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $[\![x]\!] + [\![x]\!] = 4$

$2 [\![x]\!] = 4$

$[\![x]\!] = 2$

$2 \le x < 3$

$Ç = \{ x \mid x \in R, 2 \le x < 3\}$

ÖRNEK $[\![x + 2 [\![x]\!]]\!] = 12$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $[\![x]\!] + 2 [\![x]\!] = 12$

$3 [\![x]\!] = 12$

$[\![x]\!] = 4$

$4 \le x < 5 \Rightarrow x \in [4, 5)$ dir.

ÖRNEK $\forall x \in R$ için $[\![x - [\![x]\!]]\!] = 0$ **olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM $a \in Z$ olmak üzere; $x \in [a, a + 1)$ dir. Bu durumda $[\![x]\!] = a$ olup,

$x - [\![x]\!] = x - a \in [a - a, a + 1 - a)$

$x - [\![x]\!] = x - a \in [0, 1)$

$[\![x - [\![x]\!]]\!] = 0$ bulunur. Örneğin $x = \pi = 3,14159 \ldots$ için $[\![x]\!] = 3$ dür.

$[\![\pi - [\![\pi]\!]]\!] = [\![\pi - 3]\!] = [\![\pi]\!] - 3 = 3 - 3 = 0$ dır.

ÖRNEK $[\![\frac{x + 7}{2}]\!] = 4$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $[\![\frac{x + 7}{2}]\!] = 4 \Rightarrow 4 \le \frac{x + 7}{2} < 5$

$8 \le x + 7 < 10$

$1 \le x < 3$, $[1, 3)$ aralığın genişliğinin 2 birim olduğuna dikkat ediniz.

ÖRNEK $[\![3x + 2]\!] = -1$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $[\![3x + 2]\!] = -1 \Rightarrow -1 \leq 3x + 2 < 0$

$$-3 \leq 3x < -2$$

$$-1 \leq x < -\frac{2}{3}$$

Aralığın genişliği = $\left| \frac{-2}{3} - (-1) \right| = \left| -\frac{2}{3} + 1 \right| = \frac{1}{3}$ olduğuna dikkat ediniz.

ÖRNEK $[\![x^2]\!] = 4$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $[\![x^2]\!] = 4$ ise $4 \leq x^2 < 5$

$$\sqrt{4} \leq \sqrt{x^2} < \sqrt{5}$$

$$2 \leq |x| < \sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} < x \leq -2 \\ 2 \leq x < \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in (-\sqrt{5}, -2] \cup [2, \sqrt{5})$$

ÖRNEK $[\![\frac{2x + 3}{5}]\!] = -4$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $-4 \leq \frac{2x + 3}{5} < -3$

$$-20 \leq 2x + 3 < -15$$

$$-23 \leq 2x < -18$$

$$\frac{-23}{2} \leq x < -9$$

$x \in [\frac{-23}{2}, -9)$

ÖRNEK $[\![\frac{1}{3x + 6}]\!] = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM $[\![\frac{1}{3x + 6}]\!] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{3x + 6} < 2$ eşitliğin her iki tarafının çarpmaya göre tersi alınırsa,

$$\frac{1}{2} < 3x + 6 \leq 1$$

$$-6 + \frac{1}{2} < 3x \leq 1 - 6$$

$$-\frac{11}{2} < 3x \leq -5$$

$$-\frac{11}{6} < x \leq -\frac{5}{3} \Rightarrow \text{Çözüm kümesi} = \left(-\frac{11}{6}, -\frac{5}{3} \right] \text{ olur.}$$

ÖRNEK

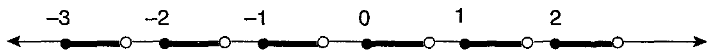
$x \in R$ olmak üzere; $\llbracket 4x \rrbracket = 4.\llbracket x \rrbracket$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$a \in Z$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere; $[a, a + \varepsilon)$ aralığını ele alalım.

$x \in [a, a + \varepsilon) \Rightarrow \llbracket x \rrbracket \geq a$ ve $4.\llbracket x \rrbracket \geq 4a$ dır.

$x \in [a, a + \varepsilon) \Rightarrow 4x \in [4a, 4a + 4\varepsilon)$ olduğundan $\llbracket 4x \rrbracket = 4a$ olması için $[4a, 4a + 4\varepsilon)$ aralığının birim uzunluktan küçük uzunlukta olması gerekir. Yani, $(4a + 4\varepsilon) - 4a = 4\varepsilon < 1$ olmalıdır.



$4\varepsilon < 1 \Rightarrow \varepsilon < \frac{1}{4}$ dür. Buna göre $\llbracket 4x \rrbracket = 4\llbracket x \rrbracket \Leftrightarrow x \in [a, a + \frac{1}{4})$ bulunur.

ÖRNEK

$\llbracket x^2 \rrbracket^2 - 5.\llbracket x^2 \rrbracket + 4 = 0$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$\llbracket x^2 \rrbracket = t$ olsun. Bu durumda, verilen denklem ikinci dereceden $t^2 - 5t + 4 = 0$ denklemine dönüşür. Bu denklemin kökleri, $t_1 = 1$ ve $t_2 = 4$ dür.

- $t_1 = 1$ ise $\llbracket x^2 \rrbracket = 1 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 < 2 \Leftrightarrow 1 \leq |x| < \sqrt{2}$
- $t_2 = 4$ ise $\llbracket x^2 \rrbracket = 4 \Leftrightarrow 4 \leq x^2 < 5 \Leftrightarrow 2 \leq |x| < \sqrt{5}$ dir.

Denklemin çözüm kümesi ise ;

$(-\sqrt{5}, -2] \cup (-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}] \cup [2, \sqrt{5})$ bulunur.

ÖRNEK

$x.\llbracket 2x \rrbracket - 1 = 0$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$x.\llbracket 2x \rrbracket = 1 \Rightarrow \llbracket 2x \rrbracket = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ dır.

$\llbracket 2x \rrbracket \in Z$ olduğundan, $\frac{1}{x}$ kesride bir tamsayı yani, $x = \pm 1$ olmalıdır. Ancak $x = \pm 1$ için verilen denklem sağlanmaz. O halde çözüm kümesi $\varnothing$ dir.

ÖRNEK

$\forall x \in R$ için $\llbracket 2x \rrbracket = \llbracket x \rrbracket + \llbracket x + \frac{1}{2} \rrbracket$ **olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM

$a \in Z$ olmak üzere; $x \in [a, a + 1)$ dir. $0 \leq h < 1$ olsun.

$x = a + h \Rightarrow 2x = 2a + 2h$ olur.

- $0 \leq h < \frac{1}{2}$ ise;

  $\llbracket 2x \rrbracket = \llbracket 2a + 2h \rrbracket = 2a + \llbracket 2h \rrbracket = 2a$ dır.

  ($0 \leq h < \frac{1}{2}$ olduğundan $\llbracket 2h \rrbracket = 0$ dır.)

  $\llbracket x + \frac{1}{2} \rrbracket = \llbracket a + h + \frac{1}{2} \rrbracket = a + \llbracket h + \frac{1}{2} \rrbracket = a$ dır. Buradan

  $\llbracket 2x \rrbracket = 2a = a + a = \llbracket x \rrbracket + \llbracket x + \frac{1}{2} \rrbracket$ bulunur.

- $\frac{1}{2} \le h < 1$ ise;

$[\![2x]\!] = 2a + [\![2h]\!] = 2a + 1$ dir.

$(1 \le 2h < 2 \Rightarrow [\![2h]\!] = 1$ dir.)

$[\![x + \frac{1}{2}]\!] = [\![a + h + \frac{1}{2}]\!] = a + [\![h + \frac{1}{2}]\!] = a + 1$ dir.

$(\frac{1}{2} \le h < 1 \Rightarrow 1 \le h + \frac{1}{2} < 1,5)$

Buradan ;

$[\![2x]\!] = 2a + 1 = a + (a + 1) = [\![x]\!] + [\![x + \frac{1}{2}]\!]$ bulunur.

UYARI

$k \in Z$ ve $k > 1$ olmak üzere;

$[\![kx]\!] = [\![x]\!] + [\![x + \frac{1}{k}]\!] + [\![x + \frac{2}{k}]\!] + ... + [\![x + \frac{k-1}{k}]\!] = \sum_{p=0}^{k-1} [\![x + \frac{p}{k}]\!]$ dir.

ÖRNEK $[\![x - [\![2x]\!]]\!] = 2$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $[\![x - [\![2x]\!]]\!] = 2$ ise

$[\![x]\!] - [\![2x]\!] = 2$

$[\![x]\!] - ([\![x]\!] + [\![x + \frac{1}{2}]\!]) = 2$

$[\![x]\!] - [\![x]\!] - [\![x + \frac{1}{2}]\!] = 2$

$[\![x + \frac{1}{2}]\!] = -2$

$-2 \le x + \frac{1}{2} < -1$

$-\frac{5}{2} \le x < -\frac{3}{2} \Rightarrow x \in [-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$ bulunur.

ÖRNEK $[\![\frac{2x-3}{4}]\!] + [\![\frac{2x-7}{4}]\!] = 3$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $[\![\frac{2x-3}{4}]\!] + [\![\frac{2x-3-4}{4}]\!] = 3$

$[\![\frac{2x-3}{4}]\!] + [\![\frac{2x-3}{4} - 1]\!] = 3$

$[\![\frac{2x-3}{4}]\!] + [\![\frac{2x-3}{4}]\!] - 1 = 3$

$2 . [\![\frac{2x-3}{4}]\!] = 4$

$[\![\frac{2x-3}{4}]\!] = 2$

$2 \le \frac{2x-3}{4} < 3$

$8 \le 2x - 3 < 12$

$11 \le 2x < 15$

$\frac{11}{2} \le x < \frac{15}{2} \Rightarrow x \in [\frac{11}{2}, \frac{15}{2})$ dir.

UYARI

$n \in N^{+}$ ve $x \in R$ olmak üzere; $[\![\frac{x}{n}]\!] = [\![\frac{[\![x]\!]}{n}]\!]$ dir.

ÖRNEK $[\![\frac{x}{3}]\!] + [\![\frac{[\![x]\!]}{3}]\!] = 4$ **deklemini sağlayan kaç tane x tamsayısı vardır?**

ÇÖZÜM $[\![\frac{x}{3}]\!] + [\![\frac{[\![x]\!]}{3}]\!] = 4$ ise

$$[\![\frac{[\![x]\!]}{3}]\!] + [\![\frac{[\![x]\!]}{3}]\!] = 4$$

$$2[\![\frac{[\![x]\!]}{3}]\!] = 4$$

$$[\![\frac{[\![x]\!]}{3}]\!] = 2$$

$$2 \le \frac{[\![x]\!]}{3} < 3$$

$6 \le [\![x]\!] < 9$ olur. Bu aralıktaki $x \in Z$ sayıları 6, 7, 8 olmak üzere üç tanedir.

TAM DEĞERLİ EŞİTSİZLİKLER

$a \in Z$ olmak üzere;

1. $[\![f(x)]\!] \le a \Rightarrow f(x) < a + 1$
2. $[\![f(x)]\!] < a \Rightarrow f(x) < a$
3. $[\![f(x)]\!] \ge a \Rightarrow f(x) \ge a$
4. $[\![f(x)]\!] > a \Rightarrow f(x) \ge a + 1$

ÖRNEK $[\![3x + 2]\!] \le -4$ **eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $[\![3x + 2]\!] \le -4 \Rightarrow 3x + 2 < -4 + 1$

$$3x + 2 < -3$$

$$3x < -5$$

$x < -\frac{5}{3} \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$ bulunur.

ÖRNEK $[\![2x - 1]\!] < 5$ **eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $[\![2x - 1]\!] < 5 \Rightarrow 2x - 1 < 5$

$$2x < 6$$

$x < 3 \Rightarrow x \in (-\infty, 3)$ bulunur.

ÖRNEK $[\![5x - 3]\!] > \frac{3}{2}$ **eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $[\![5x - 3]\!]$ ifadesi $(\frac{3}{2}, 2)$ aralığında değer alamayacağından, $[\![5x - 1]\!] \ge 2$ için çözüm yaparız.

$$5x - 3 \ge 2$$

$$5x \ge 5$$

$x \ge 1 \Rightarrow x \in [1, +\infty)$ bulunur.

ÖRNEK $[\![2x^2]\!] \leq 2$ **eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $[\![2x^2]\!] \leq 2 \Leftrightarrow [\![2x^2]\!] = 0$ veya $[\![2x^2]\!] = 1$ veya $[\![2x^2]\!] = 2$ dir.

- $[\![2x^2]\!] = 0 \Rightarrow 0 \leq 2x^2 < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$,
- $[\![2x^2]\!] = 1 \Rightarrow 1 \leq 2x^2 < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x^2 < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq |x| < 1$,
- $[\![2x^2]\!] = 2 \Rightarrow 2 \leq 2x^2 < 3 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 \leq |x| < \sqrt{\frac{3}{2}}$ olur.

O halde eşitsizliğin çözüm kümesi ;

$x \in \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ aralığıdır.

ÖRNEK $[\![\frac{x}{2}]\!] + [\![\frac{x}{3}]\!] = 3$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x > 0$ olmalıdır.

$\frac{x}{3} < \frac{x}{2} \Rightarrow [\![\frac{x}{3}]\!] \leq [\![\frac{x}{2}]\!]$ dir.

$[\![\frac{x}{2}]\!] + [\![\frac{x}{3}]\!] = 3 = 2 + 1 \Rightarrow [\![\frac{x}{2}]\!] = 2$ ve $[\![\frac{x}{3}]\!] = 1$ olur.

$[\![\frac{x}{2}]\!] = 2 \Rightarrow 2 \leq \frac{x}{2} < 3 \Rightarrow 4 \leq x < 6$,

$[\![\frac{x}{3}]\!] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{3} < 2 \Rightarrow 3 \leq x < 6$ dır.

O halde denklemin çözüm kümesi $x \in [4, 6)$ dır.

ÖRNEK $\forall x, y \in \mathbb{R}$ **için** $[\![x]\!] . [\![y]\!] \leq [\![x . y]\!]$ **olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $x \in [a, a + 1)$ ve $y \in [b, b + 1)$ olsun. Bu durumda;

$x . y \in [a.b, (a + 1)(b + 1))$

$\Rightarrow x.y \in [a.b, ab + a + b + 1)$ ve

$[\![x . y]\!] \geq a.b = [\![x]\!] . [\![y]\!]$ bulunur.

TAMDEĞER FONKSİYONUN GRAFİĞİ

Tam değer fonksiyonunun grafiği genellikle [a, b) , (a, b] , [a, b] veya (a, b) gibi aralıklarda çizilir. Verilen aralıklar alt aralıklara bölünerek, fonksiyonun bu aralıklarda değeri hesaplanır.

1. **$f : A \to \mathbb{R}$ ye $f(x) = [\![mx + n]\!]$ fonksiyonunun grafiği çizilirken, aralıkları x'e $\frac{1}{|m|}$ artması vererek buluruz.**
   - **a) $m > 0$ ise tam aralıklar soldan kapalıdır.**
   - **b) $m < 0$ ise tam aralıklar sağdan kapalıdır.**
2. **$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = [\![g(x)]\!] + h(x)$ biçiminde verilen fonksiyonların grafikleri çizilirken;**
   - **a) $g([a, b]) = [c, d]$ bulunur. [c, d] aralığındaki tamsayılar alınır.**
   - **b) Bu tamsayı görüntülerini veren tanım kümesinin elemanları bulunur.**
   - **c) Tanım kümesinin alt aralıkları bulunarak grafik çizilir.**

ÖRNEK $f : [0, 3] \to R$, $f(x) = [\![x]\!]$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM $m = 1$ ve $1 > 0$ olduğundan, aralık genişliği $= \frac{1}{|m|} \Rightarrow \frac{1}{|1|} = 1$ br dir.

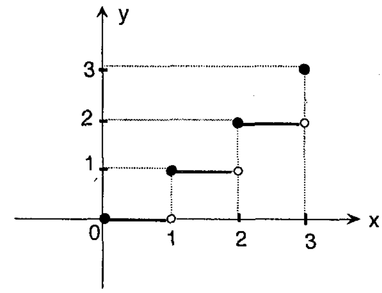
$[0, 3]$ aralığı , $[0,1) \cup [1, 2) \cup [2, 3) \cup \{3\}$ olduğundan

$x \in [0,1) \Rightarrow f(x) = 0$

$x \in [1, 2) \Rightarrow f(x) = 1$

$x \in [2, 3) \Rightarrow f(x) = 2$

$x = 3 \Rightarrow f(x) = 3$



ÖRNEK $f : [-2, 4) \to R$, $f(x) = [\![\frac{x}{2} + 1]\!]$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

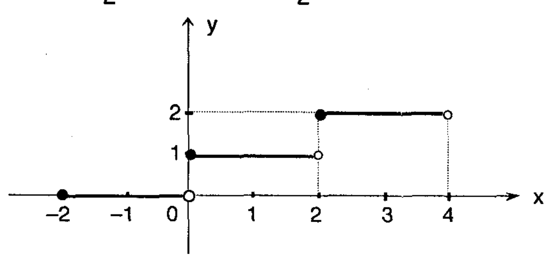
ÇÖZÜM $m = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ aralık genişliği (artım miktarı) $= \frac{1}{|m|} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ br dir.

$f(x) = [\![\frac{x}{2}]\!] + 1$ olduğundan ;

$x \in [-2, 0) \Rightarrow \frac{x}{2} \in [-1, 0) \Rightarrow [\![\frac{x}{2}]\!] = -1 \Rightarrow f(x) = 0,$

$x \in [0, 2) \Rightarrow \frac{x}{2} \in [0, 1) \Rightarrow [\![\frac{x}{2}]\!] = 0 \Rightarrow f(x) = 1,$

$x \in [2, 4) \Rightarrow \frac{x}{2} \in [1, 2) \Rightarrow [\![\frac{x}{2}]\!] = 1 \Rightarrow f(x) = 2$ dir.



ÖRNEK $f : (-1, 3] \to R$, $f(x) = [\![-x]\!]$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM $m = -1 < 0$, $m \in Z^-$ ye göre işlem yapacağız.

aralık genişliği $= \frac{1}{|m|} \Rightarrow \frac{1}{|-1|} = 1$ br olacaktır.

Burada alt aralıkların (x, y] aralıklarından ve grafiğin ○———● biçiminde uzunluğu 1 birim olan doğru parçalarından oluşacağına dikkat ediniz.

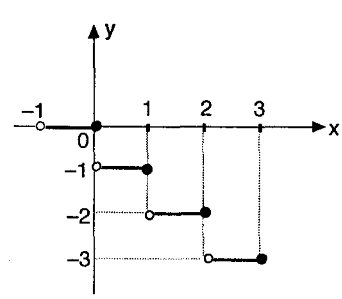
$(-1, 3)$ aralığı , $(-1, 0] \cup (0, 1] \cup (1,2] \cup (2, 3]$ biçiminde parçalanmalıdır.

$x \in (-1, 0] \Rightarrow f(x) = 0$

$x \in (0, 1] \Rightarrow f(x) = -1$

$x \in (1, 2] \Rightarrow f(x) = -2$

$x \in (2, 3] \Rightarrow f(x) = -3$ olur.



ÖRNEK

$f : [0, 2] \to R, \quad f(x) = [\![-2x + 3]\!]$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

$m = -2 < 0$, $m \in Z^-$ olduğundan aralık genişliği $\dfrac{1}{|m|} \Rightarrow \dfrac{1}{|-2|} = \dfrac{1}{2}$ olur.

$[0, 2] = \{0\} \cup (0, \frac{1}{2}] \cup (\frac{1}{2}, 1] \cup (1, \frac{3}{2}] \cup (\frac{3}{2}, 2]$

$f(x) = [\![-2x]\!] + 3$

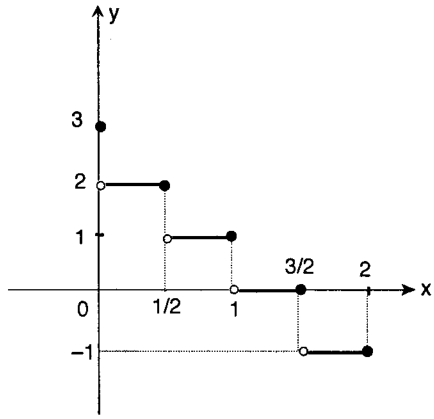
$x = 0 \Rightarrow f(x) = 0 + 3 = 3$

$x \in (0, \frac{1}{2}] \Rightarrow f(x) = -1 + 3 = 2$

$x \in (\frac{1}{2}, 1] \Rightarrow f(x) = -2 + 3 = 1$

$x \in (1, \frac{3}{2}] \Rightarrow f(x) = -3 + 3 = 0$

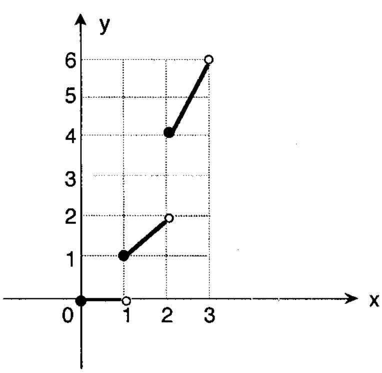
$x \in (\frac{3}{2}, 2] \Rightarrow f(x) = -4 + 3 = -1$



ÖRNEK

$f : [0, 3) \to R, \quad f(x) = x [\![x]\!]$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM



$$f(x) = \begin{cases} x \cdot 0 = 0 , & 0 \le x < 1 \text{ ise} \\ x \cdot 1 = x , & 1 \le x < 2 \text{ ise} \\ x \cdot 2 = 2x , & 2 \le x < 3 \text{ ise} \end{cases}$$

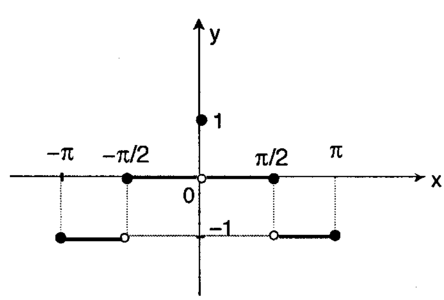
ÖRNEK

$f : [-\pi, \pi] \to R \quad f(x) = [\![\cos x]\!]$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

Önce fonksiyonu parçalı tanımlayalım.

$$f(x) = \begin{cases} -1 , & -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \text{ ise} \\ 0 , & -\frac{\pi}{2} \le x < 0 \text{ ise} \\ 1 , & x = 0 \text{ ise} \\ 0 , & 0 < x \le \frac{\pi}{2} \text{ ise} \\ -1 , & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \text{ ise} \end{cases}$$



ÖRNEK $f : [-2, 0] \to \mathbb{R},\ f(x) = [\![\frac{2x+4}{3}]\!]$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

a) $g(x) = \frac{2x+4}{3}$ dür.

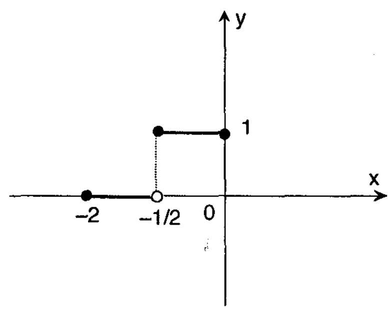
$$\left.\begin{aligned} g(-2) &= \frac{-4+4}{3} = 0 \\ g(0) &= \frac{0+4}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow g([-2, 0]) = [\,0, \tfrac{4}{3}\,]$$ dür. Bu aralık içindeki tamsayı ise 1 dir.

b) $\frac{2x+4}{3} = 1 \Rightarrow 2x + 4 = 3 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

c) Alt aralıklar ise,

$[-2, -\frac{1}{2})\ ,\ [-\frac{1}{2}, 0)$ dır. $x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$ dir.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ,\ -2 \le x < -\frac{1}{2} \text{ ise} \\ 1 & ,\ -\frac{1}{2} \le x < 0 \text{ ise} \\ 1 & ,\ x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$



ÖRNEK $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x + [\![x + \frac{1}{2}]\!]$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

a) $g(x) = x + \frac{1}{2}$ dir.

$$\left.\begin{aligned} g(-1) &= -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ g(1) &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}\right\} g([-1, 1]) = [\,-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\,] \text{ olur.}$$

Bu aralaktaki tamsayılar 0 ve 1 dir.

b) $x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

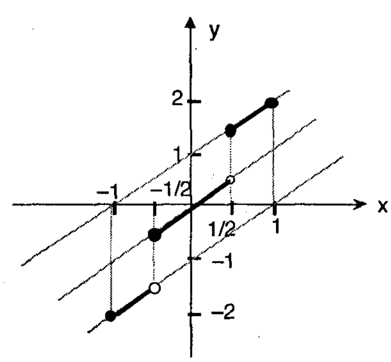
$x + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

c) Alt aralıklar ise ;

$[-1, -\frac{1}{2})\ ,\ [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\ ,\ [\frac{1}{2}, 1\,)$ ve bu aralıklarda

$[\![g(x)]\!] = [\![x + \frac{1}{2}]\!]$ değerleri $\{-1, 0, 1\}$ olur.

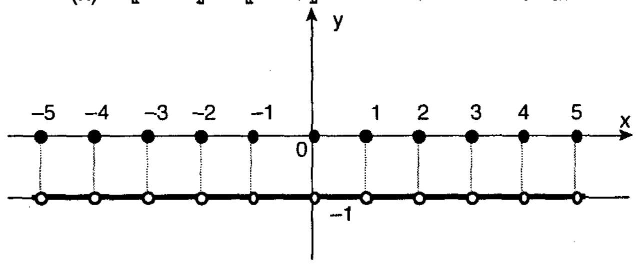
$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & ,\ -1 \le x < -\frac{1}{2} \text{ ise} \\ x & ,\ -\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2} \text{ ise} \\ x + 1 & ,\ \frac{1}{2} \le x < 1 \text{ ise} \\ 2 & ,\ x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$



ÖRNEK $f : R \to R,\ f(x) = [\![x-1]\!] + [\![1-x]\!]$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM $a \in Z$ olmak üzere; $x \in [a, a+1) \Rightarrow [\![x]\!] = a$ dır.

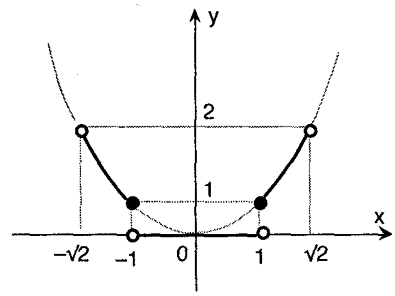
- $x \notin Z$ ise;
  $(x-1) \in [a-1, a) \Rightarrow [\![x-1]\!] = a-1$
  $(1-x) \in (-a, 1-a] \Rightarrow [\![1-x]\!] = -a$
  $f(x) = [\![x-1]\!] + [\![1-x]\!] = a - 1 + (-a) = -1$ dir.
- $x \in Z$ ise;
  $(x-1)$ ve $(1-x)$ tamsayı olacağından
  $f(x) = [\![x-1]\!] + [\![1-x]\!] = x - 1 + 1 - x = 0$ dır.



ÖRNEK $f : (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \to R,\ f(x) = [\![x^2]\!] . x^2$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

$-\sqrt{2} < x \le -1 \Rightarrow 1 \le x^2 < 2 \Rightarrow f(x) = x^2$
$-1 < x < 1 \Rightarrow 0 \le x^2 < 1 \Rightarrow f(x) = 0$
$1 \le x < \sqrt{2} \Rightarrow 1 \le x^2 < 2 \Rightarrow f(x) = x^2$



ÖRNEK $f : [-3, \pi] \to R,$

$$f(x) = \begin{cases} |x| . [\![x]\!] & , -3 \le x < -1 \text{ ise} \\ x . \text{sgn}x & , -1 \le x \le 0 \text{ ise} \\ x^2 . [\![\text{sgn}(x^2-1)]\!] & , 0 < x \le 1 \text{ ise} \\ [\![\sin x]\!] . \sin x & , 1 < x < \pi \text{ ise} \end{cases}$$

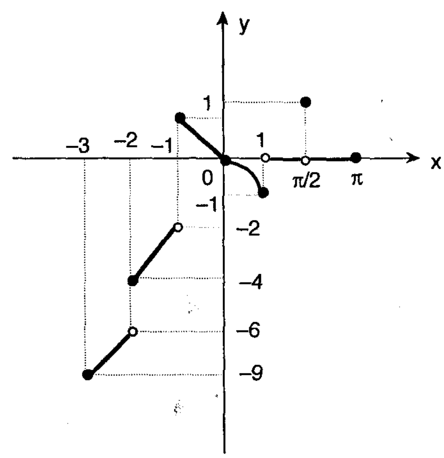
tanımlı fonksiyonun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

$-3 \le x < -2 \Rightarrow f(x) = -x . (-3) = 3x$
$-2 \le x < -1 \Rightarrow f(x) = -x . (-2) = 2x$
$-1 \le x \le 0 \Rightarrow f(x) = -1 . x = -x$
$0 < x \le 1 \Rightarrow f(x) = -1 . x^2 = -x^2$

$1 < x \le \pi \Rightarrow f(x) = [\![\sin x]\!] . \sin x$

$$1 < x \le \pi \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 , 1 < x < \frac{\pi}{2} \text{ ise} \\ 1 , x = \frac{\pi}{2} \text{ ise} \\ 0 , \frac{\pi}{2} < x \le \pi \text{ ise} \end{cases}$$



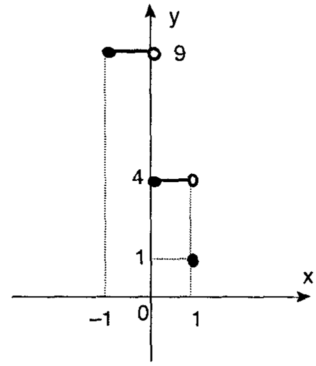
ÖRNEK $f : [-1, 1] \to R$, $f(x) = [\![x]\!]^2 - 4[\![x]\!] + 4$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM $f(x) = [\![x]\!]^2 - 4[\![x]\!] + 4 \Rightarrow f(x) = ([\![x]\!] - 2)^2$ dir.

$x \in [-1, 0) \Rightarrow f(x) = (-1 - 2)^2 = 9$

$x \in [0, 1) \Rightarrow f(x) = (0 - 2)^2 = 4$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = (1 - 2)^2 = 1$



ÖRNEK $f : (-1, 2] \to Z$, $f(x) = [\![x]\!] \cdot [\![x^2]\!]$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

$x \in (-1, 0] \Rightarrow x^2 \in [0, 1) \Rightarrow [\![x]\!] \cdot [\![x^2]\!] = (-1) \cdot 0 = 0$

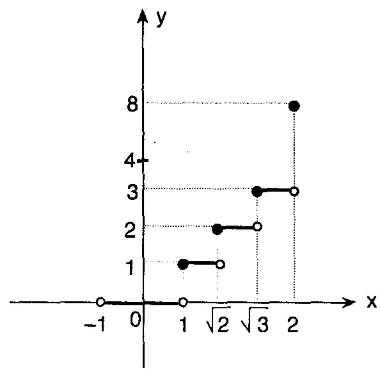
$x \in [0, 1) \Rightarrow x^2 \in [0, 1) \Rightarrow [\![x]\!] \cdot [\![x^2]\!] = 0 \cdot 0 = 0$

$x \in [1, \sqrt{2}) \Rightarrow x^2 \in [1, 2) \Rightarrow [\![x]\!] \cdot [\![x^2]\!] = 1.1 = 1$

$x \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}) \Rightarrow x^2 \in [2, 3) \Rightarrow [\![x]\!] . [\![x^2]\!] = 1.2 = 2$

$x \in [\sqrt{3}, 2) \Rightarrow x^2 \in [3, 4) \Rightarrow [\![x]\!] \cdot [\![x^2]\!] = 1.3 = 3$

$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow [\![x]\!] \cdot [\![x^2]\!] = 2.4 = 8$



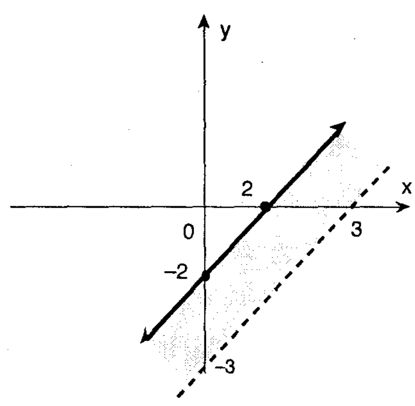
ÖRNEK $[\![x - y - 1]\!] = 1$ **bağıntısının grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM $[\![x - y - 1]\!] = 1 \Rightarrow [\![x - y]\!] = 2$

$2 \leq x - y < 3$

$2 \leq x - y$ veya $x - y < 3$

$y \leq x - 2$ $\qquad$ $y > x - 3$



ÖRNEK

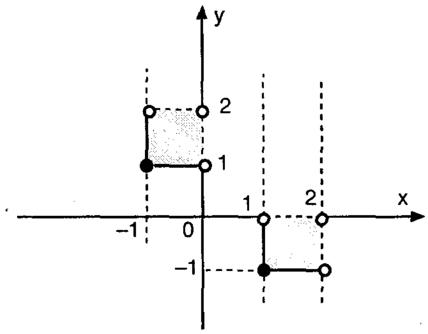
$x, y \in R$ olmak üzere

$\beta = \{ (x, y) \mid [\![x]\!] . [\![y]\!] = -1 \}$ **bağıntısının grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

$[\![x]\!] . [\![y]\!] = -1 \Rightarrow [\![x]\!] = 1$ ve $[\![y]\!] = -1 \Rightarrow 1 \le x < 2$ ve $-1 \le y < 0$

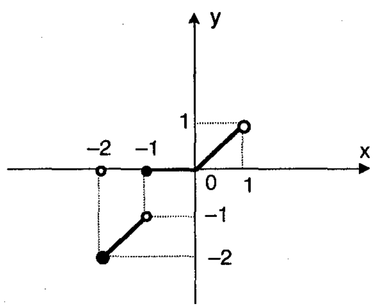
veya $[\![x]\!] = -1$ ve $[\![y]\!] = 1 \Rightarrow -1 \le x < 0$ ve $1 \le y < 2$ olur.



ÖRNEK

$f : [-2, 1) \to R$, $f(x) = [\![x]\!] . |x| + |x|$ **fonksiyonun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM



$$f(x)=\begin{cases} -2 . (-x) + (-x) = x \ , & -2 \le x < -1 \text{ ise} \\ -1 . (-x) + (-x) = 0 \ , & -1 \le x < 0 \text{ ise} \\ 0 . (+x) + x = x \ , & 0 \le x < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

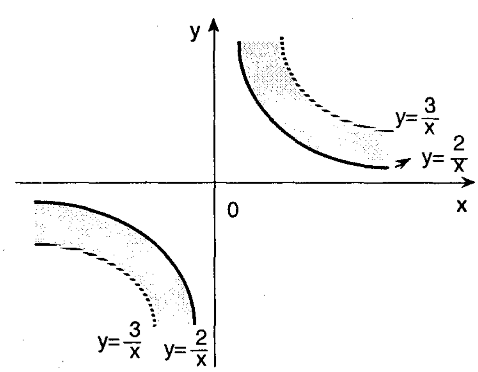
ÖRNEK

$[\![x . y]\!] = 2$ **bağıntısının grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

$[\![x . y]\!] = 2 \Rightarrow 2 \le x . y < 3$ olur.

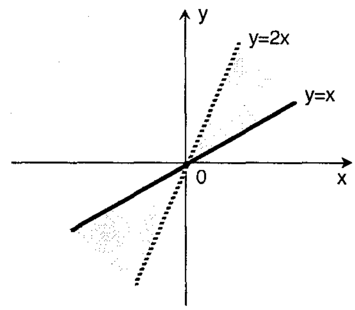
- $x > 0$ ise $2 \le x . y < 3 \Rightarrow \frac{2}{x} \le y < \frac{3}{x}$,
- $x < 0$ ise $2 \le x . y < 3 \Rightarrow \frac{3}{x} < y \le \frac{2}{x}$ olur.



ÖRNEK $[\![\frac{y}{x}]\!] = 1$ **bağıntısının grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

- $x > 0$ için; $1 \le \frac{y}{x} < 2 \Rightarrow x \le y < 2x$
- $x < 0$ için ; $1 \le \frac{y}{x} < 2 \Rightarrow 2x < y \le x$ olur.



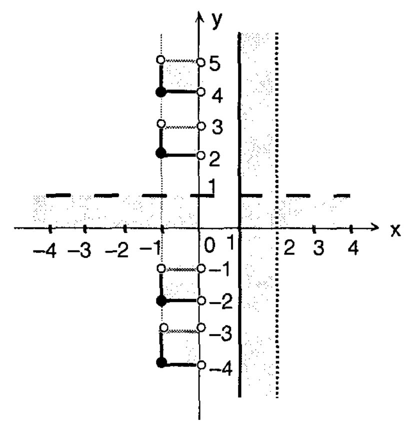
ÖRNEK $x, y \in R$ olmak üzere;

$[\![x]\!]^{[\![y]\!]} = 1$ **bağıntısının grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

$[\![x]\!] \ne 0$ için $x \notin [0, 1)$ olmalıdır. O halde;

- $[\![x]\!] = 1$ ise $\forall y \in R$ için $[\![x]\!]^{[\![y]\!]} = 1$ dir.
- $[\![y]\!] = 0$ ise $\forall x \in R - [0, 1)$ için $[\![x]\!]^{[\![y]\!]} = 1$ dir.
- $[\![x]\!] = -1$ ve $[\![y]\!] = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots$ ise denklem sağlanır.



ÖRNEK $x, y \in R$ olmak üzere ;

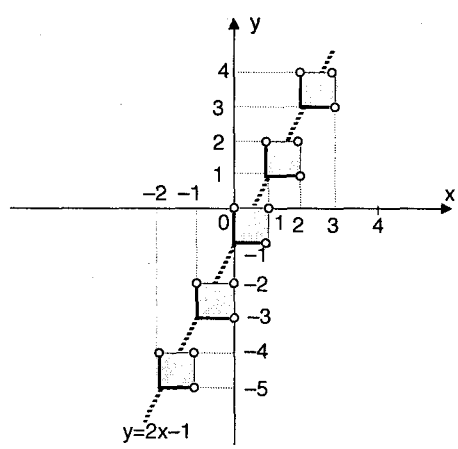
$[\![y]\!] - 2 [\![x]\!] + 1 = 0$ **bağıntısının grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM $[\![y]\!] - 2[\![x]\!] + 1 = 0 \Rightarrow [\![y]\!] = 2[\![x]\!] - 1$ dir.

Önce $y = 2x - 1$ doğrusunu çizelim. Bu doğru üzerinde $(-1, -3)$, $(0, -1)$, $(1, 1)$, $(2, 3)$, ... gibi koordinatları tamsayı olan noktaları ele alalım.

$a, b \in Z$ olmak üzere, (a, b) noktası doğru üzerinde ise $b = 2a - 1$ bağıntısı vardır. O halde ; $x \in [a, a + 1) \Rightarrow [\![x]\!] = a$

$y \in [b, b + 1) \Rightarrow [\![y]\!] = b$ ve $b = 2a-1$ olduğundan $[\![y]\!] = 2[\![x]\!] -1$ denklemi sağlanır. Buna göre; (a,b) noktası $y = 2x - 1$ doğrusu üzerinde ise;



$(x, y) \in [a, a + 1) \cdot [b, b + 1)$ noktasında $[\![y]\!] = 2[\![x]\!] - 1$ bağıntısının grafiği üzerindedir. Bu nedenle, verilen bağıntının grafiği, sol alt köşesi $y = 2x - 1$ doğrusu üzerinde, koordinatları tamsayı noktalar olan birim karesel bölgelerden oluşur.

FONKSİYONLARIN EN GENİŞ TANIM KÜMELERİ

TANIM :

$y = f(x)$ biçiminde verilmiş herhangi bir f fonksiyonu için, görüntüleri bir gerçel sayı olan tüm x değerlerinin kümesine f fonksiyonunun **EN GENİŞ TANIM KÜMESİ** denir.

En geniş tanım kümesinin bulunuşu fonksiyonların yapılarına göre değişir. Şimdi yapıları değişik fonksiyonların tanım kümelerinin bulunuşunu gösterelim.

A) **$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ $(n \in N^+)$ biçimindeki polinom fonksiyonlar her gerçel sayı için tanımlıdır. Tanım kümesi = R = $(-\infty, +\infty)$ dır.**

B) **$f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ biçimindeki fonksiyonlar $h(x) = 0$ eşitliğini sağlayan $x \in R$ değerleri için tanımsız $h(x) \neq 0$ için tanımlıdır.**

C) **$n \in N^+$ olmak üzere;**

$\sqrt[2n]{f(x)}$ biçimindeki irrasyonel fonksiyonlar ; $f(x) \geq 0$ için tanımlı $f(x) < 0$ için tanımsızdır.

D) **$n \in N^+$ olmak üzere;**

$\sqrt[2n+1]{f(x)}$ biçimindeki irrasyonel fonksiyonlar f(x) in tanımlı olduğu her yerde tanımlıdır. Tek dereceli kökler tanımlı olmayı etkilemez.

E) **$f(x) = \log_a g(x)$ biçimdeki fonksiyonlar $g(x) > 0$ için tanımlıdır. $(a > 0$ ve $a \neq 1)$**

ÖRNEK $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x - 1}{x^2 - x - 2}$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM f(x), $x^2 - x - 2 = 0$ için tanımsızdır.

$x_1 = 2 \quad x_2 = -1$

f(x) ' in tanımlı olduğu en geniş küme = $R - \{-1, 2\}$ olur.

ÖRNEK $f(x) = \dfrac{x + 7}{[\![x]\!] - x}$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM f(x), $[\![x]\!] - x = 0$ için tanımsızdır.

$[\![x]\!] = x$ denklemini bütün tamsayılar sağlar. O halde fonksiyon Z de tanımsızdır.
f(x) 'in en geniş tanım kümesi $R - Z$ dir.

ÖRNEK $f(x) = \sqrt{5 - |-x + 2|}$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM f(x), $5 - |-x + 2| \geq 0$ için tanımlıdır.

$$-|-x + 2| \geq -5$$
$$|-x + 2| \leq 5$$
$$-5 \leq -x + 2 \leq 5$$
$$-7 \leq -x \leq 3$$
$-3 \leq x \leq 7 \Rightarrow$ f(x) in en geniş tanım kümesi $[-3, 7]$ dir.

ÖRNEK $f(x) = 3x\sqrt{x+3} - x\sqrt{2-x} + \sqrt[3]{5x^3 + 7}$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$x + 3 \geq 0$ ve $2 - x \geq 0$ olmalıdır.

$x \geq -3$, $-x \geq -2$

$x \leq 2$

$-3 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(x)$ in en geniş tanım kümesi $[-3, 2]$ dir.

ÖRNEK

$f(x) = \dfrac{\sqrt{\operatorname{sgn}(x^2 - 2)}}{[\![2x - 2]\!]}$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?**

ÇÖZÜM

$\operatorname{sgn}(x^2 - 2) \geq 0$ ve $[\![2x - 2]\!] \neq 0$ için fonksiyon tanımlıdır.

$\operatorname{sgn}(x^2 - 2) \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2 \geq 0$ olmalı

$x^2 - 2 = 0$, $[\![2x - 2]\!] = 0 \Rightarrow 0 \leq 2x - 2 < 1$

$x = \pm\sqrt{2}$, $2 \leq 2x < 3$

$1 \leq x < \dfrac{3}{2}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 - 2$	+	○	−	○	+
	$x \leq -\sqrt{2}$ veya $x \geq \sqrt{2}$				

$[1, \dfrac{3}{2})$ aralığında fonksiyon tanımsızdır.

İki koşulunda sağlandığı bölge

$(-\infty, -\sqrt{2}\,] \cup [\dfrac{3}{2}, +\infty)$ aralığıdır.

ÖRNEK

$f(x) = \dfrac{\ln(x - 2x^2)}{\sqrt{x + [\![x]\!]}}$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

Logaritma fonksiyonu R^+ tanımlı olduğundan $(x - 2x^2) > 0$ olmalıdır. $y = \dfrac{1}{\sqrt{g(x)}}$ biçiminde tanımlı fonksiyonlar ise $g(x) > 0$ için tanımlı olduğundan $x + [\![x]\!] > 0$ olmalıdır.

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$	
$x - 2x^2$	−	○	+	○	−

$(x^2 - 2x^2) > 0$

$x(1 - 2x) > 0$

$x = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$

$x + [\![x]\!] > 0$ eşitsizliği $(0, \dfrac{1}{2})$ aralığındaki $\forall\, x \in R$ için sağlanır. O halde fonksiyonun en geniş tanım kümesi $(0, \dfrac{1}{2})$ dir.

ÖRNEK

$f(x) = \sqrt{\dfrac{3 - |x|}{2 - |x|}}$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$f(x)$ in tanımlı olması için , $\dfrac{3 - |x|}{2 - |x|} \geq 0$ olmalıdır.

1. $3 - |x| \geq 0$ ve $2 - |x| > 0$ olmalıdır.

$-|x| \geq -3$ $\quad -|x| > -2$

$|x| \leq 3$ $\quad |x| < 2$

$-3 \leq x \leq 3$ $\quad -2 < x < 2 \Rightarrow$ her iki eşitsizliğinde sağlandığı aralık $(-2, 2)$ dir.

2. $3 - |x| \leq 0$ ve $2 - |x| < 0$ olmalıdır.

$-|x| \leq -3$ $\quad$ $-|x| < -2$

$|x| \geq 3$ $\quad$ $|x| > 2$

$x \geq 3$ veya $x \leq -3$, $\quad$ $x > 2$ veya $x < -2$ dir.

$\Rightarrow$ her iki eşitsizliğinde sağlandığı aralık $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ dir.

O halde fonksiyonun en geniş tanım kümesi, $(-\infty, -3] \cup (-2, 2) \cup [3, +\infty)$ olur.

ÖRNEK $f(x) = \dfrac{2}{[\![2 - \log x]\!]}$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $[\![2 - \log x]\!] = 0$ için tanımsızdır.

$0 \leq 2 - \log x < 1$

$-2 \leq -\log x < -1$

$1 < \log x \leq 2$ $\quad$ $(\log 10 < \log x \leq \log 100)$

$10 < x \leq 100$ için tanımsız olur.

En geniş tanım kümesi $R^+ - (10, 100]$ aralığıdır.

ÖRNEK $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+3}}{[\![x]\!] - x}$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?**

ÇÖZÜM $[\![x]\!] - x = 0$ için $f(x)$ tanımsızdır.

$[\![x]\!] = x$ eşitliği $\forall x \in Z$ için doğru olduğundan $f(x)$, $x \in Z$ için tanımsızdır.

En geniş tanım kümesi $R - Z$ dir.

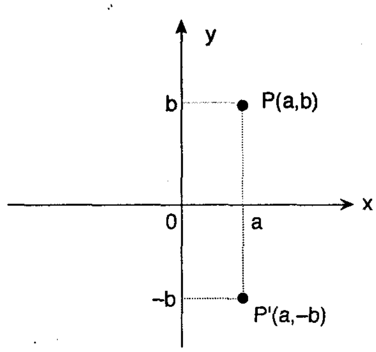
DÜZLEMDE SİMETRİLER

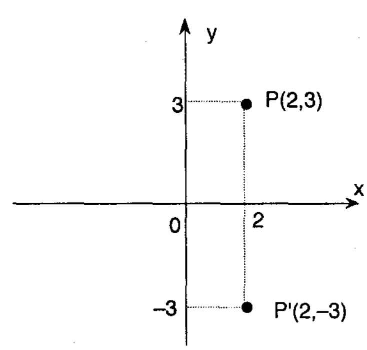
A) X EKSENİNE GÖRE SİMETRİLER

a) $P(a, b)$ noktasının x eksenine göre simetriği $P'(a, -b)$

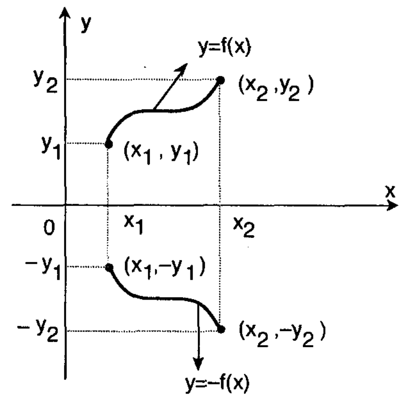
ÖRNEK **P(2,3) ile P'(2, –3) noktasının x eksenine göre simetrik olduklarını gösteriniz.**

ÇÖZÜM





b) $y = f(x)$ fonksiyonu ile $y = -f(x)$ fonksiyonu x eksenine göre simetriktir.

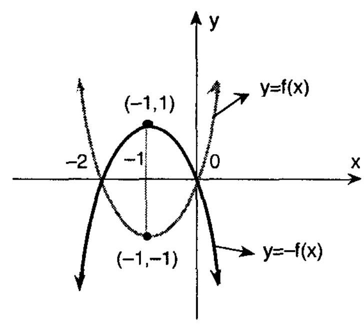


ÖRNEK

$y = f(x) = x^2 + 2x$ ile $y = -f(x)$ **fonksiyonunun x eksenine göre simetrik olduklarını gösteriniz.**

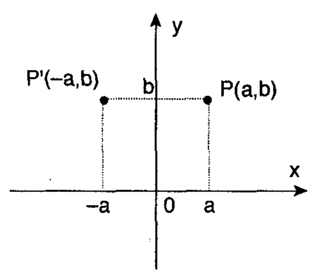
ÇÖZÜM

$f(x) = x^2 + 2x \Rightarrow -f(x) = -x^2 - 2x$ olur.



B) Y EKSENİNE GÖRE SİMETRİLER

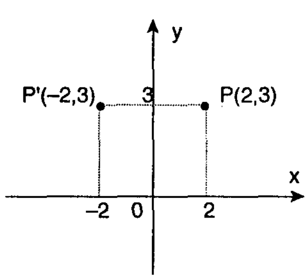
a) P(a, b) noktasının y eksenine göre simetriği P' (– a, b) dir.



ÖRNEK

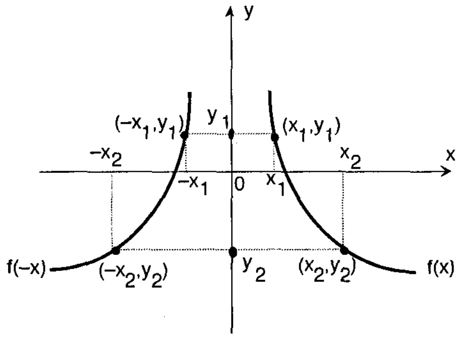
P(2,3) ile P'(–2,3) noktasının **y eksenine göre simetrik olduklarını gösteriniz.**

ÇÖZÜM



b) $y = f(x)$ fonksiyonu ile $y = f(-x)$ fonksiyonu y eksenine göre simetriktir.

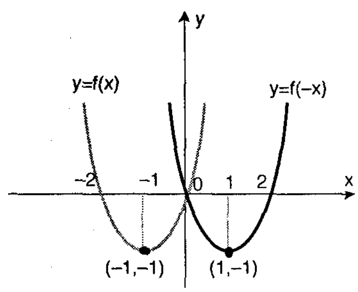
$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir.



ÖRNEK

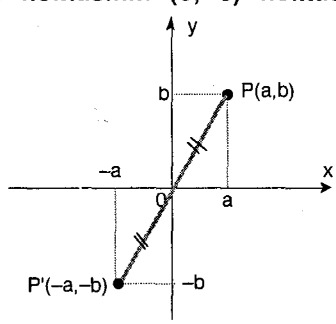
$y = f(x) = x^2 + 2x$ ile $y = f(-x) = x^2 - 2x$ **fonksiyonlarının y eksenine göre simetrik olduklarını gösteriniz.**

ÇÖZÜM



C) Orijine Göre Simetriler

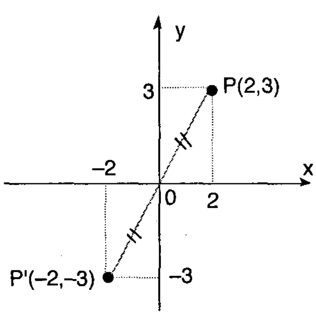
a) P(a,b) noktasının (0, 0) noktasına göre simetriği P'(–a, –b) dir.



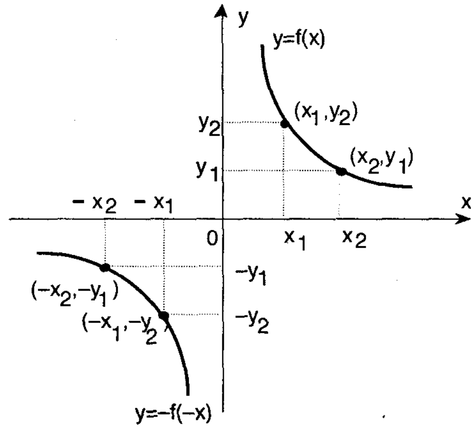
ÖRNEK

P(2, 3) *noktası* ile P'(–2, –3) **noktasının orijine göre simetrik olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM

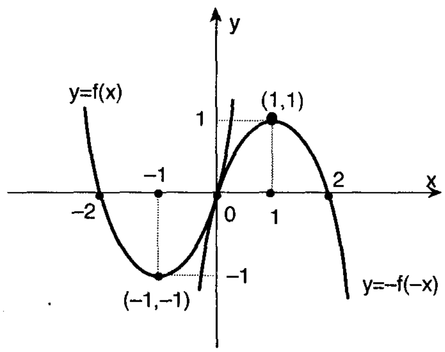


b) $y = f(x)$ fonksiyonu ile $y = -f(-x)$ fonksiyonları (0 ,0) noktasına göre simetriktir.



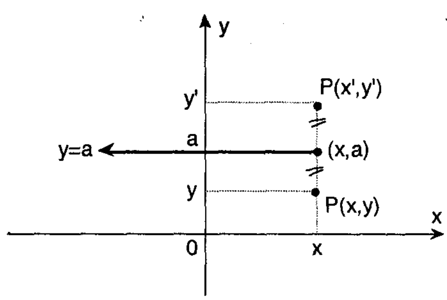
ÖRNEK $y = f(x) = x^2 + 2x$ **fonksiyonu ile** $y = -f(-x)$ **fonksiyonlarının orijine göre simetrik olduklarını gösteriniz.**

ÇÖZÜM $y = f(x) = x^2 + 2x \Rightarrow y = -f(-x) = -(x^2 - 2x) = -x^2 + 2x$



D) y = a DOĞRUSUNA GÖRE SİMETRİLER

a) P(x,y) noktasının y=a doğrusuna göre simetriği olan nokta,P'(x',y')=(x,2a–y) dir.

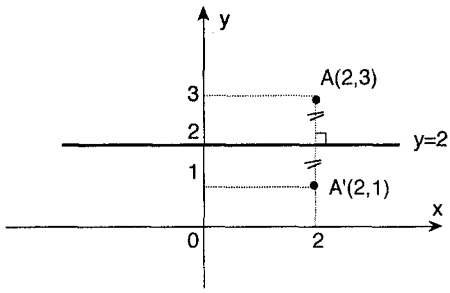


$$x = \frac{x + x'}{2} \Rightarrow x = x'$$

$$a = \frac{y + y'}{2} \Rightarrow y' = 2a - y$$

ÖRNEK A(2, 3) noktasının y = 2 doğrusuna göre simetriği olan noktayı bulunuz.

ÇÖZÜM

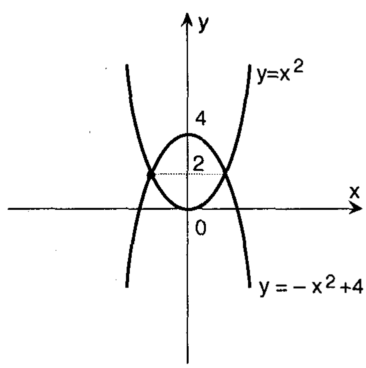


A(2, 3) noktasının y = 2 doğrusuna göre simetriği olan nokta A' ise,
A'(2, 2.2–3) ⇒ A'(2, 1) dir.

b) y = f(x) fonksiyonunun y = a doğrusuna göre simetriği olan fonksiyon, f(x) de ∀ (x, y) noktasının yerine (x, 2a – y) yazılarak 2a – y = f(x) ⇒ y = –f(x) + 2a olarak bulunur.

ÖRNEK **$y = f(x) = x^2$ fonksiyonunun y = 2 doğrusuna göre simetriği olan fonksiyonu bulunuz.**

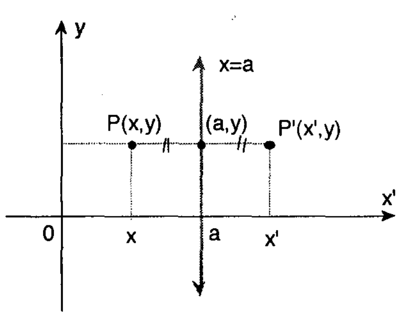
ÇÖZÜM



$y = f(x) = x^2$ fonksiyonunun y = 2 doğrusuna göre simetriği
$2 \cdot 2 - y = x^2 \Rightarrow y = -x^2 + 4$ bulunur.

E) x = a DOĞRUSUNA GÖRE SİMETRİLER

a) P(x,y) noktasının x = a doğrusuna göre simetriği olan nokta P'(x',y')=(2a–x,y) dir.



$$a = \frac{x' + x}{2} \Rightarrow x' = 2a - x$$

$$y = \frac{y + y'}{2} \Rightarrow y' = y$$

b) y=f(x) fonksiyonunun x=a doğrusuna göre simetriği olan fonksiyon, f de ∀ (x , y) noktasının yerine (2a – x, y) yazılarak y = f(2a – x) olarak bulunur.

ÖRNEK **$y = f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun x = 2 doğrusuna göre simetriği olan fonksiyonu bulunuz.**

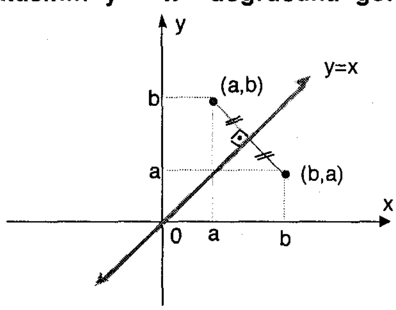
ÇÖZÜM $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun x = 2 doğrusuna göre simetriği olan g(x) bulunurken ∀ x ∈ (x, y) için x yerine (2a – x) yazılacağından,

$g(x) = (2.2 - x)^2 + 1$

$g(x) = 16 - 8x + x^2 + 1 \Rightarrow g(x) = x^2 - 8x + 17$ bulunur.

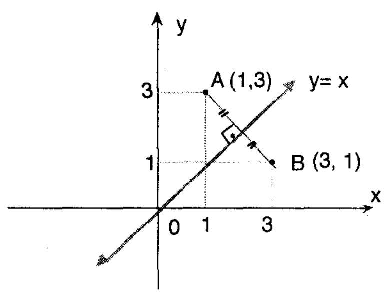
F) y = x DOĞRUSUNA GÖRE SİMETRİLER

a) P(a, b) noktasının y = x doğrusuna göre simetriği P'(b, a) dir.



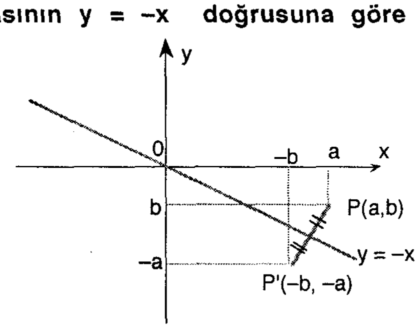
ÖRNEK A(1, 3) ile B(3,1) noktalarının **y = x doğrusuna göre simetrik olduklarını gösteriniz.**

ÇÖZÜM



G) y = –x DOĞRUSUNA GÖRE SİMETRİLER

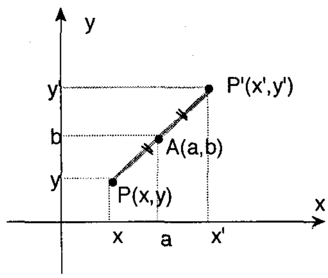
P(a, b) noktasının y = –x doğrusuna göre simetriği P'(–b,–a) dır.



H) BİR NOKTAYA GÖRE SİMETRİLER

a) P(x, y) noktasının A(a, b) noktasına göre simetriği olan nokta

P'(x', y') = (2a – x , 2b – y) dir.



$$a = \frac{x' + x}{2} \Rightarrow x' = 2a - x$$

$$b = \frac{y' + y}{2} \Rightarrow y' = 2b - y$$

ÖRNEK **P(1,2) noktasının A(3, 4) noktasına göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.**

ÇÖZÜM $P'(x', y') \Rightarrow \left.\begin{matrix} x' = 2.3 - 1 = 5 \\ y' = 2.4 - 2 = 6 \end{matrix}\right\}$ P'(5, 6) bulunur.

b) y = f(x) fonksiyonunun P(a, b) noktasına göre simetriği olan fonksiyon g(x) ise, g(x) fonksiyonu, f(x) fonksiyonunda ∀ (x,y) yerine (2a–x,2b–y) yazılarak bulunur. y = f(x) fonksiyonunun P(a, b) noktasına göre simetriği, g(x) = – f(2a – x) + 2b dir.

ÖRNEK **f(x) = 3x + 5 fonksiyonunun P(1, 3) noktasına göre simetriği olan g(x) fonksiyonunu bulunuz.**

ÇÖZÜM y = f(x) ifadesinde ∀ (x, y) yerine (2.1 –x, 2.3 – y) = (2 – x, 6 – y) yazılırsa;

$6 - y = f(2 - x)$

$6 - y = 3 \,.\, (2 - x) + 5$

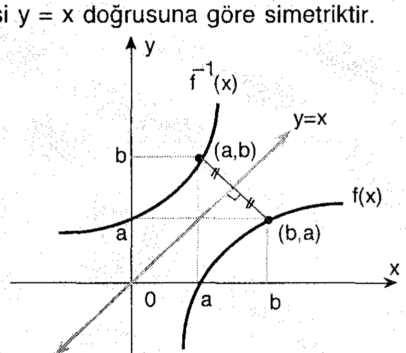
$6 - y = 6 - 3x + 5$

$-y = -3x + 5$

$y = 3x - 5 \Rightarrow g(x) = 3x - 5$ bulunur.

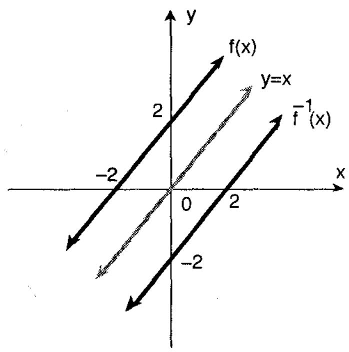
UYARI :

Bir fonksiyon ile tersi y = x doğrusuna göre simetriktir.



ÖRNEK **$f(x) = x + 2$ ile $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduklarını gösteriniz.**

ÇÖZÜM



$f(x) = y = x + 2 \Rightarrow x = y + 2$

$\Rightarrow y = x - 2$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = x - 2$ dir.

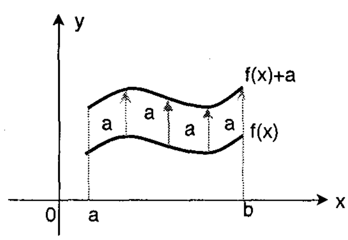
ÖTELEMELER

$y = f(x)$ fonksiyonun grafiği verilsin.

$a \in R^{+}$ olmak üzere

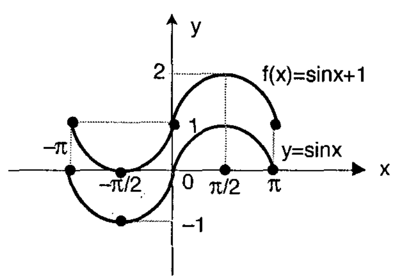
A) Y EKSENİ ÜZERİNDE ÖTELEMELER

1. $y = f(x) + a$ nın grafiği çizilirken $f(x)$ in grafiği, y ekseninin pozitif yönünde a birim yukarı doğru ötelenir.



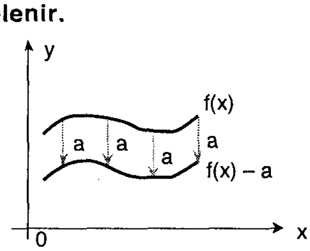
ÖRNEK **$f : [-\pi, \pi] \to [-1,1]$, $f(x) = \sin x + 1$ in grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM



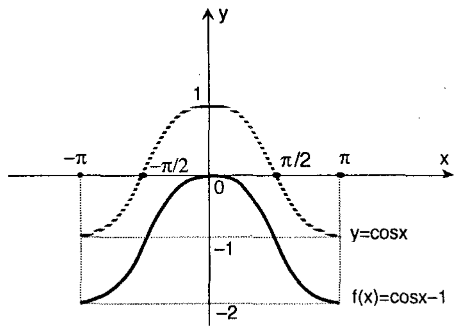
$y = \sin x$ fonksiyonunun grafiği y ekseninin pozitif yönünde +1 birim ötelenir.

2) $y = f(x) - a$ grafiği çizilirken $f(x)$ in grafiği y ekseninin negatif yönünde a birim aşağı doğru ötelenir.



ÖRNEK $f : [-\pi, \pi] \to [-1,1]$, $f(x) = \cos x - 1$ **fonksiyonun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM



y = cosx fonksiyonunun grafiği y ekseninin negatif yönünde +1 birim aşağı doğru ötelenir.

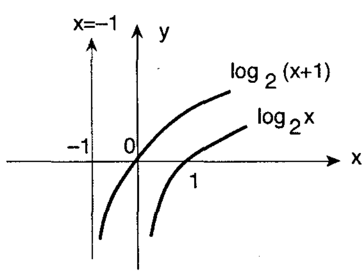
B) X EKSENİ ÜZERİNDE ÖTELEMELER

f(x) fonksiyonun grafiği verilsin. $a \in R^+$ olmak üzere ;

1) f(x + a) fonksiyonunun grafiği çizilirken f(x) in grafiği x ekseni yönünde sola doğru a birim ötelenir.

ÖRNEK $f(x) = \log_2(x + 1)$ **fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM



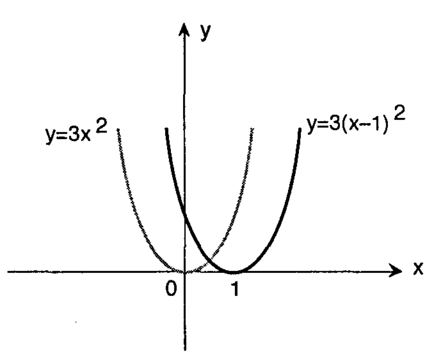
Önce $y = \log_2 x$ fonksiyonunun grafiği çizilir.

Sonra grafik x ekseni yönünde 1 birim sola ötelenir.

2) f(x − a) fonksiyonunun grafiği çizilirken f(x) in grafiği sağa doğru a birim ötelenir.

ÖRNEK $f(x) = 3(x - 1)^2$ **nin grafiğini çiziniz.**

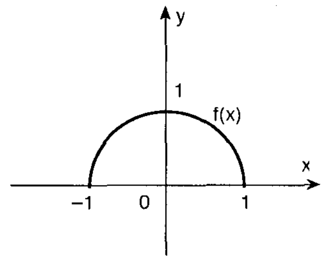
ÇÖZÜM



Önce $y = 3x^2$ fonksiyonunun grafiği çizilir.

Sonra grafik x ekseni yönünde sağa doğru 1 birim ötelenir.

ÖRNEK



f(x) fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. **Buna göre**

a) – f(x) b) f(x + 1)

c) f(x) + 1 d) f(x) – 2

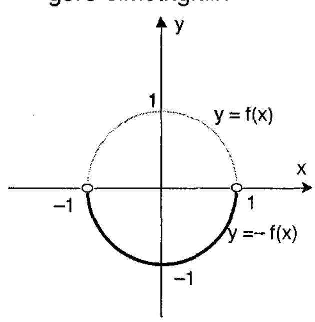
e) f(x – 2)

fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

ÇÖZÜM

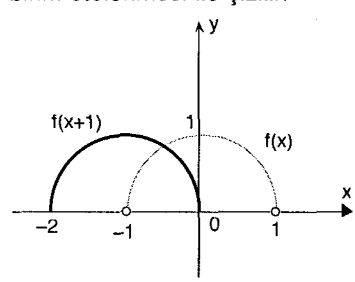
a) – f(x) in grafiği :

–f(x) in grafiği f(x) in x eksenine göre simetriğidir.



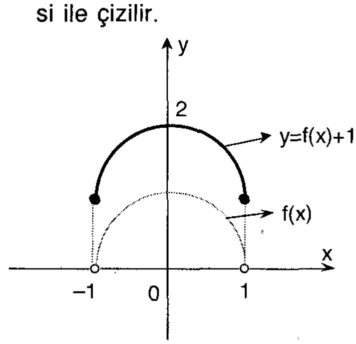
b) f(x + 1) in grafiği :

f(x) in x eksenin yönünde sola doğru 1 birim ötelenmesi ile çizilir.



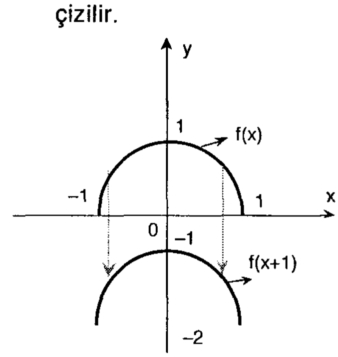
c) f(x) + 1 in grafiği ;

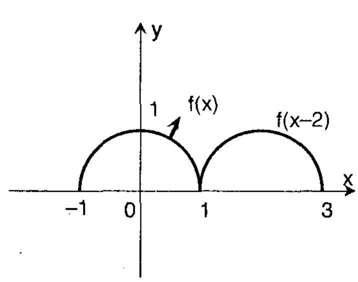
f(x) in grafiğinin y eksenin pozitif yönünde (yukarı) 1 birim ötelenmesi ile çizilir.



d) f(x) – 2 nin grafiği :

f(x) in grafiğinin y ekseninin negatif yönünde 2 birim aşağı ötelenmesi ile çizilir.





e) f(x – 2) nin grafiği ;

f(x) in grafiğinin x ekseni yönünde 2 birim sağa doğru ötelenmesi ile çizilir.

ÇÖZÜMLÜ TEST – 1

1. A ve B kümelerinin eleman sayıları sırasıyla 4 ve 5'tir. **A dan B'ye kaç tane bire bir olmayan fonksiyon tanımlanabilir?**

A) 625 B) 595 C) 540
D) 505 E) 490

ÇÖZÜM

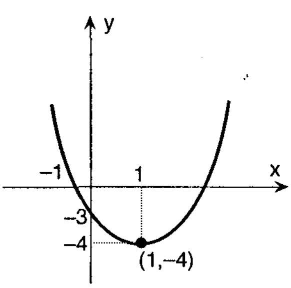
A dan B ye birebir fonksiyon sayısı ;
$P(5,4) = 5.4.3 = 120$ dir.
A dan B'ye fonksiyon sayısı ise;
$s(B)^{s(A)} = 5^4 = 625$ dir. O halde A dan B ye birebir olmayan fonksiyon sayısı ;
$625 - 120 = 505$ tanedir.

YANIT "D"

2. **$f : R \to R$, $f(x) = x^2 - 2x - 3$ fonksiyonun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $[-1, +\infty)$ B) $(-\infty, 1]$ C) $[-4, +\infty)$
D) $[4, +\infty)$ E) $(-\infty, 4)$

ÇÖZÜM



f(x) in grafiği yukarıdaki gibidir.
$\forall x \in R$ için , $f(x) \geq -4$ olduğundan
$f(IR)$ = Görüntü kümesi = $[-4, +\infty)$ olur.

YANIT "C"

3. $y = f(x)$ fonksiyonunun tanım aralığı $[1, 5)$ ise, **$y = f\left(\frac{x}{3} + 2\right)$ fonksiyonunun tanım aralığında kaç tane tamsayı vardır?**

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

ÇÖZÜM

$y = f\left(\frac{x}{3} + 2\right)$ için $\frac{x}{3} + 2 = a$ olsun.
$x \in [1, 5)$ ise $a \in [1, 5)$ olmalıdır.
$1 \leq a < 5$
$1 \leq \frac{x}{3} + 2 < 5$
$-1 \leq \frac{x}{3} < 3$
$-3 \leq x < 9$ olur.
Bu aralıkta 12 tamsayı vardır.

YANIT "C"

4. $f : A \to B$, $f(x) = \dfrac{3x}{3 - 4x}$ fonksiyonu için **$f^{-1}(-3)$ sayısı kaçtır?**

A) 1 B) –1 C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

ÇÖZÜM

$f^{-1}(-3) = a \Leftrightarrow f(a) = -3$ olur.
$\dfrac{3a}{3 - 4a} = -3$
$3a = -9 + 12a$
$-9a = -9$
$a = 1$ ise
$f^{-1}(-3) = 1$ bulunur.

YANIT "A"

5. $f(x-2) = \dfrac{x+1}{2x-3}$ ve $(fof)(m) = \dfrac{4}{3}$ **ise m kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

$f(x-2) = \dfrac{x+1}{2x-3} \Rightarrow g^{-1}(x) = (x-2)^{-1} = x+2$

f(x – 2) de x yerine x + 2 yazılırsa,

$f(x+2-2) = \dfrac{x+2+1}{2(x+2)-3} \Rightarrow f(x) = \dfrac{x+3}{2x+1}$

olur.

$$(fof)(x) = f(f(x)) = \dfrac{\dfrac{x+3}{2x+1}+3}{2\cdot\dfrac{x+3}{2x+1}+1}$$

$$\dfrac{\dfrac{7x+6}{2x+1}}{\dfrac{2x+6+2x+1}{2x+1}} = \dfrac{7x+6}{4x+7}$$

$\Rightarrow (fof)(x) = \dfrac{7x+6}{4x+7}$ olur.

$(fof)(m) = \dfrac{7m+6}{4m+7} = \dfrac{4}{3}$

$21m + 18 = 16m + 28$

$5m = 10 \Rightarrow m = 2$ bulunur.

YANIT "B"

6. A → B, y = f(x) fonksiyonu için

$f(x+2) = \dfrac{3x-6}{2x-3}$ ise

f(5) + (fof) (2) değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) –4 B) –3 C) –2 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM

f(5) için $f(x+2) = \dfrac{3x-6}{2x-3}$ te, x yerine 3 yazalım.

$f(3+2) = \dfrac{3.3-6}{2.3-3} \Rightarrow f(5) = 1$ olur.

(fof) (2) = f(f(2)) dir.

x = 0 için $f(0+2) = \dfrac{3.0-6}{2.0-3}$

f(2) = 2 olur.

f(f(2)) = f(2) = 2 bulunur. O halde,

f(5) + (fof) (2) = 1 + 2 = 3

YANIT "E"

7. R de tanımlı f ve g fonksiyonları birebir ve örtendir.

$f(-2) = 3$ ve $g^{-1}(3) = 4$ ise

$(f^{-1}og)^{-1}$ (–2) değeri kaçtır?

A) –3 B) –2 C) 2 D) 3 E) 4

ÇÖZÜM

$(fog)^{-1}(x) = (g^{-1} o f^{-1})(x)$ olduğundan,

$(f^{-1} o g)^{-1}(-2) = (g^{-1} o f)(-2)$

$= g^{-1}(f(-2))$

$= g^{-1}(3) = 4$ bulunur.

YANIT "E"

8. R → R ye f(x) = mx + n ve

$g(x) = x^2 - 2x + 2$ fonksiyonları veriliyor.

(gof) (x) = $x^2 + 1$ ise n kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

ÇÖZÜM

(gof) (x) = g(f(x))

$\Rightarrow (mx+n)^2 - 2(mx+n) + 2 = x^2 + 1$

$\Rightarrow m^2x^2 + 2mnx + n^2 - 2mx - 2n + 2 = x^2 + 1$

$m^2x^2 + x(2mn-2m) + n^2 - 2n + 2 = x^2 + 1$

$\Rightarrow m^2x^2 + n^2 - 2n + 2 = x^2 + 1$

Polinomların eşitliğine göre

$m^2 = 1 \Rightarrow m = \mp 1$

$n^2 - 2n + 2 = 1$

$(n-1)^2 = 0$

n = 1 bulunur.

YANIT "D"

9. f : R → R, $f(x) = \sqrt[3]{2x+1} + 2a - 9$ ve

$f^{-1}(2) = 13$ ise a kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

$f^{-1}(2) = 13 \Rightarrow f(13) = 2$ dir.

$f(x) = \sqrt[3]{2x+1} + 2a - 9$

$f(13) = \sqrt[3]{2.13+1} + 2a - 9 = 2$

$3 + 2a - 9 = 2$

$2a = 8 \Rightarrow a = 4$ bulunur.

YANIT "D"

10. $x \neq -4$, $a \neq +2$ olmak üzere

$f(x) = \dfrac{(a-2)x}{x+a^2}$ fonksiyonunda $\mathbf{f^{-1}(x) = f(x)}$

ise a kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) $-\frac{1}{2}$ E) −1

ÇÖZÜM

$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{-dx+b}{cx-a}$ olduğundan

$f(x) = \dfrac{(a-2)x}{x+a^2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{-a^2x}{x-(a-2)}$

$\dfrac{(a-2)x}{x+a^2} = \dfrac{-a^2x}{x-a+2}$

$a - 2 = -a^2$

$a^2 - a - 2 = 0$

−2 1

$a_1 = 2 \quad a_2 = -1$

$a \neq 2$ olduğundan $a = -1$ olur.

YANIT "E"

11. $f(x+1) = f(x) + \dfrac{1}{11}$ dir.

f(0) = 4 ise f(77) kaçtır?

A) 13 B) 12 C) 11 D) 10 E) 9

ÇÖZÜM

$f(x+1) = f(x) + \dfrac{1}{11}$

$f(x) = f(x+1) - \dfrac{1}{11}$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = f(1) - \dfrac{1}{11}$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = f(2) - \dfrac{1}{11}$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = f(3) - \dfrac{1}{11}$

$\vdots$

$x = 76 \quad f(76) = f(77) - \dfrac{1}{11}$

$f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(76) = f(1) + f(2) + \ldots$

$f(76) + f(77) - 77 \cdot \dfrac{1}{11}$

$f(0) = f(77) - 7$

$4 + 7 = f(77)$

$f(77) = 11$ olur.

YANIT "C"

12. $2f(1-x) - 3f(x-1) = -x^2 + 2x - 2$

ise f(−3) sayısı kaçtır?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

ÇÖZÜM

$2f(1-x) - 3f(x-1) = -x^2 + 2x - 2$

$x = 4$ için $2f(-3) - 3f(3) = -16 + 8 - 2$

$2f(-3) - 3f(3) = -10$ .... ①

$x = -2$ için $2f(3) - 3f(-3) = -4 - 4 - 2$

$2f(3) - 3f(-3) = -10$ .... ②

① ve ② den

$2 \,/\, 2f(-3) - 3.f(3) = -10$

$3 \,/\, -3f(-3) + 2.f(3) = -10$

$4f(-3) - 6f(3) = -20$

$+\;-9f(-3) + 6f(3) = -30$

$-5f(-3) = -50$

$f(-3) = 10$ bulunur.

YANIT "C"

13. $x \neq y \neq 0$, $f: R^2 \to R$,

$f(x, y) = x^{x-y} - y^{x+y}$ ise **f(−2, −2) kaçtır?**

A) 15 B) 16 C) $\frac{15}{13}$ D) $\frac{16}{15}$ E) $\frac{15}{16}$

ÇÖZÜM

$f(-2, -2) = (-2)^{-2+2} - (-2)^{-2-2}$

$= (-2)^{\circ} - 2^{-4}$

$= 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$ bulunur.

YANIT "E"

14. $f: R^3 \to R^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3,\ 5x_2 - x_3)$

olduğuna göre, f(1, 0, 2) neye eşittir?

A) (3, −2) B) (−3, 2) C) (2, 3)

D) (1,0) E) (2,5)

ÇÖZÜM

$f(1, 0, 2) = (1 + 0 + 2,\ 5.0 - 2)$

$f(1, 0, 2) = (3, -2)$ bulunur.

YANIT "A"

15. $f: R \to R$

$f(x) = \sum_{a=1}^{2}\left(\sum_{b=1}^{2}(ax-b)\right)$ fonksiyonu veriliyor.

$f^{-1}(0)$ kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM

$f(x) = \sum_{a=1}^{2}(ax-1+ax-2)$

$f(x) = \sum_{a=1}^{2}(2ax-3) = 2x-3+4x-3$

$f(x) = 6x-6$ olur.

$f(x) = 6x-6 \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x+6}{6}$

$f^{-1}(0) = \dfrac{0+6}{6} = 1$ bulunur.

YANIT "C"

16. $f(x.y) = f(x) + f(y)$ ve $f(2) = 4$ ise **$f(16)$ kaçtır?**

A) 4 B) 12 C) 16 D) 20 E) 24

ÇÖZÜM

$f(x.y) = f(x) + f(y)$ özelliğini sağlayan f fonksiyonuna logaritma fonksiyonu denir.
$f(x) = \log_a x$ olsun.

$f(2) = \log_a 2 = 4 \Rightarrow a^4 = 2 \Rightarrow a = \sqrt[4]{2}$ olur.
$f(16) = \log_a 16 = \log_{\sqrt[4]{2}} 2^4 = 4.4.\log_2 2$

$= 4.4.1$

$=16$ bulunur.

YANIT "C"

17. $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun x eksenine göre simetriği **g(x) olduğuna göre g(3) kaçtır?**

A) – 5 B) – 10 C) – 15 D) –20 E) –25

ÇÖZÜM

f(x) fonksiyonunun x eksenine göre simetriği,
$g(x) = -f(x) = -x^2 - 1$ dir.
$g(x) = -x^2 - 1 \Rightarrow g(3) = -3^2 - 1 = -10$ olur.

YANIT "B"

18. $f(x) = x^2 + 2x + 4$ fonksiyonunun A(1,1) noktasına göre simetriği g(x) olduğuna göre, (fog) (1) kaçtır?

A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

ÇÖZÜM

$f(x) = x^2 + 2x + 4$ fonksiyonun

A(1, 1) noktasına göre simetriği g(x) ise

$2 - g(x) = (2-x)^2 + 2(2-x) + 4$ olur.

$g(x) = -(2-x)^2 - 2(2-x) - 2$ bulunur.

$(fog)(1) = f(g(1))$ dir.

$g(1) = -(2-1)^2 - 2.(2-1) - 2 = -5$ olur.

$f(-5) = (-5)^2 + 2.(-5) + 4 = 19$

$(fog)(1) = 19$ bulunur.

YANIT "B"

19. $f(x) = x + |x|$ fonksiyonu veriliyor. **f fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?**

A) $x > 0$ ise $f(x) = 2x$

B) (fof) (2) = 8

C) f fonksiyonu ne çift ne de tektir.

D) $f(-x) = -x + |x|$

E) f(x) fonksiyonunun grafiği orijine göre simetriktir.

ÇÖZÜM

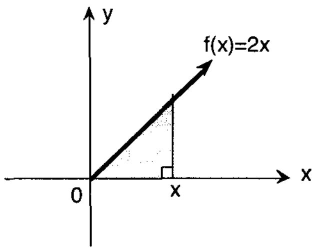
$f(-x) = -f(x)$ ise f tektir.

f(x) tek fonksiyon ise, grafiği orijine göre simetrik olur.

$f(-x) = -x + |-x| = -x + |x|$ olduğundan f tek değildir. Bu yüzden grafiği orijine göre simetrik olamaz.

YANIT "E"

20.

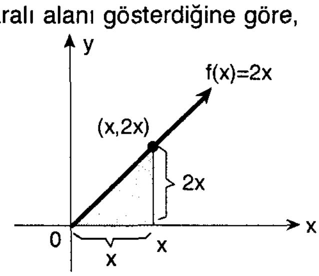


$R^+ \cup \{0\} \to R$, $f(x) = 2x$ fonksiyonu ile $g(x)$ fonksiyonları veriliyor. $g(x)$ = (x değiştikçe oluşan dik üçgenin alanı, $x \geq 0$) biçiminde tanımlı ve **(gof) (x)=16 ise x kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

ÇÖZÜM

g(x) taralı alanı gösterdiğine göre,



$g(x) = \dfrac{x\,.\,2x}{2} = x^2$ olur.

$(gof)(x) = 16$

$g(\,f(x)\,) = 16$

$(2x)^2 = 16$

$4x^2 = 16$

$x^2 = 4$

$x = \mp 2$ ise $x \neq -2$

$x = 2$ bulunur.

YANIT "B"

21. $f(x) = \sqrt{9 - x^2} - \sqrt{4x + x^2}$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) [2, 3] B) [0, 3] C) [1, 2)
D) (2, 3] E) [1, 3)

ÇÖZÜM

$9 - x^2 \geq 0$ ve $4x + x^2 \geq 0$ olmalıdır.

$9 - x^2 = 0$ $\qquad$ $4x + x^2 = 0$

$x = \mp 3$ $\qquad$ $x(4 + x) = 0$

$x = 0\,,\ x = -4$

x	−∞ −4	−4 −3	−3 0	0 3	3 +∞
$9 - x^2$	−	−	+	+	−
$4x + x^2$	+	−	−	+	+

$0 \leq x \leq 3$

En geniş tanım kümesi = [0, 3] aralığıdır.

YANIT "B"

22. $x\,|x - 3| = 10$ **denkleminin çözüm kümesi nedir?**

A) { 2 } B) { 5, 2} C) { 5 }
D) { 5, −2} E) {−2}

ÇÖZÜM

$x \geq 3$ ise $x(x - 3) = 10$

$x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0$

$x_1 = 5,\ x_2 \neq -2$

$x < 3$ ise

$x.(3 - x) = 10$

$-x^2 + 3x - 10 = 0$

$x^2 - 3x + 10 = 0$

$\Delta = 9 - 4\,.\,1.10 = -36$

$\Delta < 0$ dır. Reel kök yoktur.

O halde denklemin çözüm kümesi Ç= {5} dir.

YANIT "C"

23. $Sgn(x^2 + 2x + a) = 1$
denkleminin çözüm kümesinin reel sayılar kümesine eşit olması için a hangi aralıkta olmalıdır?

A) $a > 1$ B) $a > \frac{1}{2}$ C) $a < -\frac{1}{2}$
D) $a < -1$ E) $a < 0$

ÇÖZÜM

$\forall x \in R$ için $x^2 + 2x + a > 0$ olmalıdır. Bu nedenle

$x^2 + 2x + a = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\varnothing$ ve $\Delta < 0$ olmalıdır.

$4 - 4.1.a < 0$

$-4a < -2$

$a > \frac{1}{2}$

YANIT "B"

24. $y > 0$ olmak üzere
$|x - 2y| = 3y$ denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı 16 ise, y kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

ÇÖZÜM

$x - 2y \geq 0 \Rightarrow \quad x - 2y = 3y$
$\qquad x = 5y$ olur.

$x - 2y < 0 \Rightarrow \quad x - 2y = -3y$
$\qquad x = -y$ olur.

$x_1 = 5y, \quad x_2 = -y, \quad x_1 + x_2 = 5y - y = 16 \Rightarrow y = 4$

YANIT "B"

25. $[\![\frac{1}{2x+1}]\!] = 1$ **denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $[-1, 2)$ B) $[0, 1)$ C) $[1, 4)$
D) $(-\frac{1}{4}, 0]$ E) $[\frac{1}{4}, 1)$

ÇÖZÜM

$[\![x]\!] = a \Rightarrow a \leq x < a + 1$ idi.

$[\![\frac{1}{2x+1}]\!] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{2x+1} < 2$ dir.

$\frac{1}{2} < 2x + 1 \leq 1$

$-\frac{1}{2} < 2x \leq 0$

$-\frac{1}{4} < x \leq 0 \qquad x \in (-\frac{1}{4}, 0]$ bulunur.

YANIT "D"

26. $f(x) = 5\sin(8x + 12) - \cos^5(3x - 4)$ fonksiyonu veriliyor.
f fonksiyonunun periyodu kaçtır?

A) 24π B) $\frac{5\pi}{8}$ C) π
D) 2π E) $\frac{5\pi}{24}$

ÇÖZÜM

$5\sin(8x + 12)$ nin periyodu, $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$,

$\cos^5(3x - 4)$ ün periyodu, $\frac{2\pi}{3}$,

f(x)'in periyodu O.K.E.K $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$ dir.

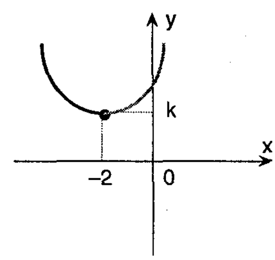
$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$ sayıların OKEK'i payların o.k.e.k'i ile paydaların O.B.E.B'nin bölümüne eşittir. Yani

$$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)_{o.k.e.k} = \frac{(2\pi, \pi)\ o.k.e.k.}{(3,4)\ .o.b.e.b}$$

$$= \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ bulunur.}$$

YANIT "C"

27.



Şekilde,
$f : (-\infty, -2] \to [k, +\infty)$, $f(x) = ax^2 + bx + c$
fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
Buna göre $f^{-1}(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{\frac{x - k}{a}}$

B) $f^{-1}(x) = -2 + \sqrt{\frac{x - k}{a}}$

C) $f^{-1}(x) = k + \sqrt{\frac{x - 2}{a}}$

D) $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{\frac{x - a}{k}}$

E) $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{\frac{x}{k}}$

ÇÖZÜM

Tepe noktası (r, k) olan parabollerin denklemleri,

$y = a(x - r)^2 + k$ olduğundan şekildeki parabolün denklemi,

$y = a(x + 2)^2 + k$ olur.

Ters fonksiyonu bulmak için y yerine x, x yerine y yazalım.

$x = a(y + 2)^2 + k$

$\Rightarrow (y+2)^2 = \dfrac{x-k}{a}$

$y + 2 = \mp\sqrt{\dfrac{x-k}{a}}$

$y = -2 \mp \sqrt{\dfrac{x-k}{a}}$ bulunur.

$f^{-1} : [k, +\infty) \rightarrow (-\infty, -2]$ dir.

$f^{-1}(x) \leq -2$ olacağından

$f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{\dfrac{x-k}{a}}$ bulunur.

YANIT "A"

28. $f(x) = \dfrac{\cos x + 1}{\sin x}$ **fonksiyonunun periyodu nedir?**

A) 3π B) $\dfrac{2\pi}{3}$ C) 2π D) $\dfrac{3\pi}{2}$ E) π

ÇÖZÜM

$$f(x) = \frac{2\cos^2\frac{x}{2} - 1 + 1}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}$$

$$f(x) = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \cot\frac{x}{2}$$

$y = \cot(ax + b)$ nin periyodu ;

$T = \dfrac{\pi}{a}$ olduğundan,

f(x)'in periyodu $T = \dfrac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$ bulunur.

YANIT "C"

29. $y = 3^{\frac{3+x}{3-\ln x}}$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?**

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{R}^+ - \{e\}$ C) $\mathbb{R} - \{e\}$
D) $\mathbb{R}^+ - \{\frac{1}{e^3}\}$ E) $\mathbb{R}^+ - \{e^3\}$

ÇÖZÜM

$y = a^{f(x)}$, $a > 0$ ve $a \neq 1$ biçimindeki fonksiyonların tanım kümesi f(x)'in tanım kümesidir.

O halde,

$y = \dfrac{3+x}{3-\ln x}$ fonksiyonunun tanım kümesi bulmamız yeterlidir.

$y = \dfrac{3+x}{3-\ln x}$ fonksiyonunun tanımlı olması için;

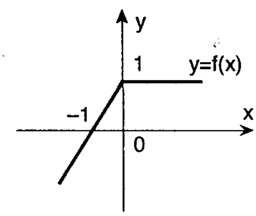
$3 - \ln x \neq 0$ ve $x > 0$ olmalıdır.

$\ln x \neq 3 \Rightarrow x \neq e^3$ bulunur.

Fonksiyonunun tanım kümesi ise $\mathbb{R}^+ - \{e^3\}$ olur.

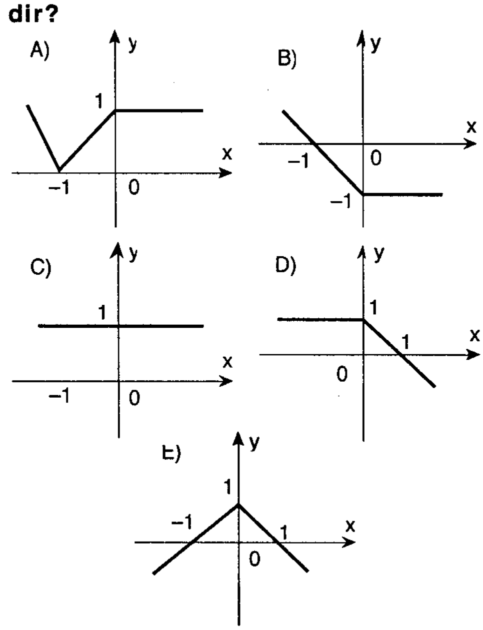
YANIT "E"

30.



y = f(x) fonksiyonunun grafiği şekilde verilmiştir.

Buna göre y = f(|x|) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



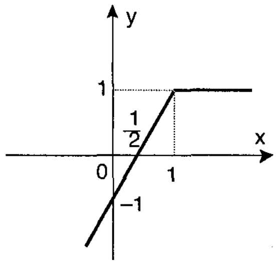
ÇÖZÜM

$x \geq 0$ ise $f(|x|) = f(x)$ grafiğinin aynısı ,
$x < 0$ ise $f(|x|) = f(-x)$ grafiği f(x) in y ekseninin sağ tarafındaki parçasının aynısı (y eksenine göre simetriğidir.)
O halde y= f(|x|) fonksiyonunun grafiği C seçeneğindeki grafiktir.

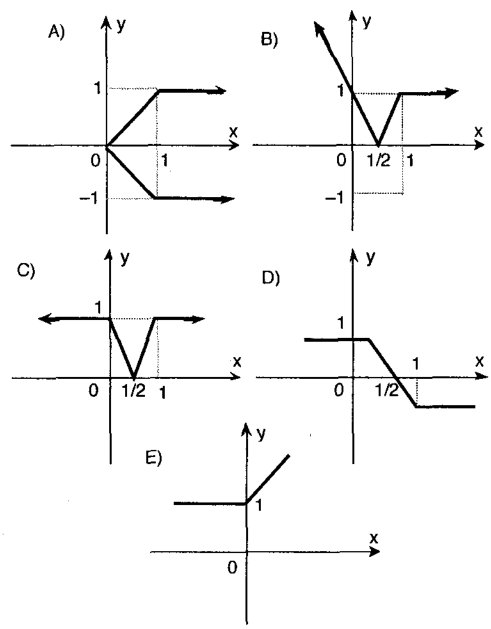
YANIT "C"

ÇÖZÜMLÜ TEST – 2

1. Şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre lyl = f(x) bağıntısının grafiği hangisidir?



ÇÖZÜM

$$|y| = f(x) \Rightarrow y = \begin{cases} f(x) & x \geq \frac{1}{2} \text{ ise} \\ -f(x) & x < \frac{1}{2} \text{ ise} \end{cases}$$

bu koşullarda aradığımız grafik $x \geq \frac{1}{2}$ için f(x) in aynısı, $x < \frac{1}{2}$ için f(x) in grafiğinin x eksenine göre simetriğidir.

YANIT "B"

2. $A = \{ (x, y) \mid |x| \leq 2 ,\ [\![y]\!] = 1 \ \ x, y \in R\}$

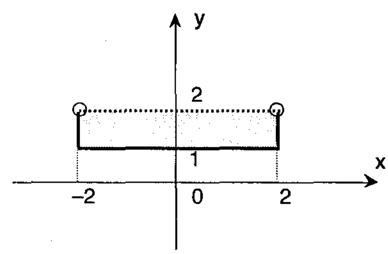
Analitik düzlemde A kümesinin grafiği çizildiğinde elde edilen şeklin alanı kaç birim karedir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

ÇÖZÜM

$|x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

$[\![y]\!] = 1 \Rightarrow 1 \leq y < 2$

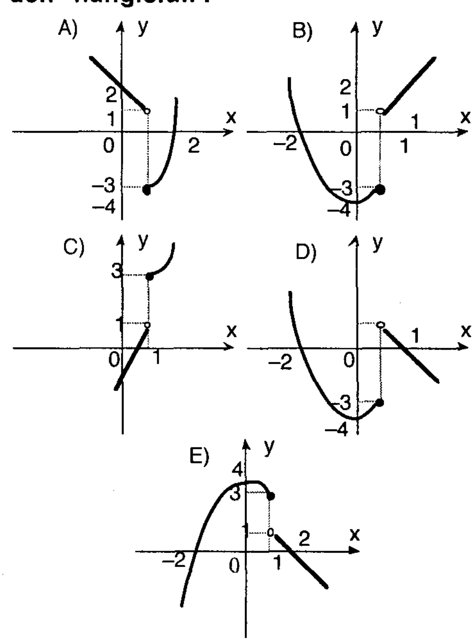


Bağıntının grafiği, bir kenarı 4 br, diğer kenarı 1 br. olan dikdörtgensel bölge olur. Bu bölgenin alanı ise 4.1 = 4 br^2 dir.

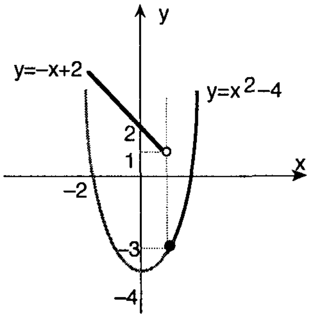
YANIT "B"

3. $f : R \to R,\quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & , \ x \geq 1 \text{ ise} \\ -x + 2 & , \ x < 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



ÇÖZÜM



$x < 1$ için ;
$f(x) = -x + 2$
$x \geq 1$ için ;
$f(x) = x^2 - 4$
fonksiyonlarının grafikleri çizilir.

YANIT "A"

4. $f(x) = \llbracket x + 1 \rrbracket$ ve
$g(x) = \text{sgn} \llbracket x \rrbracket$ fonksiyonları veriliyor.
$(fog)\left(\log_{\frac{1}{2}} e\right)$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM

$\log_{\frac{1}{2}} e = -\log_2 e$ dir. ($e \cong 2{,}718 \ldots$)

$2 < e < 4 \Rightarrow 1 < \log_2 e < 2$

$\Rightarrow -2 < -\log_2 e < -1$ dir.

$(fog)\left(\log_{\frac{1}{2}} e\right) = (fog)(-\log_2 e)$

$(fog)\left(\log_{\frac{1}{2}} e\right) = f(g(-\log_2 e)) = f(\text{sgn}\llbracket -\log_2 e\rrbracket)$

$(fog)\left(\log_{\frac{1}{2}} e\right) = f(\text{sgn}(-2)) = f(-1)$

$(fog)\left(\log_{\frac{1}{2}} e\right) = \llbracket -1 + 1\rrbracket = 0$ bulunur.

YANIT "B"

5. $x \in R$ olmak üzere;

$f(2^x) = |\llbracket 2^{x+2} - e\rrbracket| \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)$ **kaçtır?**

A) – 1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM

$2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = 2^{-1} \Rightarrow x = -1$ olur.

$f(2^x) = |\llbracket 2^{x+2} - e\rrbracket|$ eşitliğinde $x = -1$ alınırsa,

$f(2^{-1}) = |\llbracket 2^{-1+2} - e\rrbracket|$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = |\llbracket 2 - e\rrbracket|$

$= |-1| = 1$ bulunur.

YANIT "C"

6. $(x + 2)^{\llbracket x\rrbracket} = 1$ **denkleminin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $[0, 1) \cup \{-1\}$ B) $[0,1) \cup \{-1, -3\}$
C) $[0,1)$ D) $\{0, 1\}$
E) $\varnothing$

ÇÖZÜM

$[\,f(x)\,]^{g(x)} = 1$ olması için,

a) $f(x) \neq 0$ için $g(x) = 0$,

b) $f(x) = 1$ için $g(x) \neq 0$

c) $f(x) = -1$ için $g(x)$ çift olmalıdır.

O halde;

a) $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$ ve
$\llbracket x\rrbracket = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1$ dir. $Ç = [0, 1)$

b) $x + 2 = +1 \Rightarrow x = -1$ ise
$\llbracket x\rrbracket \neq 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1$ olmamalıdır.
$x = -1$ ise $\llbracket -1\rrbracket = -1$ olur.
$Ç = \{-1\}$

c) $x + 2 = -1 \Rightarrow x = -3$ ve
$\llbracket x\rrbracket$ çift olmalıdır.
$x = -3$ için $\llbracket -3\rrbracket = 3$ olduğundan $\llbracket x\rrbracket$ tektir.
O halde; $Ç = Ç_1 \cup Ç_2$
$Ç = [0, 1) \cup \{-1\}$ bulunur.

YANIT "A"

7. $f : R \to R$, $f(x) = \text{sgn}x$ ve
$g : R \to R$, $g(x) = x^2 - 4x - 12$
ise (gof) (x) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(gof)(x) = \begin{cases} 1 & , x < -2 \text{ veya } x > 6 \text{ ise} \\ 0 & , x = -2 \text{ veya } x = 6 \text{ ise} \\ -1 & , -2 < x < 6 \text{ ise} \end{cases}$

B) $(gof)(x) = \begin{cases} -15 & , x \geq 0 \text{ ise} \\ -7 & , x < 0 \text{ ise} \end{cases}$

C) $(gof)(x) = \begin{cases} -15 & , x > 0 \text{ ise} \\ -12 & , x = 0 \text{ ise} \\ -7 & , x < 0 \text{ ise} \end{cases}$

D) $(gof)(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \text{ ise} \\ 0 & , x = 0 \text{ ise} \\ -1 & , x < 0 \text{ ise} \end{cases}$

E) $(gof)(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x \leq 0 \end{cases}$

ÇÖZÜM

$(gof)(x) = g(f(x))$ dir.

$g(\text{sgn}(x)) = \begin{cases} g(1) & , x > 0 \text{ ise} \\ g(0) & , x = 0 \text{ ise} \\ g(-1) & , x < 0 \text{ ise} \end{cases}$

$(gof)(x) = \begin{cases} -15 & , x > 0 \text{ ise} \\ -12 & , x = 0 \text{ ise} \\ -7 & , x < 0 \text{ ise} \end{cases}$

YANIT "C"

8. $f(x) = \dfrac{1}{\text{sgn}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right) + 1}$ **fonksiyonun en geniş tanım kümesi nedir?**

A) $R - [-3, 4)$ B) $R - \{-3, 4\}$
C) $\{-3, 4\}$ D) $\{-4, 3\}$
E) $[-4, 3)$

ÇÖZÜM

$\text{sgn}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right) + 1 = 0$ için tanımsızdır.

$\Rightarrow \text{sgn}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right) = -1 \quad \Rightarrow \dfrac{x-4}{x+3} < 0$

x		−3		4	
$\dfrac{x-4}{x+3}$	+	‖	−	○	+

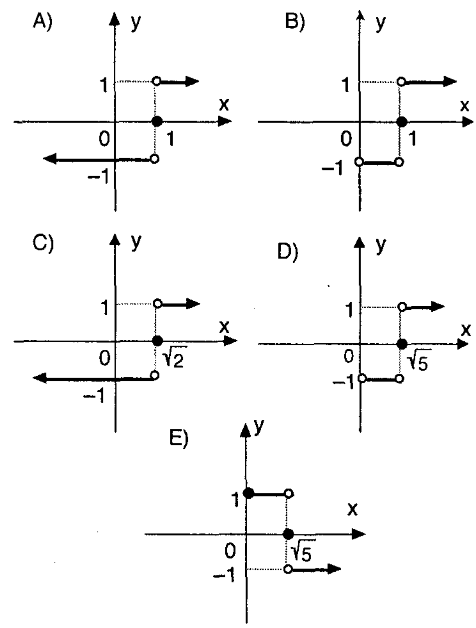
$-3 \leq x < 4$ için fonksiyon tanımsızdır.

($x = -3$ paydayı sıfır yaptığı için fonksiyonu tanımsız yapar) O halde;

$R - [-3, 4)$ fonksiyonun en geniş tanım kümesidir.

YANIT "A"

9. **$f(x) = \text{sgn}(\log_{\sqrt{5}} x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



ÇÖZÜM

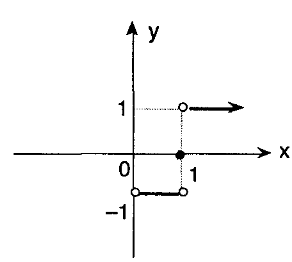
$y = \log_{\sqrt{5}} x$ fonksiyonunun tanımlı olması için $x > 0$ olmalıdır.

a) $0 < x < 1 \Rightarrow y = \log_{\sqrt{5}} x < 0$ dır.
$\text{sgn}(\log_{\sqrt{5}} x) = -1$ olur.

b) $x = 1 \Rightarrow y = \log_{\sqrt{5}} 1 = 0$ dır.
$\text{sgn}(\log_{\sqrt{5}} 1) = 0$ olur.

c) $1 < x \Rightarrow y = \log_{\sqrt{5}} x > 0$ dır.
$\text{sgn}(\log_{\sqrt{5}} x) = 1$ olur.

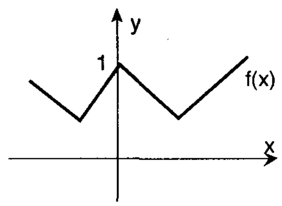
O halde grafik,



biçimindedir.

YANIT "B"

10.



Şekilde R → R, y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **Buna göre;**
$|x^2-5| = sgn[f(x)]$ denkleminin köklerinin toplamı kaçtır?

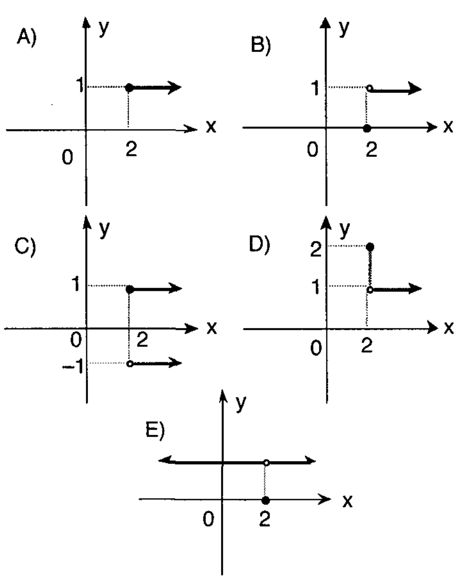
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

ÇÖZÜM

$\forall x \in R$ için, f(x) > 0 olduğu grafikten anlaşılmaktadır. O halde ;
sgn f(x) = 1 dir.
$|x^2 - 5| = 1$
$x^2 - 5 = 1$ veya $x^2 - 5 = -1$ olur.
$x^2 = 6$ $x^2 = 4$
$x = \mp\sqrt{6}$ $x = \mp 2$
kökler toplamı 0 olur.

YANIT "A"

11. f : [2, +∞) → R
$f(x) = 2 - sgn(\sqrt{x^2-4})$ **fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



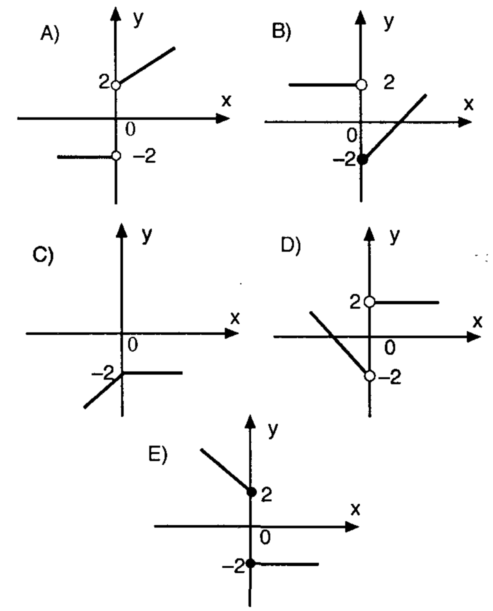
ÇÖZÜM

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 0 = 2 \ , & x = 2 \text{ ise} \\ 2 - 1 = 1 \ , & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$$

buna göre grafik D seçeneğidir.

YANIT "D"

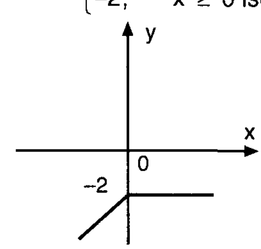
12. R → R, f(x) = x − |x|, g(x) = x − 2 fonksiyonları veriliyor. **(gof) (x) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



ÇÖZÜM

(gof) (x) = g[x − |x|] = x − |x| −2 olur.
x < 0 için, y = x − (−x) −2
y = 2x − 2
x ≥ 0 için, y = x − x − 2
y = −2 dir.

$$(gof)(x) = \begin{cases} 2x-2, & x < 0 \text{ ise} \\ -2, & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$



YANIT "C"

13. **⟦ x + ⟦x⟧ ⟧ = 8 denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) [4, 5) B) [3, 4) C) [2, 3)
D) (1, 2] E) [3, 5)

ÇÖZÜM

$[\![x]\!] + [\![x]\!] = 8$

$2\,[\![x]\!] = 8$

$[\![x]\!] = 4$

$4 \le x < 5$

$x \in [4, 5)$ bulunur.

YANIT "A"

14. $[\![-x]\!] + [\![-x-2]\!] = 16$ **denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $[-10, -9)$ B) $[-10, 8)$ C) $[-10, 11)$
D) $(-10, -9]$ E) $[-10, 11]$

ÇÖZÜM

$[\![-x]\!] + [\![-x-2]\!] = 16$ ise

$[\![-x]\!] + [\![-x]\!] - 2 = 16$

$2\,[\![-x]\!] = 18$

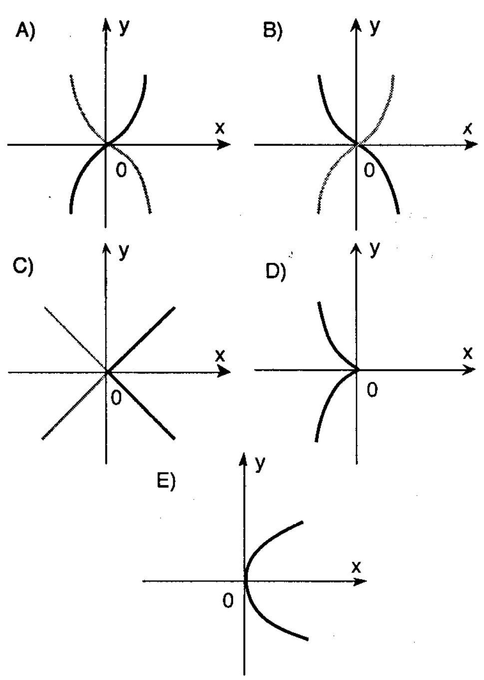
$[\![-x]\!] = 9$

$9 \le -x < 10$

$-10 < x \le -9$

YANIT "D"

15. $R \to R$, $f(x) = |x| \cdot x$ **fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



ÇÖZÜM

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot x = x^2 & x \ge 0 \text{ ise} \\ (-x) \cdot x = -x^2 & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

buna göre grafik A seçeneğindeki gibi olur.

YANIT "A"

16. Aşağıdakilerden kaç tanesi çift fonksiyondur?

1. $y = \sin x$
2. $y = 5\cos x$
3. $y = \tan x + \cot x$
4. $|x| \le 2$ için $y = \sqrt{4 - x^2}$
5. $x^3 + x^2$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

A) $\sin(-x) = -\sin x$ olduğundan $y = \sin x$ tek fonksiyondur.

B) $5\cos(-x) = 5\cos x$ olduğundan, $y = 5\cos x$ çift fonksiyondur.

C) $y = \tan(-x) + \cot(-x) = -(\tan x + \cot x)$ olduğundan, fonksiyon tektir.

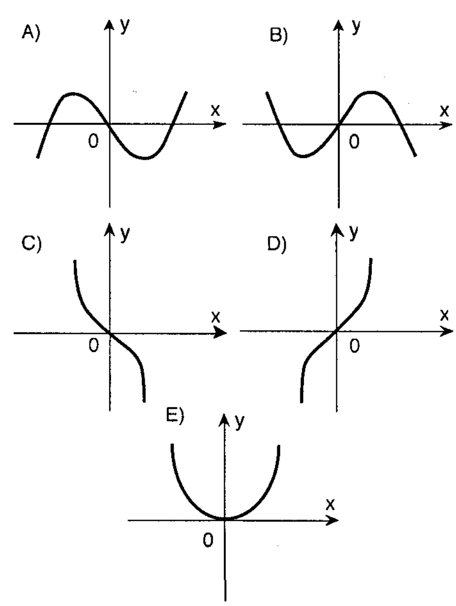
D) $\sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2}$ fonksiyon çiftdir.

E) $(-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2$ fonksiyon ne tek ne de çiftir.

O halde 2 fonksiyon çiftdir.

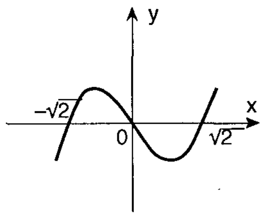
YANIT "B"

17. $f : R \to R$ ye tanımlı bir fonksiyon olup grafiği orijine göre simetriktir. $f(x) = 2x^3 - 4x + f(-x)$ olduğuna göre **f(x) in grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?**



ÇÖZÜM

Grafiği orijine göre simetrik olan fonksiyon tek fonksiyondur. Tek fonksiyon tanımından



$f(-x) = -f(x)$ idi.

$f(x) = 2x^3 - 4x - f(x)$

$2.f(x) = 2x^3 - 4x$

$f(x) = x^3 - 2x$

$x = 0$ için $y = 0$

$y = 0$ için $x^3 - 2x = 0$

$x(x^2 - 2) = 0$

$x = 0,\ x = \pm\sqrt{2}$

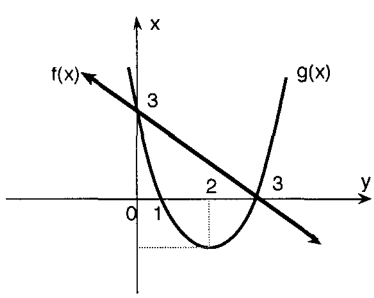
$x \to -\infty$ için $y \to -\infty$

$x \to +\infty$ için $y \to +\infty$ olur.

Grafik üçüncü bölgeden başlayıp birinci bölgede devam eder. x eksenini 0, $-\sqrt{2}$ ve $\sqrt{2}$ de keser.

YANIT "A"

18.



R → R ye tanımlı f ve g fonksiyonlarının grafikleri şekilde verilmiştir.

(gof)(x) = 0 denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {0, 1} B) {0, 2} C) {1,2}
D) {0, 3} E) {1, 3}

ÇÖZÜM

$f(x) = -x + 3$ ve $g(x) = a(x - 3)(x - 1)$

$g(x) = a(x^2 - 4x + 3)$

$g(0) = 3$ olduğundan

$g(0) = 3a = 3$

$a = 1$ ve

$g(x) = x^2 - 4x + 3$ olur.

$(gof)(x) = g(f(x))$

$\Rightarrow g(-x + 3)$

$\Rightarrow (-x + 3)^2 - 4(-x + 3) + 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x$

$(gof)(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0$

$x(x - 2) = 0$

$x = 0$ ve $x = 2$ bulunur.

Ç = {0, 2} dir.

YANIT "B"

19. $\sin\left(\arcsin\frac{12}{13} + \arcsin\frac{3}{5}\right)$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{65}{73}$ B) $\frac{63}{65}$ C) $\frac{5}{17}$ D) $\frac{63}{165}$ E) $\frac{15}{173}$

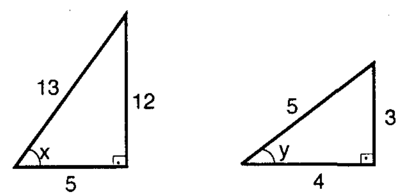
ÇÖZÜM

$\sin\left(\arcsin\frac{12}{13} + \arcsin\frac{3}{5}\right)$ eşitliğinde,

$\arcsin\frac{12}{13} = x$ ve $\arcsin\frac{3}{5} = y$ olsun.

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\sin x = \frac{12}{13}$ ve $\sin y = \frac{3}{5}$ dir.



$\cos x = \frac{5}{13}$ $\cos y = \frac{4}{5}$

$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

$= \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5}$

$= \frac{48}{65} + \frac{15}{65} = \frac{63}{65}$ bulunur.

YANIT "B"

20. Aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

1. $\arcsin 0 = 0$
2. $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$
3. $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$
4. $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$
5. $\text{arccot}(-\sqrt{3}) = \frac{-\pi}{6}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

1. $\arcsin 0 = x \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ doğrudur.
2. $\arccos 0 = x \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ doğrudur.
3. $\arcsin 1 = x \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ doğrudur.
4. $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = x \Leftrightarrow \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$

   $x = -\frac{\pi}{6}$ doğrudur.
5. $\operatorname{arccot}(-\sqrt{3}) = x \Leftrightarrow \cot x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow$

   $x = -\frac{\pi}{6}$ doğrudur.

YANIT "E"

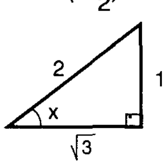
21. $x = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ ise $\tan x$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C) 1

D) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ E) $-\sqrt{3}$

ÇÖZÜM

$\arcsin(-\frac{1}{2}) = x \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x < 0$



$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ bulunur.

YANIT "D"

22. tan (arcsinx) ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ B) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ C) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

D) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ E) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

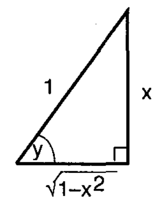
ÇÖZÜM

tan (arcsinx)

ifadesinde

$\arcsin x = y \Leftrightarrow \sin y = x$

$\tan(\arcsin x) = \tan y$



$\tan y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ bulunur.

YANIT "B"

23. $f(x) = \sqrt{\arcsin x}$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[0, 1]$ B) $[-1, 1]$ C) $[0, \frac{\pi}{2}]$

D) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ E) $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

ÇÖZÜM

$f(x) = \sqrt{\arcsin x}$ fonksiyonunun tanımlı olması için,

$\arcsin x \geq 0$ olmalıdır.

$\arcsin x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$ olur. O halde,

Tanım kümesi $[0,1]$ dir.

YANIT "A"

24. $x = t + 1$ ve

$y = 3t + 4$ parametrik denklemleri ile verilen fonksiyonun **x ve y eksenleri ile oluşturduğu bölgenin alanı kaç birim karedir?**

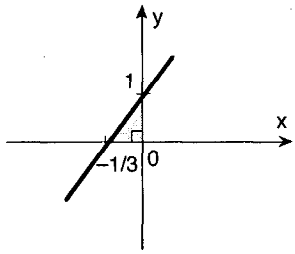
A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{6}$

ÇÖZÜM

$x = t + 1 \Rightarrow t = x - 1$

$y = 3t + 4 \Rightarrow y = 3(x-1) + 4$

$y = 3x + 1$ olur.



$x = 0 \Rightarrow y = 1$

$y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ bulunur.

Alanı istenilen bölge, dik kenar uzunlukları 1 br ve $\frac{1}{3}$ birim olan dik üçgendir. O halde

$A = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ br^2 bulunur.

YANIT "E"

25. $x = t^3 + 9$ ve

$y = \frac{2}{3}t^3 + 2$ **parametrik denklemleri ile verilen doğrunun y eksenini kestiği noktanın ordinatı kaçtır?**

A) –1 B) – 2 C) – 3 D) – 4 E) – 5

ÇÖZÜM

$x = t^3 + 9 \quad \Rightarrow t^3 = x - 9$ olur.

$y = \frac{2}{3}t^3 + 2$

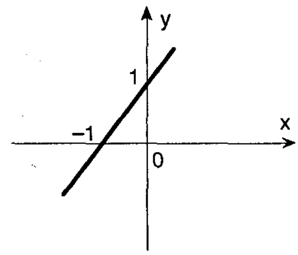
$y = \frac{2}{3}(x - 9) + 2$

$y = \frac{2}{3}x - 6 + 2$

$y = \frac{2}{3}x - 4$ bulunur. Doğrunun y eksenini kestiği noktanın ordinatı ise x = 0 için y=–4 bulunur.

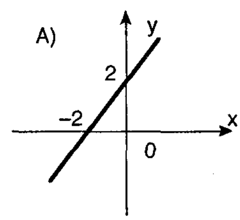
YANIT "D"

26.

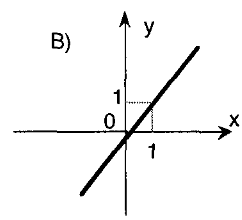


Şekilde y = f(x) fonksiyonun grafiği verilmiştir. **Buna göre y = f(x–1) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

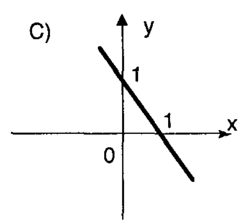
A)



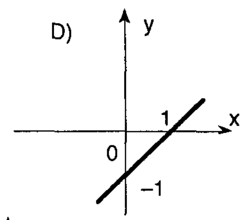
B)



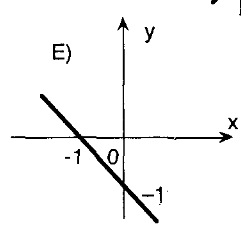
C)



D)



E)



ÇÖZÜM

y = f(x – 1) grafiği f(x) in grafiğinin x ekseninin pozitif yönünde 1 birim sağa ötelenmesi ile bulunur. Grafik B seçeneğindeki olur.

YANIT "B"

27. $f : R \to R$ ye bir fonksiyon olup periyodu 7 dir. **Buna göre** $g(x) = f\left(\frac{4x+1}{5}\right) + 21$ **biçiminde tanımlı g(x) fonksiyonunun periyodu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 140 B) $\frac{1}{7}$ C) 7 D) $\frac{4}{35}$ E) $\frac{35}{4}$

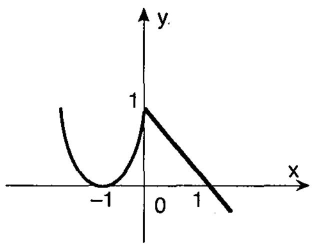
ÇÖZÜM

f fonksiyonunun periyodu T ise, $f\left(\dfrac{ax+b}{c}\right)$ fonksiyonunun periyodu, $(T') = \dfrac{T}{\frac{a}{c}}$ olduğundan

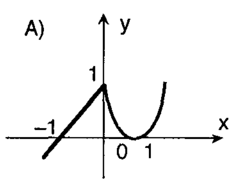
$T' = \dfrac{7}{\frac{4}{5}} = \dfrac{35}{4}$ bulunur.

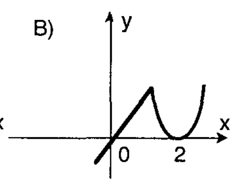
YANIT "E"

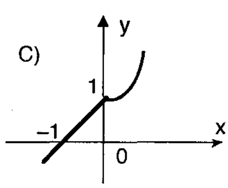
28.

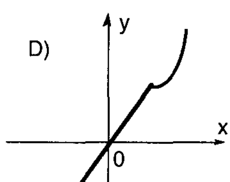


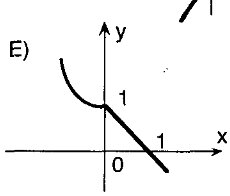
Şekildeki grafik y = f(x) fonksiyonuna aittir. **Buna göre, y = f(–x – 1) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A)


B)


C)


D)


E)


ÇÖZÜM

y = f(x) fonksiyonunun grafiğinin y eksenine göre simetriği y = f(-x) fonksiyonunun grafiğidir. y = f(x) fonsiyonunun grafiğinin, x ekseninin pozitif yönünde 1 br ötelenmesi ile elde edilen grafik de y = f(–x –1) fonksiyonunun grafiğidir.

YANIT "B"

29. $f(x) = \cos^4 \dfrac{2x}{3} + \sin \dfrac{x}{2}$ **fonksiyonunun periyodu nedir?**

A) 6π B) 12π C) π D) 3π E) $\dfrac{\pi}{12}$

ÇÖZÜM

$\cos^4 \dfrac{2x}{3}$ ün periyodu, $T_1 = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3\pi}{2}$ ve

$\sin \dfrac{x}{2}$ nin periyodu, $T_2 = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ dir.

f(x) 'in periyodu, $(T_1\,,\,T_2)_{okek}$ dir.

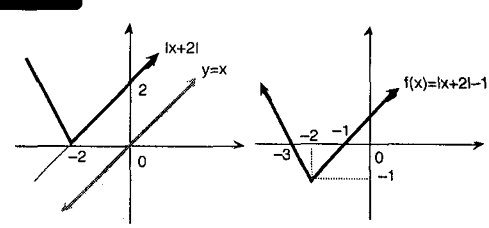
$$\left(\frac{3\pi}{2}, 4\pi\right)_{okek} = \frac{(3\pi\,,4\pi)_{okek}}{(2\,,\,1)_{obeb}} = \frac{12\pi}{1} = 12\pi \text{ bulunur.}$$

YANIT "B"

30. $f : R \to R$ $f(x) = |x + 2| - 1$ **fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?**

A) $[-1, +\infty)$ B) $[1, +\infty)$ C) R
D) $(-1, 2)$ E) $[0, 3)$

ÇÖZÜM



f in görüntü kümesi $[-1, +\infty)$ aralığıdır.

YANIT "A"

ÇÖZÜMLÜ TEST – 3

1. $n \in N$ olmak üzere $x_0 = 1$, $x_1 = a$ ve $x_{n+1} = x \cdot x_n - n \cdot x_{n-1}$ biçiminde tanımlı x_n **fonksiyonu için x_3 kaçtır?**

A) a^2 B) $a^2 - 1$ C) $a^3 - a$
D) $a^3 - 2a$ E) $a^3 - 3a$

ÇÖZÜM

$n = 1$ için, $x_2 = x \cdot x_1 - 1 \cdot x_0$

$x_2 = ax - 1$

$n = 2$ için, $x_3 = x \cdot x_2 - 2 \cdot x_1$

$x_3 = x(ax - 1) - 2a$

$x_3 = ax^2 - x - 2a$

Şimdi x'i bulalım.

$n = 0$ için, $x_1 = x \cdot x_0 - 0$

$a = x \cdot 1 \Rightarrow x = a$ dır.

$x_3 = a \cdot a^2 - a - 2a$

$x_3 = a^3 - 3a$ bulunur.

YANIT "E"

2. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ ve $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 4$ ise **$f(2x)$ kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

ÇÖZÜM

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} + x \text{ ise}$$

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ dir.}$$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 4$$

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

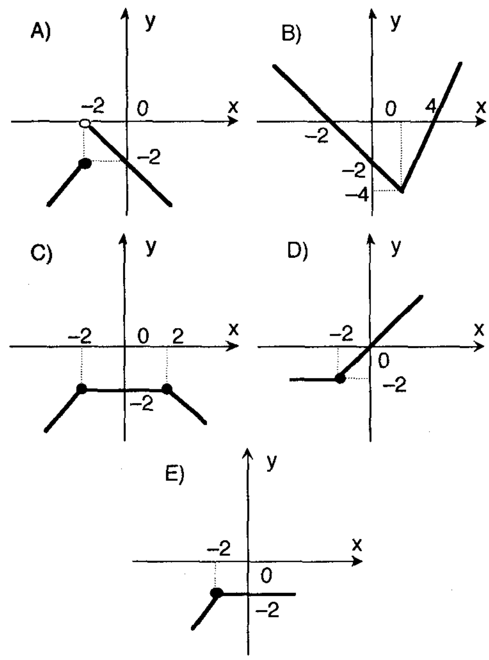
$$(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ dir.}$$

$x = 1$ ise

$$f(2x) = f(2) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \text{ bulunur.}$$

YANIT "E"

3. $f : R \to R$, $f(x) = \text{Min}(-2, x)$ **fonksiyonunun grafiği, aşağıdakilerden hangisidir?**



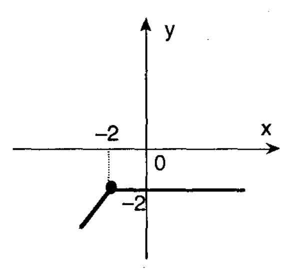
ÇÖZÜM

$f : R \to R$, $f(x) = \min(-2, x)$ ise

$x = -4$ için $f(-4) = -4$

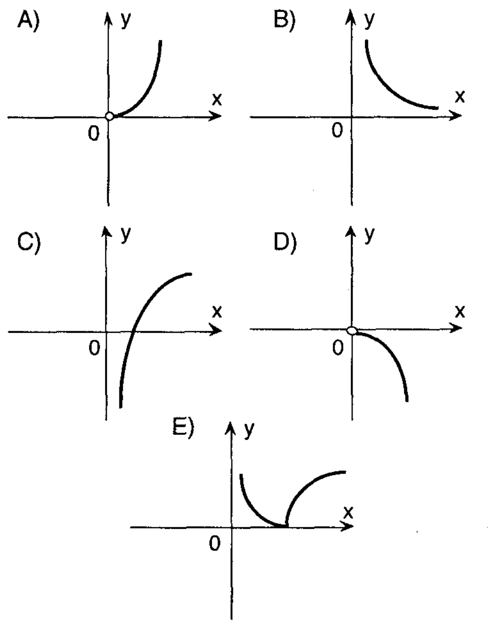
$x = -3$ için $f(-3) = -3$

$$\left.\begin{array}{l} x = -2 \text{ için } f(-2) = -2 \\ x = -1 \text{ için } f(-1) = -2 \\ x = 0 \text{ için } f(0) = -2 \\ x = 1 \text{ için } f(1) = -2 \\ x = \frac{9}{2} \text{ için } f\left(\frac{9}{2}\right) = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x \geq -2 \text{ için} \\ f(x) = -2 \text{ olur} \end{array}$$



YANIT "E"

4. $\forall$ x, y $\in R^+$ için $f(x.y) = f(x) + f(y)$ ise **f fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi** **<u>olabilir</u>?**

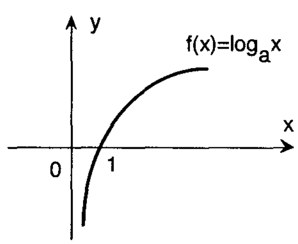


ÇÖZÜM

$\forall$ x, y $\in R^+$ için $f(xy) = f(x) + f(y)$ ise

$f(x) = \log_a x$ biçiminde logaritmik fonksiyondur.

O halde grafiği,



olabilir.

YANIT "C"

5. $f : R \to R$, $f(x) = [\![\frac{2}{3} + 2sgn(x-1)]\!]$ **fonksiyonunun görüntü kümesi, aşağıdakilerden hangisidir?**

A) {–3, 0, 3} B) {–2, 0, 2} C) {–1, 0, 1}
D) Z E) $\varnothing$

ÇÖZÜM

$$f(x) = [\![\frac{2}{3} + 2sgn(x-1)]\!] = [\![\frac{2}{3}]\!] + 2sgn(x-1)$$
$$= 0 + 2sgn(x-1) \text{ ise}$$

$f(x) = 2sgn(x-1)$ dir.

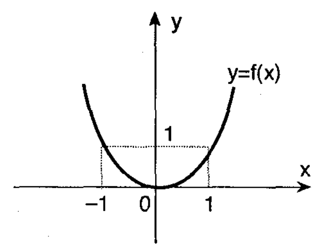
$$f(x) = \begin{cases} 2 \;, & x > 1 \text{ ise} \\ 0 \;, & x = 1 \text{ ise} \\ -2 \;, & x < 1 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{olur.}$$

O halde görüntü kümesi ;

$f(A) = \{-2, 0, 2\}$ bulunur.

YANIT "B"

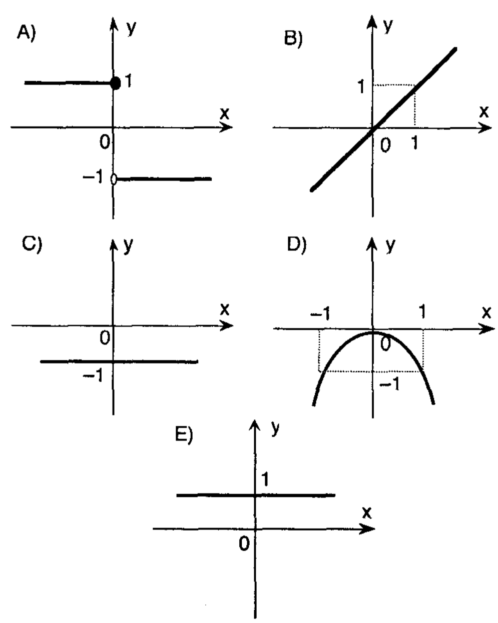
6.



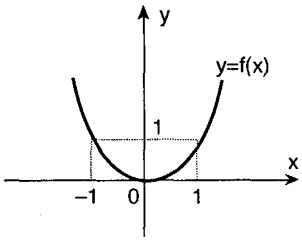
$f : R \to R$ ye $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir.

$2 . g(x) + f(x) = f(-x) + 2$

koşulunu sağlayan g(x) fonksiyonunun grafiği, aşağıdakilerden hangisidir?



ÇÖZÜM



Grafikten,

$f(1) = 1$

$f(-1) = 1$

$x = 1$ için,

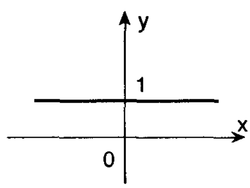
$f(1) = f(-1)$ olduğundan, $f(x) = f(-x)$ olur. O halde f(x) çift fonksiyondur.

$2g(x) + f(x) = f(-x) + 2$

$2g(x) + f(x) = f(x) + 2$

$2g(x) = 2$

$g(x) = 1$ bulunur.



YANIT "E"

7. $f(x) = [\![x-1]\!] + [\![1-x]\!]$ **fonksiyonunun grafiği için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.
B) $y = -x$ doğrusuna göre simetriktir.
C) x – eksenine göre simetriktir.
D) y – eksenine göre simetriktir.
E) Orijine göre simetriktir.

ÇÖZÜM

$f(x) = [\![x-1]\!] + [\![1-x]\!]$

$f(x) = [\![x]\!] - 1 + 1 + [\![-x]\!]$

$f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$ ise

$f(-x) = [\![-x]\!] + [\![x]\!]$ olur.

$f(x) = f(-x)$ olduğundan f(x) çift fonksiyondur ve grafiği y – eksenine göre simetriktir.

YANIT "D"

8. $[\![x]\!]^2 - 5 \,.\, [\![x]\!] + 6 = 0$ **denkleminin çözüm kümesindeki tamsayıların toplamı kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

ÇÖZÜM

$[\![x]\!]^2 - 5[\![x]\!] + 6 = 0$

$[\![x]\!] = t$ diyelim.

$t^2 - 5t + 6 = 0,$

$(t-3)(t-2) = 0$ ise

$t = 3$ ve $t = 2$ bulunur.

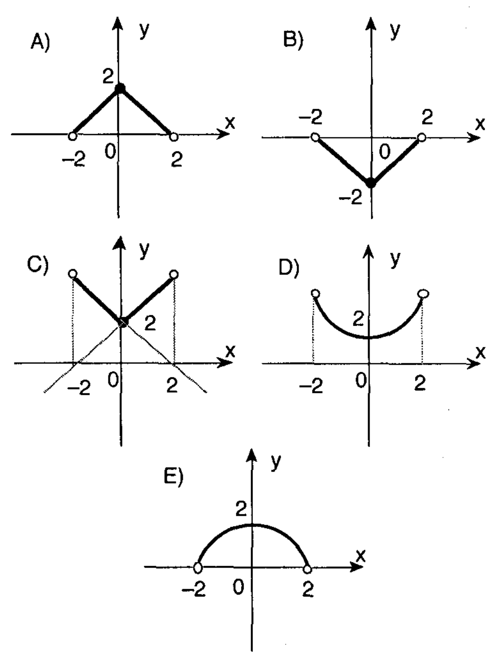
$t = 3 \Rightarrow [\![x]\!] = 3 \Rightarrow 3 \le x < 4$ aralığında sadece 3 tamsayısı vardır.

$t = 2 \Rightarrow [\![x]\!] = 2 \Rightarrow 2 \le x < 3$ aralığında sadece 2 tamsayısı vardır.

O halde, denklemi sağlayan tamsayıların toplamı ; $3 + 2 = 5$ bulunur.

YANIT "D"

9. $f : (-2, 2) \to R,\ f(x) = \dfrac{|x^2-4|}{2-|x|}$ **fonksiyonunun grafiği, aşağıdakilerden hangisidir?**



ÇÖZÜM

$-2 < x < 2$ iken $x^2 - 4 < 0$ dır.

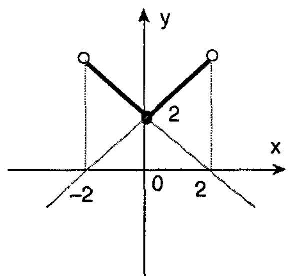
Yani, $|x^2 - 4| = -(x^2 - 4) = 4 - x^2$ dir.

$-2 < x < 0$ iken $|x| = -x$,

$0 \le x < 2$ iken $|x| = x$ dir. O halde;

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4 - x^2}{2 + x} = 2 - x \quad , & -2 < x < 0 \text{ ise} \\ \dfrac{4 - x^2}{2 - x} = 2 + x \quad , & 0 \le x < 2 \text{ ise} \end{cases}$$

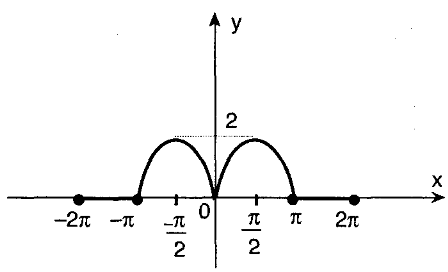
Grafik ise,



biçimindedir.

YANIT "C"

10.



Yukarıdaki grafik, aşağıdaki fonksiyonlardan hangisine aittir?

A) $f(x) = \sin x$ B) $f(x) = \sin|x|$

C) $f(x) = |\sin x|$ D) $f(x) = \sin x + |\sin x|$

E) $f(x) = \sin|x| + |\sin x|$

ÇÖZÜM

$f : [-2\pi, 2\pi] \to R$ ye olduğu grafikte görülmektedir.

1. $-2\pi \le x \le -\pi$ iken $f(x) = 0$ dır.
Bunu verilen fonksiyonlardan
$f(x) = \sin|x| + |\sin x|$ e uygularsak,
$f(x) = \sin(-x) - \sin(-x) = -\sin x + \sin x = 0$ olur.

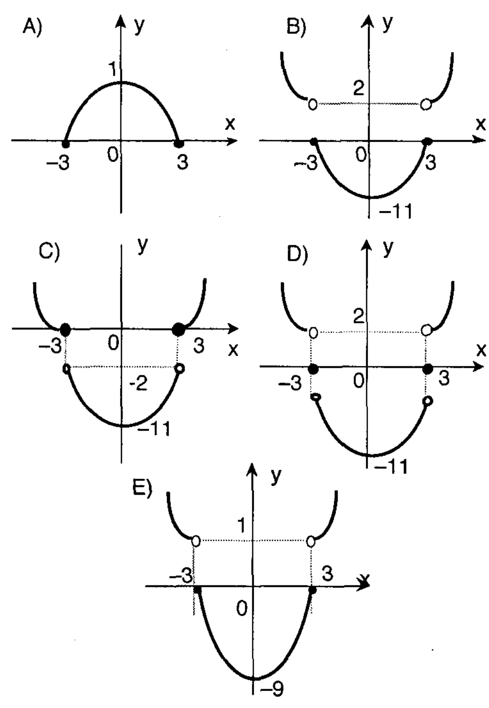
2. $\pi \le x \le 2\pi$ iken $f(x) = 0$ dır.
Bunu verilen fonksiyonlardan
$f(x) = \sin|x| + |\sin x|$ e uygularsak;
$f(x) = \sin x - \sin x = 0$ olur.

3. $-\pi < x < 0$ iken $f(x) > 0$ dır.
Bunu verilen fonksiyonlardan
$f(x) = \sin|x| + |\sin x|$ e uygularsak,
$f(x) = \sin(-x) - \sin x = -2\sin x > 0$ olur.

4. $0 < x < \pi$ iken $f(x) > 0$ dır.
Bunu verilen fonksiyonlardan
$f(x) = \sin|x| + |\sin x|$ e uygularsak,
$f(x) = \sin x + \sin x = 2\sin x > 0$ olur.
O halde aranılan fonksiyon
$f(x) = \sin|x| + |\sin x|$ dir.

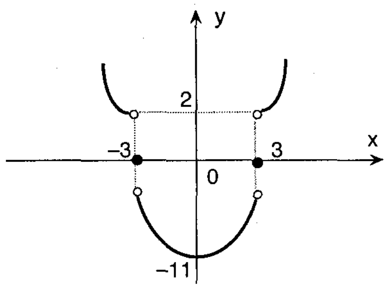
YANIT "E"

11. $f(x) = x^2 - 9 + 2\text{sgn}(x^2 - 9)$ **fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



ÇÖZÜM

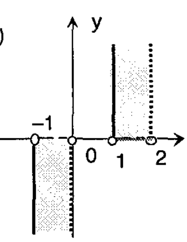
$$f(x)=\begin{cases} x^2-7 & , \ x<-3 \text{ veya } x>3 \text{ ise} \\ 0 & , \ x=-3 \text{ veya } x=3 \text{ ise} \\ x^2-11 & , \ -3<x<3 \text{ ise} \end{cases}$$



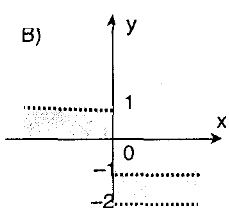
YANIT "D"

12. **sgn y . [[x]] = 1 koşulunu sağlayan (x, y) noktalarının oluşturduğu taralı bölge, aşağıdakilerden hangisidir?**

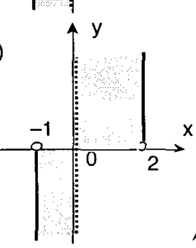
A)



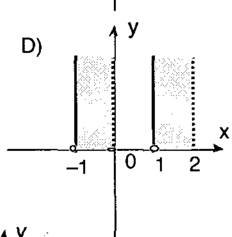
B)



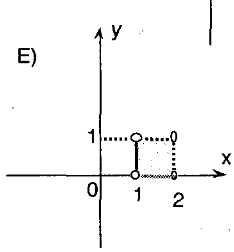
C)



D)



E)



ÇÖZÜM

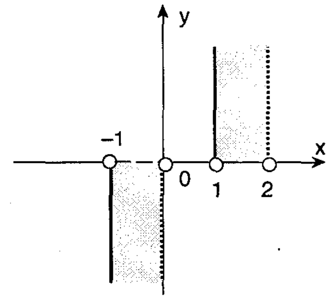
sgny . [[x]] = 1 ise;

$$\text{sgny}=\begin{cases} 1 & , \ y>0 \text{ ise} \\ 0 & , \ y=0 \text{ ise} \\ -1 & , \ y<0 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{dir.}$$

$y>0 \Rightarrow [\![x]\!]=1 \Rightarrow 1\le x<2$

$y<0 \Rightarrow [\![x]\!]=-1 \Rightarrow -1\le x<0$

$y=0 \Rightarrow 0\ne 1$ olamaz.



YANIT "A"

13. $x=t^3-2t^2+2$, $y=t^2-4t-5$ **parametrik denklemleri ile verilen y=f(x) fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

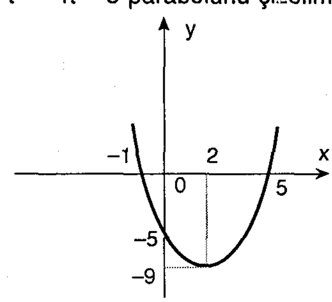
A) $[-9, \infty)$ B) $[-7, \infty)$ C) $[-5, \infty)$
D) $[0, \infty)$ E) $[2, \infty)$

ÇÖZÜM

$x=t^3-2t^2+2$, $y=t^2-4t-5$

y = f(x) fonksiyonunun görüntü kümesi, y'lerin alacağı değerlerin kümesidir.

$y=t^2-4t-5$ parabolünü çizelim.



$r=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{4}{2}=2$

$f(2)=k=4-8-5=-9$

$t=0 \Rightarrow y=-5$

$y=0 \Rightarrow t_1=5$

$t_2=-1$ dir.

y'nin alacağı değerlerin kümesi, $[-9, \infty)$ dur.

YANIT "A"

14. $\left[2\cdot\left(\llbracket \frac{x}{4} \rrbracket !\right)+1\right]^2 = 169$ **denkleminin çözüm kümesi, aşağıdakilerden hangisidir?**

A) [12, 16) B) [6, 10) C) [8, 12)
D) [16, 20) E) [20, 24]

ÇÖZÜM

$\left[2\cdot\left(\llbracket \frac{x}{4} \rrbracket !\right)+1\right]^2 = 169$ eşitliğinde her iki tarafın karekökü alınırsa.

$2\left(\llbracket \frac{x}{4} \rrbracket !\right)+1 = 13$

$2\left(\llbracket \frac{x}{4} \rrbracket !\right) = 12$

$\llbracket \frac{x}{4} \rrbracket ! = 6 = 3!$

$\Rightarrow \llbracket \frac{x}{4} \rrbracket = 3$

$\Rightarrow 3 \le \frac{x}{4} < 4$

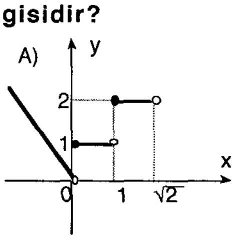
$\Rightarrow 12 \le x < 16$

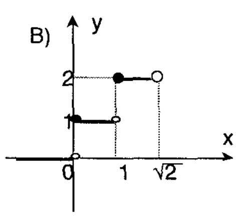
$\Rightarrow x \in [12, 16)$ bulunur.

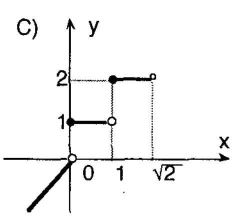
YANIT "A"

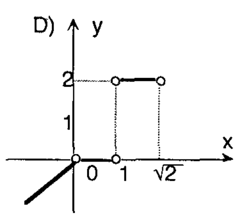
15. $f(x) = \begin{cases} x - |x| & , \ x < 0 \text{ ise} \\ \llbracket x^2 + 1 \rrbracket & , \ 0 \le x < \sqrt{2} \text{ ise} \end{cases}$

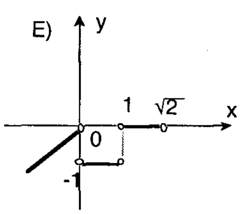
biçiminde tanımlanan f(x) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A)


B)


C)


D)


E)


ÇÖZÜM

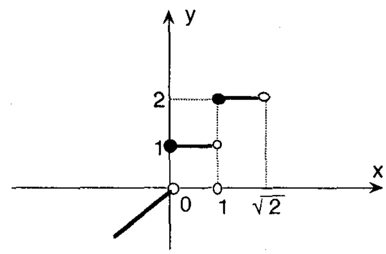
$x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow f(x) = x + x = 2x$

$0 \le x < 1 \Rightarrow 0 \le x^2 < 1 \Rightarrow 1 \le x^2 + 1 \le 2$

$\Rightarrow f(x) = 1$

$1 \le x < \sqrt{2} \Rightarrow 1 \le x^2 < 2 \Rightarrow 2 \le x^2 + 1 < 3$

$\Rightarrow f(x) = 2$



YANIT "C"

16. $\llbracket \frac{3}{2}\cdot \llbracket x \rrbracket \rrbracket = 7$ denkleminin çözüm kümesi **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) [5, 6) B) [4, 5) C) [3, 4)
D) [6, 7) E) [7, 8)

ÇÖZÜM

$\llbracket \frac{3}{2} \llbracket x \rrbracket \rrbracket = 7$

$\Rightarrow 7 \le \frac{3}{2} \llbracket x \rrbracket < 8$

$\Rightarrow \frac{14}{3} \le \llbracket x \rrbracket < \frac{16}{3} \Rightarrow \llbracket x \rrbracket$ tamsayı olacağından,

$\llbracket x \rrbracket = 5 \Rightarrow 5 \le x < 6$

$x \in [5, 6)$ bulunur.

YANIT "A"

17. $\forall x \in R$ için ;

$\llbracket x \rrbracket + \llbracket \frac{3x+1}{3} \rrbracket + \llbracket \frac{3x+2}{3} \rrbracket$ **ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\llbracket 3x + \frac{1}{3} \rrbracket$ B) $\llbracket 3x \rrbracket$ C) $\llbracket x + 3 \rrbracket$

D) $3\llbracket x \rrbracket$ E) $\frac{\llbracket x \rrbracket}{3}$

ÇÖZÜM

$\forall\, x \in R$ için,

$[\![x]\!] + [\![\frac{3x}{3} + \frac{1}{3}]\!] + [\![\frac{3x}{3} + \frac{2}{3}]\!]$

$= [\![x]\!] + [\![x + \frac{1}{3}]\!] + [\![x + \frac{2}{3}]\!]$

$= [\![3x]\!]$ bulunur.

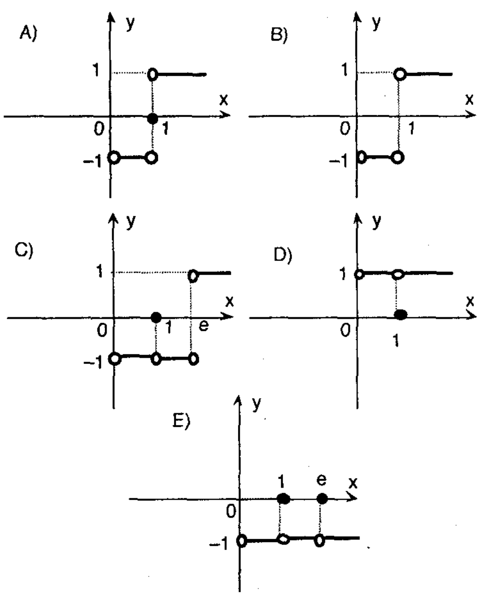
($[\![ax]\!] = [\![x]\!] + [\![x + \frac{1}{a}]\!] + [\![x + \frac{2}{a}]\!] + \ldots +$

$[\![x + \frac{a-1}{a}]\!]$ olduğunu hatırlayınız.)

YANIT "B"

18. $f : R^+ \rightarrow R,\ f(x) = \mathrm{sgn}(\ln x)$

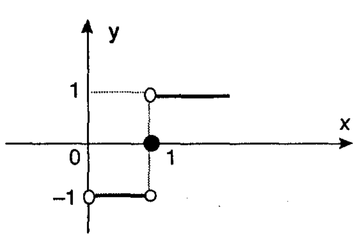
fonksiyonunun grafiği, aşağıdakilerden hangisidir?



ÇÖZÜM

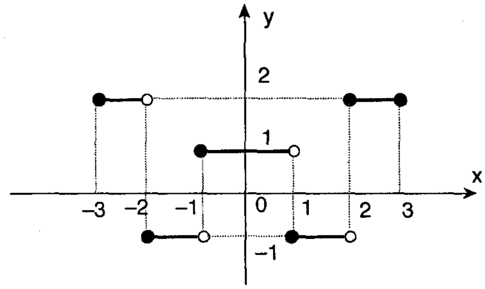
$f : R^+ \rightarrow R,\ f(x) = \mathrm{sgn}(\ln x)$ ise

$$f(x) = \begin{cases} -1 \ , & 0 < x < 1 \quad (\ln x < 0) \text{ ise} \\ 0 \ , & x = 1 \quad (\ln 1 = 0) \text{ ise} \\ 1 \ , & x > 1 \quad (\ln x > 0) \text{ ise} \end{cases} \quad \text{dir.}$$



YANIT "A"

19.



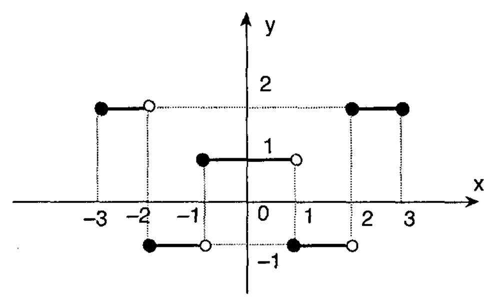
Yukarıda $f : [-3, 3] \rightarrow R$ tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

f(x) fonksiyonu, aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $[\![f(x)]\!] + 1$ B) $f([\![x]\!])$ C) $f(|x|)$

D) $f(\mathrm{sgn}x)$ E) $f([\![x^2]\!])$

ÇÖZÜM



$-3 \le x < -2 \Rightarrow [\![x]\!] = -3 \Rightarrow f([\![x]\!]) = 2$

$-2 \le x < -1 \Rightarrow [\![x]\!] = -2 \Rightarrow f([\![x]\!]) = -1$

$-1 \le x < 0 \Rightarrow [\![x]\!] = -1 \Rightarrow f([\![x]\!]) = 1$

$0 \le x < 1 \Rightarrow [\![x]\!] = 0 \Rightarrow f([\![x]\!]) = 1$

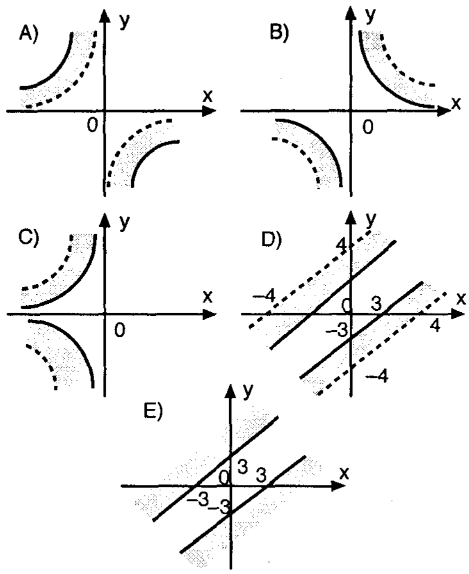
$1 \le x < 2 \Rightarrow [\![x]\!] = 1 \Rightarrow f([\![x]\!]) = -1$

$2 \le x < 3 \Rightarrow [\![x]\!] = 2 \Rightarrow f([\![x]\!]) = 2$

$x = 3 \Rightarrow [\![x]\!] = 3 \Rightarrow f([\![x]\!]) = 3$

YANIT "B"

20. $[\![x \cdot y]\!] = -3$ **bağıntısının grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

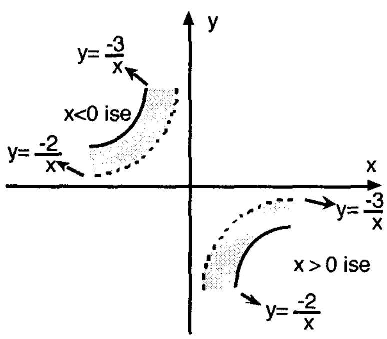


ÇÖZÜM

$[\![xy]\!] = -3 \Rightarrow -3 \le xy < -2$ dir.

$x > 0$ ise $-\dfrac{3}{x} \le y < -\dfrac{2}{x}$

$x < 0$ ise $-\dfrac{3}{x} \ge y > -\dfrac{2}{x}$



YANIT "A"

21. $\forall x \in R$ için,

$f(x) + |f(x)| = 4$ ise $f(x)$ fonksiyonu **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $f(x) = x$ B) $f(x) = 1$ C) $f(x) = -1$
D) $f(x) = 2$ E) $f(x) = 3$

ÇÖZÜM

$f(x) \le 0$ ise $|f(x)| = -f(x)$ olduğundan,

$f(x) - f(x) = 4 \Rightarrow 0 \ne 4$ olamaz.

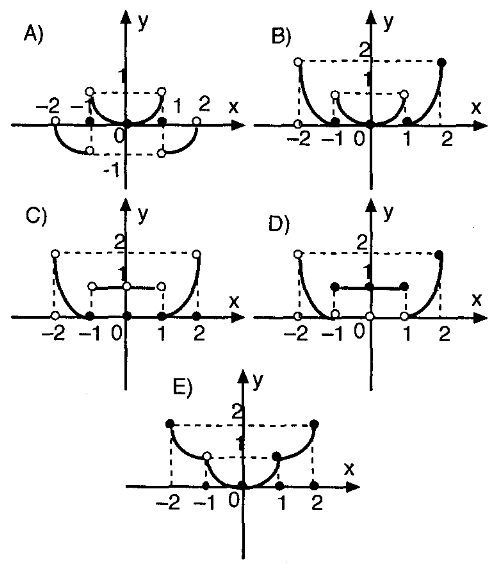
O halde $f(x) + |f(x)| = 4$ koşuluna uyan hiçbir fonksiyon $x \in R$ noktasında sıfırdan küçük veya sıfıra eşit değerler olamaz. Yani $\forall x \in R$ için, $f(x) > 0$ olup $|f(x)| = f(x)$ dir.

$f(x) + |f(x)| = 4 \Leftrightarrow 2f(x) = 4$

$f(x) = 2$ bulunur.

YANIT "D"

22. $(-2, 2] \to R$, $f(x) = x^2 - [\![|x|]\!]$ **biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



ÇÖZÜM

$f(x) = x^2 - [\![|x|]\!]^2$

$f(-x) = (-x)^2 - [\![|-x|]\!]^2$ ($|-x| = x$ dir.)

$f(-x) = x^2 - [\![|x|]\!]^2 \Rightarrow f(x) = f(-x)$

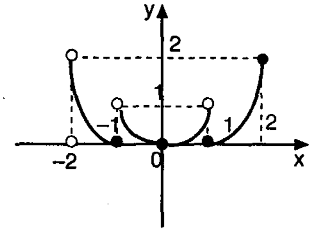
olup, $f(x)$ çift fonksiyondur.

$[0, 2]$ aralığında $f(x)$ in grafiği çizilerek, y eksenine göre simetriği alınır.

$0 \le x < 1 \Rightarrow [\![|x|]\!] = 0 \Rightarrow y = x^2$

$1 \le x < 2 \Rightarrow [\![|x|]\!] = 1 \Rightarrow y = x^2 - 1$

$x = 2 \Rightarrow [\![|2|]\!] = 2 \Rightarrow y = 4 - 2 = 2$



YANIT "B"

23. $x \,.\, [\![x]\!]^{[\![x]\!]} = x$ denkleminin çözüm kümesi, **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $[0, 2]$ B) $[-1, 2)$ C) $[-1, 0) \cup [1, 2)$
D) $[1, 2)$ E) $[0, 1)$

ÇÖZÜM

$x \neq 0$ için $[\![x]\!]^{[\![x]\!]} \Rightarrow x \notin [0, 1)$ dir.
$x \,.\, [\![x]\!]^{[\![x]\!]} = x \Rightarrow [\![x]\!]^{[\![x]\!]} = 1$ olur.
$a \in R$ olmak üzere;
$a^a = 1 \Rightarrow a = 1$ dir. O halde;
$[\![x]\!]^{[\![x]\!]} = 1 \Rightarrow [\![x]\!] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2$ dir.
Yani, $x \in [1, 2)$ dir.

YANIT "D"

24. $f(x) = |x + 1| + 4$ **fonksiyonun en geniş görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

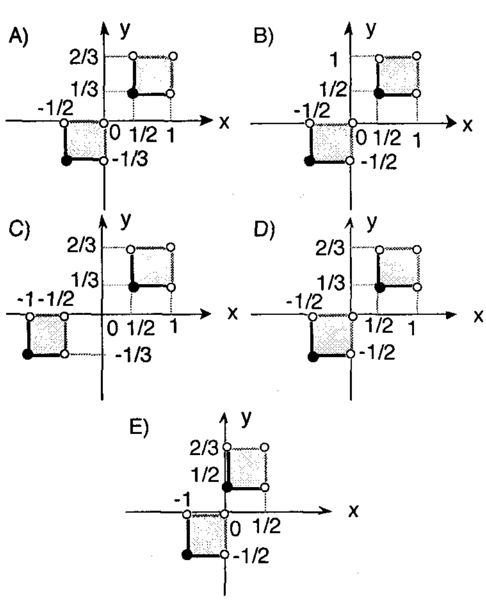
A) $[-1, \infty)$ B) $[0, \infty)$ C) $[2, \infty)$
D) $[3, \infty)$ E) $[4, \infty)$

ÇÖZÜM

$\forall x \in R$ için, $|x + 1| \geq 0$ dır.
O halde, $f(x) = |x + 1| + 4$ *fonksiyonunun* alabileceği en küçük değer, $x = -1$ için 4 tür. Fonksiyonun en geniş görüntü kümesi ise $[4, \infty)$ bulunur.

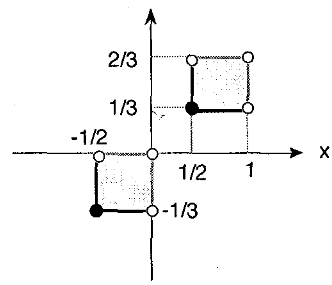
YANIT "E"

25. $[\![2x]\!] \,.\, [\![3y]\!] = 1$ **bağıntısının grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



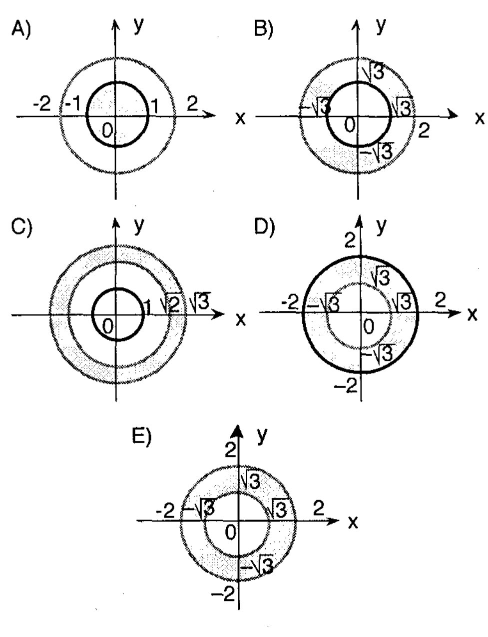
ÇÖZÜM

$\forall$ x, y $\in$ R için $[\![2x]\!] \,.\, [\![3y]\!] = 1$ ise
a) $[\![2x]\!] = 1$ veya $[\![3y]\!] = 1$ dir.
$[\![2x]\!] = 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2x < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1$
$[\![3y]\!] = 1 \Leftrightarrow 1 \leq 3y < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq y < \frac{2}{3}$
b) $[\![2x]\!] = -1$ veya $[\![3y]\!] = -1$ dir.
$[\![2x]\!] = -1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 0$
$[\![3y]\!] = -1 \Leftrightarrow -1 \leq 3y < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq y < 0$
olduğundan grafik aşağıdaki gibidir.



YANIT "A"

26. $\{(x, y) \in R \times R,\ [\![x^2 + y^2]\!] = 3\}$ **bağıntısının grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

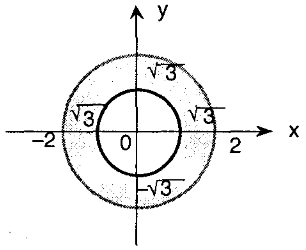


ÇÖZÜM

$[\![x^2 + y^2]\!] = 3 \Rightarrow 3 \le x^2 + y^2 < 4$

$x^2 + y^2 = 3$ ve $x^2 + y^2 = 4$ çemberleri çizilir.

İki çember arasında kalan halka, taranır.



YANIT "B"

27. $f(x) = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{1 - [\![|x|]\!]}$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) [−3, 3] B) [1, 2) C) [−3, 1)
D) (2, 3] E) [−3, 3] − [1, 2)

ÇÖZÜM

$9 - x^2 \ge 0$ ve $1 - [\![x]\!] \ne 0$ olmalıdır.

$9 - x^2 = 0$, $[\![x]\!] = 1$

$x = \pm 3$, $1 \le x < 2$

x	$-\infty$	-3		3	$+\infty$
$9 - x^2$	-	0	+	0	-

$x \in [-3, 3] - [1, 2)$ en geniş tanım kümesidir.

YANIT "E"

28. Konturlu bir telefonla konuşma ücreti şu şekilde düzenlenmiştir. Birinci dakika sonuna kadar x TL, sonraki her dakika veya kesri için $\frac{2}{3}$ x TL dir. Bu telefonla A, B den yedi defa daha uzun bir süre konuşmuş fakat, B nin ödediği ücretin sadece üç katı kadar ücret ödemiştir. **Konuşma sırasında 5 saniyelik aralıklar kaydedilmediğine göre A kaç dakika konuşmuştur?**

A) 0,5 B) 1 C) 2,5 D) 3 E) 3,5

ÇÖZÜM

B a dakika konuşursa, A 7a dakika konuşmuştur.

B nin ödediği ücret $= x + \frac{2}{3}x \, . \, [\![a]\!]$ TL

A nın ödediği ücret $= x + \frac{2x}{3} \, . \, [\![7a]\!]$ TL dir.

A, B nin üç katı ücret ödediği için ;

$x + \frac{2x}{3} \, . \, [\![7a]\!] = 3 \, . \left(x + \frac{2x}{3} \, . \, [\![a]\!]\right)$ dir.

$x\left(1 + \frac{2}{3} \, . \, [\![7a]\!]\right) = 3x \, . \left(1 + \frac{2}{3}[\![a]\!]\right)$

$1 + \frac{2}{3} \, . \, [\![7a]\!] = 3 + 2\,[\![a]\!]$

$\frac{2}{3} \, . \, [\![7a]\!] = 2 + 2[\![a]\!]$

$[\![7a]\!] = 3 + 3[\![a]\!]$ olur.

$n \in N^+$ olmak üzere; $a \in [n, n + 1)$ ise

$[\![a]\!] = n$ ve $[\![7a]\!] > 7n$ dir.

$3 + 3[\![a]\!] = 3 + 3n = [\![7a]\!]$ olamaz.

Çünkü, $3 + 3n > 7n$ olacak biçimde bir $n \in N^+$ sayısı yoktur.

$[\![7a]\!]$ ifadesi; $[0, \frac{1}{7})$, $[\frac{1}{7}, \frac{2}{7})$, $[\frac{2}{7}, \frac{3}{7})$, $[\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$, $[\frac{4}{7}, \frac{5}{7})$, $[\frac{5}{7}, \frac{6}{7})$, $[\frac{6}{7}, 1)$ aralıklarında sırasıyla 0, 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 değerlerini alır. Denklemin sağlanması için, a nın $[\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$ aralığında bulunması gerekir.

Yani ;

$[\![7a]\!] = 3 + 3 \, . \, [\![a]\!] \Rightarrow a \in [\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$ dir.

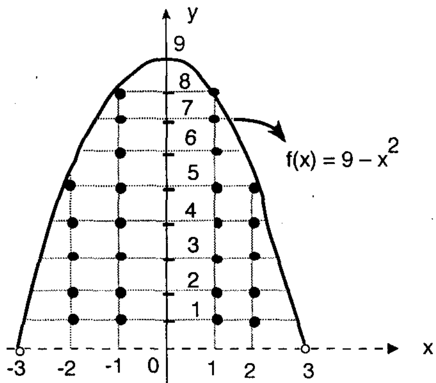
O halde, B $\frac{3}{7}$ dakika ($25\frac{5}{7}$ sn.) ile $\frac{4}{7}$ dakika ($34\frac{2}{7}$ sn) arası bir süre konuşmuştur. Konuşma sırasında yalnız 5 saniyelik aralıklar dikkate alındığından, B $\frac{1}{2}$ dakika ve A da bunun 7 katı olan $\frac{7}{2} = 3{,}5$ dakika konuşmuştur.

YANIT "E"

29. $f : [-3, 3] \to R^+$, $f(x) = 9 - x^2$ fonksiyonu veriliyor.
$A = \{ (x, y) \in R^2 \mid x \in [-3, 3]\ ,\ y \in (0, f(x)] \}$ kümesi, f(x) in grafiğinin kendisi dahil x ekseni üzerinde kalan noktalar kümesi ise **A kümesinde koordinatları tamsayı olan kaç nokta vardır?**

A) 27 B) 30 C) 35 D) 38 E) 42

ÇÖZÜM



A daki tamsayı koordinatlı noktaların apsisleri, {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3} kümesindedir. (–3, 0) , (–2, 0) , (–1, 0) ,..., (3, 0) noktalarıyla (–3, f(–3)) , (–2, f(2)) ,...,(3, f(3)) noktalarını, sıra ile birleştiren doğru parçalarını ele alalım. Tamsayı koordinatlı noktalar, bu doğru parçaları üzerindeki tamsayı ordinatlı noktalardır. Bu doğru parçalarının uzunlukları, f(–3), f(–2) , .. f(2) , f(3) olup, herbiri üzerinde, $[\![f(-3)]\!]$, $[\![f(-2)]\!]$, ..., $[\![f(3)]\!]$ tane nokta vardır. O halde;

$$\sum_{n=-3}^{3} [\![f(n)]\!] = [\![f(-3)]\!] + [\![f(-2)]\!] + \dots + [\![f(3)]\!] \text{ dir.}$$

$= [\![0]\!] + [\![5]\!] + [\![8]\!] + [\![9]\!] + [\![8]\!] + [\![5]\!] + [\![0]\!]$
$= 5 + 8 + 9 + 8 + 5 = 35$ nokta vardır.

YANIT "C"

30. $|\,[\![x + 3]\!] - 3\,| \le 1$ **eşitsizliğini sağlayan kaç tane tamsayı vardır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

$|\,[\![x + 3]\!] - 3\,| \le 1$ ise,
$-1 \le [\![x + 3]\!] - 3 \le 1,$
$2 \le [\![x + 3]\!] \le 4$ olur.
i) $[\![x + 3]\!] \le 4 \Rightarrow x + 3 < 5 \Rightarrow x < 2$ olur.
ii) $[\![x + 3]\!] \ge 2 \Rightarrow x + 3 \ge 2 \Rightarrow x \ge -1$ dir.
O halde; $-1 \le x < 2$ olur.
Bu aralıkta –1, 0, 1 olmak üzere 3 tamsayı vardır.

YANIT "C"

31. $\sum_{k=1}^{9} \log_2 [\![\frac{k+2}{3}]\!] = 3.\log_4 x$ olduğuna göre **x kaçtır?**

A) $4\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{6}$ C) 24
D) 36 E) $6\sqrt{2}$

ÇÖZÜM

$\sum_{k=1}^{9} \log_2 [\![\frac{k+2}{3}]\!] = 3.\log_4 x$ ise

k= 1 için $\log_2 [\![\frac{k+2}{3}]\!] = \log_2 1 = 0$

k= 2 için $\log_2 [\![\frac{k+2}{3}]\!] = \log_2 1 = 0$

k= 3 için $\log_2 [\![\frac{k+2}{3}]\!] = \log_2 1 = 0$

k= 4 için $\log_2 [\![\frac{k+2}{3}]\!] = \log_2 2 = 1$

k= 5 için $\log_2 [\![\frac{k+2}{3}]\!] = \log_2 2 = 1$

k= 6 için $\log_2 [\![\frac{k+2}{3}]\!] = \log_2 2 = 1$

k= 7 için $\log_2 [\![\frac{k+2}{3}]\!] = \log_2 3$

k= 8 için $\log_2 [\![\frac{k+2}{3}]\!] = \log_2 3$

k= 9 için $\log_2 [\![\frac{k+2}{3}]\!] = \log_2 3$

+ ________________

$3 + 3\log_2 3 = 3\log_4 x$

$1 = \log_2 x^{\frac{1}{2}} - \log_2 3 \Rightarrow \log_2 \frac{\sqrt{x}}{3} = 1$

$\frac{\sqrt{x}}{3} = 2$

$\sqrt{x} = 6$

$x = 36$ bulunur.

YANIT "D"

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

TEST 1

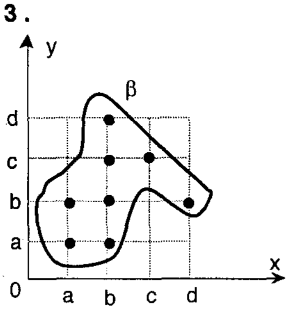
1. x ve y pozitif tamsayılardır.
$(x + y, 2a) = \left(\frac{a}{x - y}, 34\right)$ ise **y kaçtır?**

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

2. A ve B kümeleri için,
AxB = { (a,a), (a,c), (a,e), (b,a), (b,c), (b,e)}
ise, A ∪ B nin eşiti hangisidir?

A) {a, b, e} B) {a, b, c, e} C) {a}
D) {a, c, e} E) {a, e}

3.



Şekildeki grafikte verilen β bağıntısından aşağıdaki ikililerden hangisi çıkarılırsa, **bu bağıntı simetrik bir bağıntı olur?**

A) (a, b) B) (b, c) C) (b, d)
D) (d, b) E) (a, c)

4. A kümesinde tanımlı bağıntıların sayısı 2^{16} dır. **A kümesinin <u>en çok</u> 2 elemanlı kaç tane alt kümesi vardır?**

A) 6 B) 7 C) 8 D) 10 E) 11

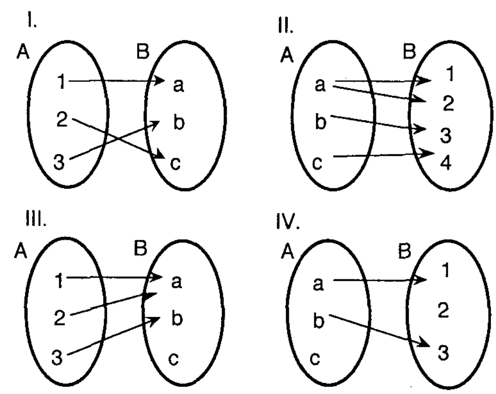
5. A = {1, 2, 3} kümesinde tanımlı
β = { (1, 1) , (1, 3) (3, 2) (2, 2)} bağıntısının geçişken olması için, β **ya aşağıdaki ikililerden hangisi alınmalıdır?**

A) (1, 2) B) (2,3) C) (2,1)
D) (3, 3) E) (3, 1)

6. A = {x : |x – 2| < 3, x ∈ Z} kümesinde tanımlı
β = { (x, y) : 3x + y = 7} bağıntısı veriliyor.
β^{-1} **bağıntısı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) { (7, 0) , (4, 1) , (1, 2) , (–2, 3) , (–5, 4)}
B) { (0, 7) , (1, 4) (2, 1) , (3, –2) , (4, –5) }
C) { (1, 4) , (2, 1) }
D) { (1, 4) , (2, 1) , (3, –2) }
E) { (4, 1) , (1, 2) }

7.



Yukarıda şemaları verilen bağıntılardan hangileri A dan B'ye bir fonksiyondur?

A) I ve II B) I ve IV C) II ve III
D) III ve IV E) I ve III

8. **Aşağıda verilen bağıntılardan hangisi aynı zamanda bir fonksiyondur?**

A) { (x, y) ∈ N^2 : x + y = 2}
B) (x, y) ∈ Z^2 : x + 2y = 3}
C) { (x, y) ∈ Q^2 : xy – x = 1}
D) { (x, y) ∈ R^2 : 2y + |x| = 3}
E) { (x, y) ∈ R^2 : |y| – x = 1}

9. $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ kümeleri veriliyor. **A dan B ye tanımlı olan fonksiyonlardan kaç tanesinin tersi fonksiyon <u>değildir</u>?**

A) 16 B) 18 C) 21 D) 24 E) 27

10. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği $A(4, a^2)$ noktasından geçmektedir.
$f(3x - 2) = x^2 + ax - a^2$ olduğuna göre, **a aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) -2 B) $-\sqrt{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

11. $f(x) = 2^{2x-1}$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonu için $\frac{f(x+2)}{f(x+1)}$ **ifadesinin değeri nedir?**

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) 4 E) $\frac{1}{4}$

12. Reel sayılarda tanımlı f(x) fonksiyonu için,
$(x - 2) \cdot f(x - 2) = f(x - 1) - 3x$ ise **f(2) aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 21

13. $f(x) = \dfrac{2x^2 - (a+2)x - 4}{x^2 + 4x + 2b}$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise **a + b aşağıdakilerden hangisidir?**

A) -11 B) -9 C) 6 D) 9 E) 10

14. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ kümeleri veriliyor. **A dan B ye tanımlı üç elemanlı bağıntılardan kaç tanesi fonksiyon <u>değildir</u>?**

A) 61 B) 120 C) 156 D) 160 E) 180

15. $f : R - \{-1\} \rightarrow R - \{3\}$,
$f(x) = \dfrac{ax - 4}{x + b}$ fonksiyonu için,
a + b aşağıdakilerden hangisidir?

A) -4 B) -2 C) 2 D) 3 E) 4

16. Reel sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları için $f(x) = 2x + 1$ ve $(fog)(x) = 6x - 5$ ise **g(3) nedir?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

17. $A = \{a, b, c, d, e\}$ olmak üzere A dan A ya tanımlı f ve g permütasyon fonksiyonları için,
$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & d & e & c & a \end{pmatrix}$ ve $fog = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & c & b & a & d \end{pmatrix}$
ise, **g aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & d & a & e & b \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & d & e & a & b \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & d & b & e & a \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & d & b & a & e \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ d & b & c & e & a \end{pmatrix}$

18. $f : A \rightarrow B$ ve $g : B \rightarrow C$ tanımlı olmak üzere,
$f(x) = x - 1$ ve $g(x) = 2x - 3$
fonksiyonları veriliyor. $C = \{-3, -1, 1\}$ ise **A kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\{1, 2, 3\}$ B) $\{0, 1, 2\}$ C) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$
D) $\{-1, 0, 1\}$ E) $\{-1, 1, 2\}$

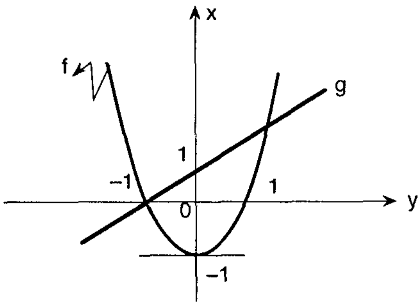
19. Reel sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları için, $(f^{-1}o\, g)(x + 1) = 3x + 4$ ve $g(x) = 2x - 3$ ise, **f(1) nedir?**

A) -1 B) -2 C) -3 D) 0 E) 1

20. A ve B kümelerinin eleman sayıları sıra ile 3 ve 4 dür. **A dan B ye tanımlı fonksiyonlardan kaç tanesi 1 – 1 <u>değildir</u>?**

A) 24 B) 28 C) 32 D) 36 E) 40

21.



Şekilde f ve g fonksiyonlarının grafiği verilmiştir. (gof) (–1) – (fog) (0) + $(g^{-1}$ o f) (1) **değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

22. $f(x) = \dfrac{mx+3}{nx-2}$, $g^{-1}(x) = x - 2$ fonksiyonları veriliyor. $(f^{-1} \text{ o } g)(x) = \dfrac{2x+7}{3x-5}$ ise **m . n çarpımı nedir?**

A) 3 B) 11 C) 22 D) 33 E) 44

23. f : A → B, y = f(x) birebir ve örten fonksiyonu için, $f\left(\dfrac{2x-1}{3x-4}\right) = x - 1$ ise $\mathbf{f^{-1}(x)}$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\dfrac{2x}{3x+1}$ B) $\dfrac{2x+1}{3x-1}$ C) $\dfrac{2x-1}{3x+1}$

D) $\dfrac{2x-1}{3x}$ E) $\dfrac{x}{2x-1}$

24. f(x) = 2lnx – 1 ve

(gof) (x) = 3x – 1 olduğuna göre, **g(–1) aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0 E) –1

25. $R^2 \to R$ ye $f(x, y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ ve

g(x, y) = 2x – y bağıntıları veriliyor.

f(f(2, 1) , g(1, 0)) **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) –1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

26. $f(x) = \begin{cases} x-1 \ , & x < 1 \text{ ise} \\ 3x-1 \ , & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

ve $g(x) = x^2 - 3$ olduğuna göre, (fog) (x) **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{cases} x^2-2 \ , & -2 < x < 2 \text{ ise} \\ 3x^2-10 \ , & x \leq -2 \vee x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$

B) $\begin{cases} x^2-2 \ , & x < 1 \text{ ise} \\ 3x^2-10 \ , & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

C) $\begin{cases} x^2-4 \ , & -2 < x < 2 \text{ ise} \\ 3x^2-10 \ , & x \leq -2 \vee x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$

D) $\begin{cases} x^2-4 \ , & x < 1 \text{ ise} \\ 3x^2-10 \ , & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

E) $\begin{cases} x^2-4 \ , & x \leq 1 \text{ ise} \\ 3x^2-10 \ , & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

27. ∀ x ∈ R için, f(x) tek fonksiyon ve

$f(x) = f(-x) + 16x^3$ **ise $\mathbf{f^{-1}(x)}$ nedir?**

A) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{2}$ B) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{2}}$ C) $2\sqrt[3]{x}$ D) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{4}}$ E) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{4}$

28. ∀ x ∈ R için , f(x) çift fonksiyon ve

f(x) + 4x = f(–2x), **f(1) = –3 ise f(2) nin değeri kaçtır?**

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

29. Aşağıda verilen fonksiyonlardan hangisi ne tek ne de çift fonksiyondur?

A) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$ B) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$

C) f(x) = sinx . cosx D) f(x) = 3

E) $f(x) = \dfrac{\sin x + 1}{x^2 + x}$

30. $f(x) = 3^{-x}$ ise $f^{-1}(x)$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\log_3 x$ B) $3\log_3 x$ C) $-\log_3 x$

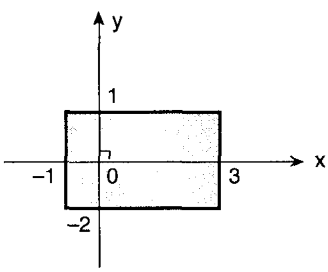
D) $-\log_3 x^3$ E) $\dfrac{1}{3^x}$

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

TEST 2

1. $(3^x, \sqrt[3]{-27}) = (729^{-\frac{1}{k}}, k)$ ise, **x in değeri nedir?**

A) –1 B) –2 C) 0 D) 1 E) 2

2. 

Şekilde A x B kartezyen çarpımının grafiği verilmiştir. **A ∩ B' kümesi, aşağıdakilerden hangisidir?**

A) [–2, –1) B) [–2, 1) C) (–1, 1)
D) (1, 3] E) [0, 2)

3. $A = \{x \mid 1 \le x^3 < 64 \text{ ve } x \in N\}$ kümesi veriliyor. **A kümesinde kaç tane bağıntı tanımlanabilir?**

A) 32 B) 64 C) 128 D) 256 E) 512

4. A = {1, 2, 3} kümesinde tanımlı bir β bağıntısının yansıma özelliği vardır. **Simetri, ters–simetri özellikleri olmayan bu bağıntının <u>en az</u> kaç elemanı vardır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

5. $\beta = \{(x, y) \in R^2 : x^3 + y = y^3 + x\}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. **Buna göre, 1 in denklik sınıfı, aşağıdakilerden hangisidir?**

A) {–1, 1} B) {0, 1} C) {–1, 0, 1}
D) {0} E) {1}

6. $A = \{x \in N : |x + 1| \le 2\}$ kümesinde tanımlı olan bağıntılardan **kaç tanesi yansıyan <u>değildir</u>?**

A) 0 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

7. A = {1, 2, 3} , B = {a, b} olduğuna göre, **A dan B ye tanımlı bağıntılardan kaç tanesi fonksiyon <u>değildir</u>?**

A) 24 B) 25 C) 55 D) 56 E) 60

8. **Tam sayılardan tam sayılara tanımlı aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin tersi de fonksiyondur?**

A) f(x) = 3 – 2x B) f(x) = 1 – 3x
C) f(x) = 2x D) f(x) = –x + 3
E) f(x) = –3x

9. $f(x) = \frac{-3}{x+1}$ fonksiyonu veriliyor.

f(x–1) in f(x) cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3f(x) - 1$ B) $\frac{f(x)}{f(x)-1}$ C) $\frac{3f(x)}{f(x)+3}$
D) $\frac{-f(x)}{2f(x)-1}$ E) $3f(x)$

10. $f(x) = \frac{x-1}{x}$ fonksiyonu veriliyor.

f(3x) fonksiyonunun f(x) cinsinden değeri, aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{f(x)}{3}$ B) $\frac{2f(x)}{3}$ C) $\frac{2+f(x)}{3}$
D) $\frac{f(x)}{2}$ E) $\frac{3f(x)}{2}$

11. $\frac{f(x+1)}{f(x)} = x - 1$ ve $f(5) = 12$ olduğuna göre,

f(2) değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12. $f(x) = \frac{(m+3)x-1}{x-2}$ fonksiyonu veriliyor.

$f^{-1}(x) = f(x)$ ise, $f^{-1}(3)$ aşağıdakilerden hangisidir?

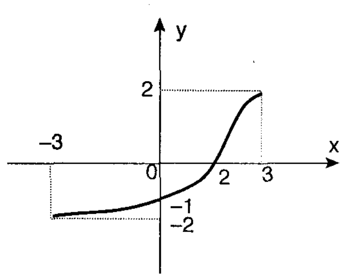
A) – 4 B) – 3 C) 3 D) 4 E) 5

13. $f\left(\frac{3}{x-1}\right) = 2x - 3$ olduğuna göre, **f(x) aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{-x+6}{x}$ B) $\frac{x+6}{x}$ C) $\frac{x+3}{x-1}$

D) $\frac{-x+3}{x}$ E) $\frac{-x+3}{x+1}$

14.



$f : [-3, 3] \to R$, $y = f(x)$ fonksiyonu şekilde verilmiştir.

$\frac{f^{-1}(2) + f(2)}{f^{-1}(0)}$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{3}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 3

15. R de tanımlı f fonksiyonu için,

$f(x+2) = 3x + 4$ olmak üzere, $f^{-1}(3k+1) = 5$ ise, **k nın değeri kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 2 D) 1 E) $\frac{1}{2}$

16. f fonksiyonu için $f(2x-1) = \frac{x}{x-1}$ ise,

$f^{-1}(2)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) $\frac{1}{2}$

17. $f : R \to R$, $f(x) = 3^{x-2} + 3^x$ olduğuna göre,

$f^{-1}\left(\frac{10}{3}\right)$ ün değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

18. Gerçel sayılarda tanımlı f fonksiyonu için

$f^{-1}(x+1) = x - 2$ olduğuna göre,

$f(2f^{-1}(x)) = 5$ denklemini sağlayan **x değeri kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

19. $f(x) = \frac{x-3}{2}$, $g(x) = \frac{3x+p}{4}$ fonksiyonları için

(fog) (x) = (gof) (x) ise, **p aşağıdakilerden hangisidir?**

A) –3 B) –2 C) 2 D) 3 E) 4

20. A = {1, 2, 3, 4} kümesinin bir permütasyonu,

$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ olduğuna göre,

(pop) (x) = 2 ise, **x aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

21. $R \to R$, f ve g fonksiyonları için $f(x) = 3x + 1$

$(g^{-1} \text{ o } f)(x) = x - 3$ ise, **g(x) aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{x-10}{2}$ B) $3x + 10$ C) $\frac{x+10}{3}$

D) $2x + 10$ E) $\frac{2x+10}{3}$

22. f : A → B birebir örten bir fonksiyondur.

Aşağıdaki f(x) fonksiyonlarından hangisi (fof)(x)= x koşulunu sağlar?

A) $\frac{x-2}{2}$ B) $\frac{3x-1}{x+1}$ C) $\frac{-x+1}{x}$

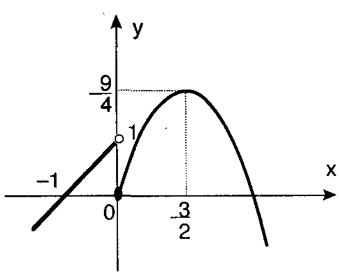
D) $\frac{4x-3}{3x-4}$ E) $\frac{3x-1}{3}$

23. A ve B kümelerinin eleman sayıları

$s(A) = n + 2$ ve $s(B) = n^2 - n - 1$ dir. **A dan B ye en çok kaç tane 1 – 1 ve örten fonksiyon tanımlanabilir?**

A) 5 B) 3! C) 4! D) 27 E) 5!

24.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonu, $x < 0$ için bir doğru, $x \geq 0$ için bir parabol belirtmektedir.

f(–2)+f(2) aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

25. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \ x \text{ asal ise} \\ 3x + 4 & , \ x \text{ asal sayı değilse} \end{cases}$

biçiminde tanımlı f fonksiyonu için (fofof)(–1) **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) –1 B) 4 C) 16 D) 25 E) 48

26. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & , \ x \leq 0 \text{ ise} \\ 2x + 1 & , \ x > 0 \text{ ise} \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} 3 - x & , \ x < 1 \text{ ise} \\ -x - 1 & , \ x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonları veriliyor. (f + g) (2) + (f.g) (0) **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) – 5 B) – 1 C) 0 D) 2 E) 3

27. $f : (-\infty, 1] \to [-1, +\infty)$, $y = f(x) = x^2 - 2x$

fonksiyonu için $f^{-1}(x - 1)$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\sqrt{x}$ B) $1 + \sqrt{x}$ C) $1 - \sqrt{x}$

D) $-\sqrt{x+1}$ E) $1 - \sqrt{x+1}$

28. Reel sayılarda tanımlı, $f(x) = 3x + 1$ ve $g(x) = 2x - 3$ fonksiyonları veriliyor.

$h(x) = [(fog)\ (x + 1)] \cdot [(gof)\ (x - 1)]$ ise

h(2) nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 10 B) 50 C) 100

D) 150 E) 200

29. Reel sayılarda tanımlı,

$f(x) = 3x$ ve $g(x) = 3^{x^2 + 2}$ fonksiyonları veriliyor. $\mathbf{h(x) = 3 \cdot \frac{(fog)\ (x)}{(gof)\ (x - 1)}}$ **ise h(3) değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 3^{25} B) 3^{-25} C) 3^{24} D) 3^{-24} E) 1

30. Reel sayılarda tanımlı f tek fonksiyon,

$\mathbf{g(3) = -3}$ **ve** $\mathbf{h(x + 1) = \frac{(fog)\ (x)}{f(x)}}$

ise h(4) ün değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) –3 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 3

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

TEST 3

1. $[\![\frac{1}{x+3}]\!] - 2 = 0$ denkleminin R deki çözüm aralığı, **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $[\frac{5}{2}, \frac{8}{3})$ B) $[\frac{5}{2}, 4)$ C) $(-4, \frac{5}{2}]$
D) $(-\frac{8}{3}, -\frac{5}{2}]$ E) $(-\frac{3}{2}, -1]$

2. $[\![\frac{2x-5}{x-1}]\!] = 2$ denkleminin R deki çözüm aralığı, **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(-2, -1)$ B) $(-2, 1)$ C) $(-\infty, -2)$
D) $(-2, \infty)$ E) $(1, \infty)$

3. $[\![\log_2 x]\!]^2 - [\![\log_2(64x)]\!] = 0$ denklemini gerçekleyen en büyük x tamsayısı, **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 8 B) 9 C) 10 D) 15 E) 16

4. $[\![4x - 1]\!] \leq 7$ ifadesi, **x in hangi değerleri için sağlanır?**

A) $x \leq 2$ B) $x < 2$ C) $x \geq 2$
D) $x \leq \frac{9}{4}$ E) $x < \frac{9}{4}$

5. $\left| [\![\frac{x}{3}]\!] - 1 \right| = 1$ **denklemini sağlayan kaç tane x tamsayısı vardır?**

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

6. $f(x) = |x - 5| - x\,\mathrm{sgn}(x + 1)$ ve $g(x) = 2 + \mathrm{sgn}(x + 1)$ fonksiyonu veriliyor. **Buna göre, $(fog)(x^2)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) -2 B) -1 C) x^2 D) $x + 1$ E) 3

7. $f : R \to R$, $f(x) = [\![\frac{x}{3}]\!] - x\,\mathrm{sgn}(1 - x)$ biçiminde verilen f(x) fonksiyonu için, **f(7) + f(−2) toplamı kaçtır?**

A) 10 B) 9 C) 8 D) −4 E) −2

8. $A = \sqrt{-x^2 + 4x - 4} + |3x| + [\![-x]\!]$ ifadesi, reel bir sayıya eşit ise bu sayı, **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

9. $x \in [-3, -2)$ olmak üzere;
$f(x) = [\![x - 2]\!].(-x) + |-3x + 1| - 2x.\mathrm{sgn}(x - 1)$ fonksiyonunun eşiti **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) x B) $-x$ C) 1 D) 2x E) $4x + 1$

10. $f(x) = |1 - x| - 2\mathrm{sgn}(x - 5)$ biçiminde tanımlanan f(x) fonksiyonunun $2 \leq x \leq 4$ aralığındaki ifadesi, **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x + 1$ B) $x - 1$ C) $-x - 1$
D) $x - 3$ E) $-x + 3$

11. $f(x) = [\![x]\!] - sgn(1 - x)$ biçiminde tanımlanan fonksiyon için, **f(e) değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12. $f : [1, 4) \to R$ fonksiyonu,
$f(x) = -2x + [\![x]\!] + 3$ biçiminde tanımlanıyor.
f(x) fonksiyonunun x eksenini kestiği noktaların apsisleri toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{15}{2}$ B) $\frac{11}{2}$ C) 5 D) 4 E) 3

13. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & , x < 2 \\ x - 2 & , x \geq 2 \end{cases}$ biçiminde

verilen fonksiyon için, **f([−1,3]) aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) (0,1] B) [−1, 1] C) [−2, 1]
D) [−3, 1] E) [−4, 1]

14. $R \to R$ ye f(x) ve g(x) fonksiyonları,
$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x < 0 \\ x - sgn(x) & , x \geq 0 \end{cases}$
$g(x) = x - |x - 2|$ biçiminde tanımlanıyor.
Buna göre, (fog) (0) + (gof) (3) değeri, aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 0 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

15. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 - 36} & , x < -1 \\ 2x + 1 & , -1 \leq x \leq 2 \\ x + \log(x - 5) & , x > 2 \end{cases}$

biçiminde verilen f(x) fonksiyonu **x in kaç farklı tamsayı değeri için tanımsızdır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16. f_{max} (a, b) a ve b den büyüğünü göstermektedir.
Aşağıdaki aralıklardan hangisinde, $f_{max}(-x^2 + 1, 2x - 2) = -x^2 + 1$ eşitliği gerçeklenir?

A) (−1, 3) B) (−3, 1) C) (−4, 2)
D) (2, 3) E) (−2, 3)

17. $(x - 2)^{[\![x]\!]} = 1$ denkleminin **çözüm kümesi nedir?**

A) $\{x : 0 \leq x < 1 , x \in R\} \cup \{3\}$
B) $\{x : 0 \leq x < 3, x \in R\}$
C) $\{x : 0 \leq x < 1, x \in R\} \cup \{3, -1\}$
D) $\{x : 0 \leq x < 1, x \in R\}$
E) $\{x : -1 \leq x \leq 1, x \in R\}$

18. a, b ve c reel sayı olmak üzere,
$f(x) = ax^3 + bx + c$ tek fonksiyon ise, **aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?**

A) $c < 0 , b = 0$
B) $b = 0$
C) $c > 0, a . b \neq 0$
D) $c = 0$ ve ($a \neq 0$ veya $b \neq 0$)
E) $a + b = 0 , c \neq 0$

19. Aşağıda verilen fonksiyonlardan hangisi bir çift fonksiyondur?

A) $f(x) = 4 + \sin x$
B) $f(x) = \frac{sgnx}{x^2 - |x|}$
C) $f(x) = \frac{x^5 - \cot x}{x^3 + \tan x}$
D) $f(x) = \frac{|x| + 3}{\sin x - x \cos x}$
E) $f(x) = \frac{5}{3x + \cos x}$

ZAFER YAYINLARI

20. $f(x) = \sin^4 \frac{3x}{2} + \cos^3 \frac{9x}{2}$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun periyodu, **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) π B) 2π C) $\frac{2\pi}{3}$ D) $\frac{4\pi}{3}$ E) $\frac{4\pi}{9}$

21. $f(x) = \tan^3 4x + \sin 4x$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun periyodu, **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) π B) 2π C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{8}$

22. $\text{sgn}(x) < \text{sgn}(x + 1)$ eşitsizliğini sağlayan **x değerleri hangi aralıkta bulunmalıdır?**

A) $[-1, 1)$ B) $[0, 1]$ C) $[-1, 0]$
D) $(0, 1)$ E) $[-1, 1]$

23. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - |x - 2|}{[\![x - 1]\!]}}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığı **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(2, 3]$ B) $(-\infty, 1) \cup [2, 3]$
C) $[2, 3]$ D) $(-\infty, 1) \cup (2, 3]$
E) $(-\infty, 0] \cup [2, 3]$

24. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{[\![x]\!]^2 - [\![x]\!]}}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığı, **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $R - (-1, 2)$ B) $R - (0, 1)$
C) $R - [0, 1]$ D) $R - [0, 2)$
E) $R - [0, 2]$

25. $f(x) = \dfrac{1}{[\![\frac{x}{2} - 1]\!]} + \log\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$ **fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $[2, 4]$ B) $[-1, 2]$
C) $(-\infty, -1) \cup [4, +\infty)$ D) $[-1, 4]$
E) $[4, \infty)$

26. $\sum_{k=1}^{\infty} [\![\frac{400}{5^k}]\!]$ sonsuz toplamının sayısal değeri **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 99 B) 100 C) 400 D) 500 E) 501

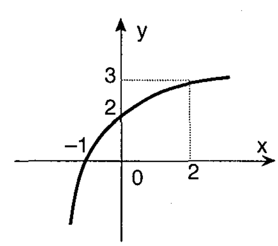
27. Bir gömleğin fiyatı $[\![\frac{x}{3} - 4]\!] = 110$ olmak üzere, x bin liradır. İki gömlek alan bir müşteriye toptan satış fiyatı üzerinden % 10 indirim yapılmaktadır. **2 gömlek alan bir müşteri tamsayı olarak en fazla kaç bin lira öder?**

A) 600 B) 620 C) 624 E) 630 E) 684

28. $R^2 \to R^2$ ye, $f(x, y) = (2x - 1, -y + 2)$ fonksiyonu veriliyor. **Görüntüsü (1, 3) olan nokta aşağıdakilerden hangisidir?**

A) (1,1) B) (–1, 1) C) (–1, –1)
D) (1, 0) E) (1, –1)

29.



$R \to R$ tanımlı, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği yukarıda verilmiştir.

$$g(x) = \begin{cases} \text{sgn}(f(x)) & , x > 1 \text{ se} \\ [\![f(x)]\!] & , x \le 1 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde g(x) tanımlanıyor.

g(2) + g(0) toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

TEST 4

1. $f : R \to R$ fonksiyonunun grafiği y – eksenine göre simetriktir.
$f(x) + 8x^4 = 6x^2 - f(-x) + 4$ olduğuna göre
f(1) nedir?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

2. $|x - 3| + |x + 1| = 4$ denkleminin R deki çözüm aralığı, **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) [–3, 1] B) (–3, 1) C) (1, 3)
D) [–1, 3] E) (–1, 3]

3. $2|x - 1|^2 - 5|x - 1| - 3 = 0$ **denkleminin kökleri toplamı neye eşittir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4. $x^2 - 2|x| - 15 = 0$ denkleminin köklerinin çarpımı, **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 15 B) 25 C) 0 D) –25 E) –15

5. $f(x) = [\![|x|]\!] - | [\![x - 1]\!] |$ biçiminde verilen f(x) fonksiyonuna göre, **f(–π) değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 2 E) 8

6. $[\![\log_3(x^2 - 9)]\!] = 2$ eşitliğini sağlayan **x tamsayısı kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

7. $[\![x]\!] + [\![x + 4]\!] = 3$ denklemini R deki çözüm aralığı, **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $[-\frac{1}{2}, 0)$ B) $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}]$
C) $[-\frac{1}{2}, 1)$ D) $[0, \frac{1}{2}]$
E) ∅

8. $[\![x + [\![x - 1]\!] + [\![x - 2]\!]]\!] = 9$ denkleminin R deki çözüm aralığı, **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) [3, 4) B) [4, 5) C) $[4, \frac{13}{5})$
D) [5, 6) E) $[5, \frac{16}{3}]$

ZAFER YAYINLARI

9. $f(x) = 5\sin(6x - 1) + 4$ **fonksiyonunun periyodu nedir?**

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{5}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$

10. $f : R \to R$ fonksiyonunun grafiği O(0,0) noktasına göre simetriktir. f fonksiyonu için, $3f(x) + 6x = 4x^3 - f(-x)$ olduğuna göre, **f(1) nedir?**

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

11. $-2 < [\![x - 3]\!] \le 1$ eşitsizliğinin çözüm aralığı, **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) [1, 4) B) (1, 4] C) [2, 5)
D) (2, 5] E) (1, 2)

12. $f(x) = |x + 1| + x\,\text{sgn}(x - 2)$ fonksiyonunun parçalı fonksiyon biçimindeki ifadesi **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x < -1 \\ 1, & -1 \le x \le 2 \\ 2x + 1, & x \ge 2 \end{cases}$

B) $f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x < -1 \\ 1, & -1 \le x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ 2x + 1, & x > 2 \end{cases}$

C) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < -1 \\ 1, & -1 \le x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ 2x + 1, & x > 2 \end{cases}$

D) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < -1 \\ -x + 1, & -1 \le x < 2 \\ -2x + 1, & x \ge 2 \end{cases}$

E) $f(x) = \begin{cases} 1, & x < -1 \\ -2x - 1, & -1 \le x < 2 \\ 2x - 1, & x \ge 2 \end{cases}$

13. $(x - 1)^{1 - \text{sgn}(x - 1)} = 1$ denkleminin çözüm kümesi, **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(1, \infty)$ B) $(0, \infty)$ C) $(1,2)$
D) R E) $(1, \infty) \cup \{0\}$

14. $-2 \le x < -1$ için,

$f(x) = [\![x + 1]\!] + x^2\,\text{sgn}(1 - x) + |x^2 + x - 6|$

biçiminde f(x) fonksiyonu tanımlanıyor.

Verilen aralıkta $f^{-1}(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-x + 5$ B) $-x + 4$ C) $x - 7$
D) $-x + 7$ E) $x - 5$

15. $f(x) = 4\cos^2(3x + 1) - 3$ **fonksiyonunun periyodu nedir?**

A) π B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{5}$

16. f(x) grafiği orijine göre simetrik olan bir fonksiyondur.

$f(x) = x^3 + (a - 2)x^2 + a\,f(-x)$ olduğuna göre,

f(3) değeri, aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 3 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

17. f(x) çift fonksiyondur.

$f(x) = x^2 + (a - 3)\sin x - 2f(-x) - 7$ olduğuna göre, **f(1) in değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) –4 B) –3 C) –2 D) 2 E) 3

18. Aşağıdakilerden hangisi ne tek ne de çift fonksiyondur?

A) $y = \frac{x}{1 - \cos x}$ B) $y = x^2 + \cos x$
C) $y = |x| + \ln(1 - x^2)$ D) $y = x^3 - \cot x$
E) $y = 5 - \tan x$

19. $(0, \infty) \to$ R ye $f(x) = 3 - \ln x$, $g(x) = 7 + \ln x$ biçiminde verilen **f(x) ve g(x) fonksiyonlarının kesim noktalarının apsisi nedir?**

A) e^{-2} B) e^{-4} C) e D) e^2 E) e^5

20. R de tanımlı, $f(x) = \sin^3\frac{5x}{3} + \cot^2\frac{3x}{4}$ fonksiyonunun periyodu **neye eşittir?**

A) 12π B) 6π C) 4π D) 2π E) π

21. R de tanımlı, $f(x) = \cos(ax + 5) + \tan\frac{6x}{5}$

fonksiyonunun periyodu $\frac{10\pi}{3}$ ise, **a aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?**

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{9\pi}{2}$ C) 9 D) $\frac{9}{2}$ E) $\frac{9}{4}$

22. $f(x) = \sqrt{11 - x} - \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x + 4}}$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun en geniş tanım aralığı, **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(-4, 11)$ B) $(-4, 11]$ C) $[-4, 11]$
D) $[-4, 11)$ E) $\mathbb{R} - (-4, 11)$

23. $f(x) = \dfrac{\sqrt{7 - |2x - 1|}}{x^2 - x}$ fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıktaki **tüm tamsayıların toplamı kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

24. Aşağıda $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ de tanımlanan fonksiyonların en geniş tanım kümeleri yanında verilmiştir. **Bu verilen ifadelerden kaç tanesi doğrudur?**

I. $f(x) = \log\left(\log(\log(x))\right)$, $A = (10, \infty)$

II. $f(x) = \log [\![\log(\log x)]\!]$, $A = [100, \infty)$

III. $f(x) = \log\left(\operatorname{sgn}(\log x)\right)$, $A = (10, \infty)$

IV. $f(x) = \log |\log x|$, $A = \mathbb{R}^+ - \{1\}$

V. $f(x) = \sqrt{1 + \log x}$, $A = \left(\dfrac{1}{10}, \infty\right)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

25. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sgn}(5 - x) - \operatorname{sgn}\left(\dfrac{x - 7}{x}\right)}$ fonksiyonunun tanımlı olduğu en geniş aralık **hangisidir?**

A) $(-\infty, \infty)$ B) $(-\infty, 5) - \{0\}$
C) $(-\infty, 7) - \{0, 5\}$ D) $(-\infty, 7) - \{0\}$
E) $(5, 7)$

26. $f(x) = \dfrac{\sqrt{13 - |2x - 1|}}{[\![\frac{x}{2} + 2]\!]}$ **fonksiyonunun tanımlı olduğu en geniş aralık hangisidir?**

A) $[-6, 7]$ B) $\mathbb{R} - [-4, -2)$
C) $\mathbb{R} - [-4, -2]$ D) $[-6, 7] - [-4, 2]$
E) $[-6, 7] - [-4, -2)$

27. $\displaystyle\sum_{k=1}^{1995} \operatorname{sgn}(k^2 + 7k - 30)$ **toplamının sonucu kaçtır?**

A) 1990 B) 1991 C) 1992
D) 1993 E) 1994

28. $\displaystyle\sum_{k=13}^{1035} [\![\log k]\!]$ **toplamının sonucu kaçtır?**

A) 1991 B) 1992 C) 1993
D) 1994 E) 1995

29. $[\![x]\!]$, $[\![x + [\![x + [\![x]\!]]\!]]\!]$, $[\![x + 4]\!]$ bir aritmetik dizinin üç terimi ise, **x hangi aralığın elemanıdır?**

A) $[0, 1)$ B) $[0, 1]$ C) $[1, 2)$
D) $[1, 2]$ E) $[2, 3)$

30. $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{3\}$,

$f(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 1}$ biçiminde verilen f(x) fonksiyonunun grafiğinde **koordinatları tamsayı olan kaç nokta vardır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

TEST 5

1. $f\left(\dfrac{2}{3+2x}\right) = x + 3$ şeklinde tanımlanan fonksiyon için, **f(–2) neye eşittir?**

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

2. $R \to R$, $f^{-1}(x) = 2x + 1$ olduğuna göre, **(fof) (3) neye eşittir?**

A) –1 B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

3. $f : R \to R$ fonksiyonu için, $(fof)(x) = 4x - 14$ ise **f(x) ne olabilir?**

A) $-2x - 14$ B) $2x + \frac{14}{3}$ C) $-2x - \frac{14}{3}$
D) $2x - 14$ E) $-2x + 14$

4. $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$ ve $(fog)(x) = 5x + 1$ olduğuna göre, **g(1) neye eşittir?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) -1 C) $-\frac{4}{3}$ D) -2 E) 0

5. $f(x) = 6x - 5$ ve $(fog)(x) = 4x - 3$ ise, **g(0) neye eşittir?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{7}$

6. $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = \dfrac{x-1}{2}$ ve $(fog^{-1})(a) = 9$ olduğuna göre, **a neye eşittir?**

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

7. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2 - 5x + 6}$ ile tanımlı, **f fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?**

A) R B) (2,3) C) [2,3]
D) R – {2, 3} E) R – [2, 3]

8. $f(x) = \sqrt{8-x} + \sqrt{x-5}$ fonksiyonunun **en geniş tanım kümesi nedir?**

A) (5, 8) B) [5, 8] C) R
D) ∅ E) R – [5, 8]

9. $f(x) = |x - 2| + x|x^2 - 2| - x^2(x+3) + 5$ olmak üzere; **f(1)+f(2) + f(–1)+f(–2) toplamı neye eşittir?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

10. $f(x) = |x + 1| - 1$ fonksiyonunun görüntü kümesinin en küçük elemanıyla,
$g(x) = 1 - |x + 1|$ fonksiyonunun görüntü kümesinin en büyük elemanının toplamı neye eşittir?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

11. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 25}}{\log_5(x - 2)}$ fonksiyonunun **en geniş tanım kümesi nedir?**

A) $(5, +\infty)$ B) $[5, +\infty)$ C) R
D) $\varnothing$ E) $R - (5, +\infty)$

12. f, R de bir fonksiyon ve $\forall\, x \in R$ için, $f(3x + 4) = mx^2 - 3x + 1$ dir. f in grafiği (1,5) noktasından geçtiğine göre, **m neye eşittir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{4 - |x - 7|}}$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?**

A) (3, 11] B) (3, 11) C) [3, 11]
D) R – {3} E) R – [3, 11]

14. $f(x) = \sqrt{5 - |2x - 1|} + \sqrt{x - 2}$
fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

A) $\varnothing$ B) (2, 3) C) R – (2, 3)
D) [2, 3] E) {2, 3}

15. $f : A \to R\ ;\ f(x) = \sqrt{\dfrac{|x| + 1}{|x| - 1}}$ fonksiyonunun **en geniş tanım kümesi nedir?**

A) R – [–1, 1] B) (– 1, 1) C) $\varnothing$
D) R E) R – (–1, 1)

16. $f(x) = \log\left(\dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{|x - 2| - 4}\right)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesindeki, **x tam sayılarının toplamı neye eşittir?**

A) –22 B) –21 C) –20 D) –19 E) –18

17. $f(x) = \text{sgn}(3 + x) + 3.\text{sgn}(2 - x) + \text{sgn}\,\dfrac{1}{x}$ ise
f(5) neye eşittir?

A) –4 B) –3 C) –2 D) –1 E) 0

18. $f(x) = 2x^2 - \text{sgn}(x^2 - 2) + 4x - 3$ ise
f(1) + f(–2) ifadesi neye eşittir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

19. $f(x) = \text{sgn}(x^2 - x + 1) + 5$ fonksiyonunun **görüntü kümesi nedir?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

20. $f(x) = 1 - \text{sgn}(2 - x)$ **fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?**

A) {0,1} B) {0, 1, 2} C) {0}
D) {0,2} E) {1}

21. $f(x) = \text{sgn}(x^2 - 4)$ ve
$g(x) = 2x^3 + 1$ ise,
(gof) (x) fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?

A) {–1} B) {–1, –2} C) {1}
D) {1, 3} E) {–1, 1, 3}

22. $f(x) = \sqrt{1 - sgn(x+2)}$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?**

A) R B) $(-\infty, -2)$ C) $(-\infty, -2]$
D) $\{-2\}$ E) $\varnothing$

23. $sgn(4 - x) - sgn(x + 3) = 2$ **denkleminin çözüm kümesi nedir?**

A) $\{-3\}$ B) $R - \{-3\}$ C) R
D) $(-\infty, -3)$ E) $(-\infty, -3]$

24. $sgn(sinx) = 1$ **denkleminin çözüm kümesi nedir?**

A) π B) $\frac{\pi}{2}$ C) $[0, \pi]$
D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $(0,\pi)$

25. $f(x) = [\![\log_3(2x+3)]\!] + [\![2^{-x} - 3]\!]$ için, **f(3) neye eşittir?**

A) 0 B) –1 C) 1 D) 2 E) 3

26. $f(x) = 5x - [\![\frac{2x-1}{4}]\!]$ ise, **f(7) neye eşittir?**

A) 30 B) 32 C) 33 D) 34 E) 35

27. $\{ [\![x+2]\!]$ ve $-3 \leq x < 0\}$ **kümesinin <u>en büyük</u> elemanı nedir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

28. $f : R \to R$, $f(x) = 2[\![x]\!] - 2x$ **şeklinde tanımlı fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?**

A) $(-2, 0)$ B) $[-2, 0]$ C) $[-1, 0]$
D) $[-1, 0)$ E) $(-2, 0]$

29. $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 1}{[\![x+4]\!] - sgn|x|}$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?**

A) R B) $\varnothing$ C) $(-5, -4]$
D) $R - [-5, -4)$ E) $R - [-3, -2)$

30. $f(x) = |x^2 - 1|$, $g(x) = [\![x + \frac{5}{2}]\!]$ ve
$h(x) = sgn(x^2 + 4)$ fonksiyonları veriliyor.
(fogoh) (x) neye eşittir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

31. $[\![|x-2|]\!] = 2$ **denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(-3, 0] \cup [4, 5)$ B) $(-1, 0] \cup [4, 5)$
C) $(-3, 5)$ D) $[0, 2) \cup [3, 5)$
E) $[-1, 4]$

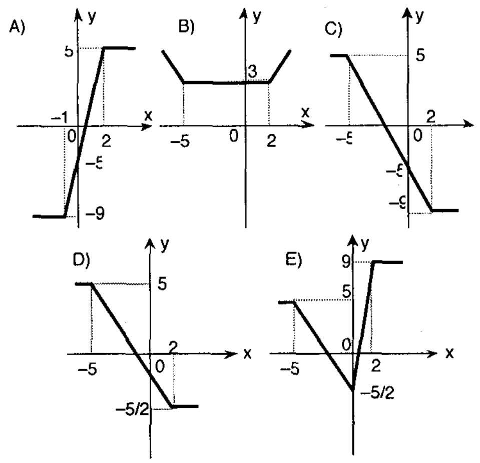
32. $[\![\log_2 x]\!] + [\![2 + \log_2 x]\!] - 6 = 0$ **denkleminin çözüm kümesi, aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $[2, 6)$ B) $[3, 5)$ C) $[4, 7)$
D) $[4, 8)$ E) $[0, 8)$

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

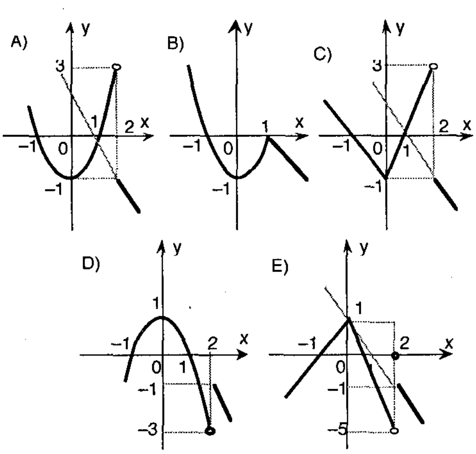
TEST 6

1. $f(x) = |x-2| - |x+5| - 2$ **fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

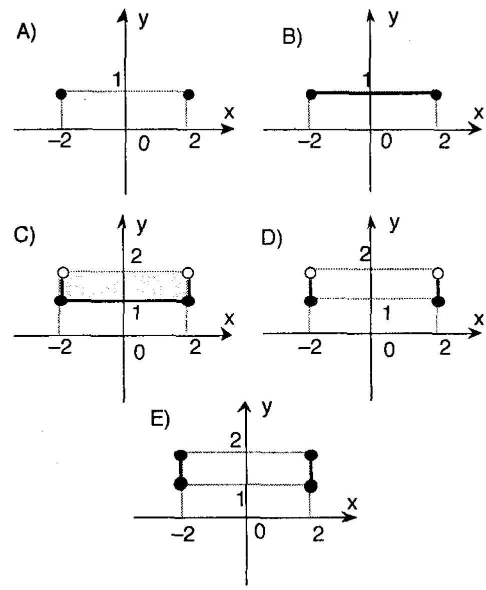


2. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \ x < 2 \\ 1 - |x| & , \ x \geq 2 \end{cases}$ biçiminde tanımlı

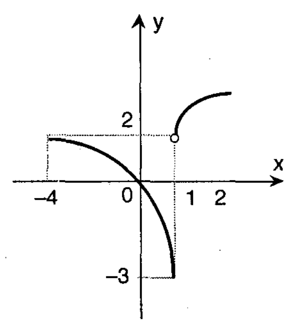
f(x) fonksiyonunun grafiği, aşağıdakilerden hangisidir?



3. $A = \{ (x, y) \in R \times R \ ; \ |x| = 2, [\![y]\!] = 1\}$ **bağıntasının grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

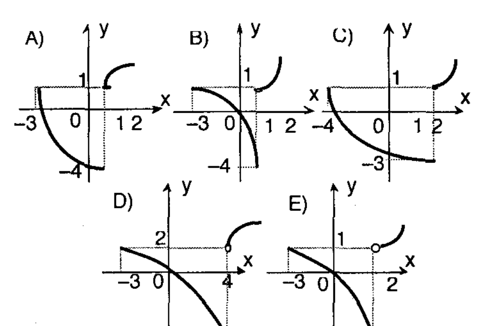


4.

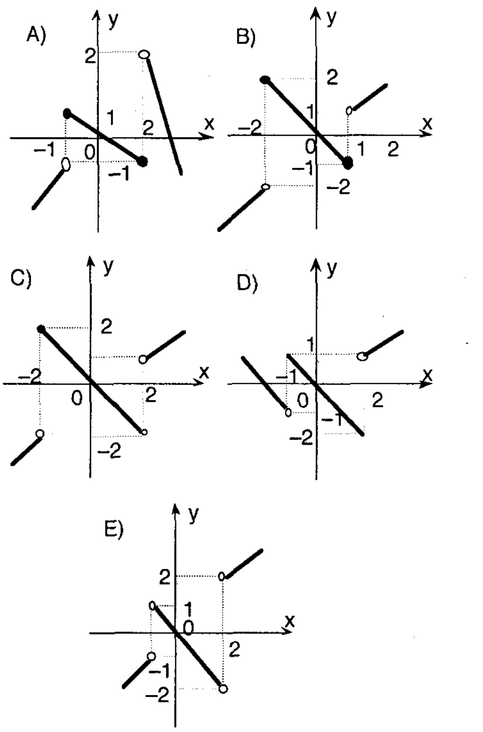


$f : [-4, \infty) \rightarrow [-3, \infty)$ birebir ve örten bir fonksiyondur.

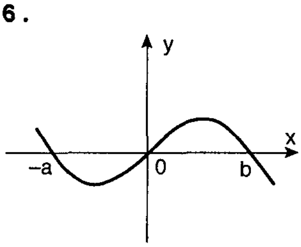
Bu fonksiyonun ters fonksiyonunun grafiği, aşağıdakilerden hangisidir?



5. $f(x) = \dfrac{x}{sgn(x^2 - x - 2)}$ **biçiminde verilen fonksiyonunun grafiği, aşağıdakilerden hangisidir?**

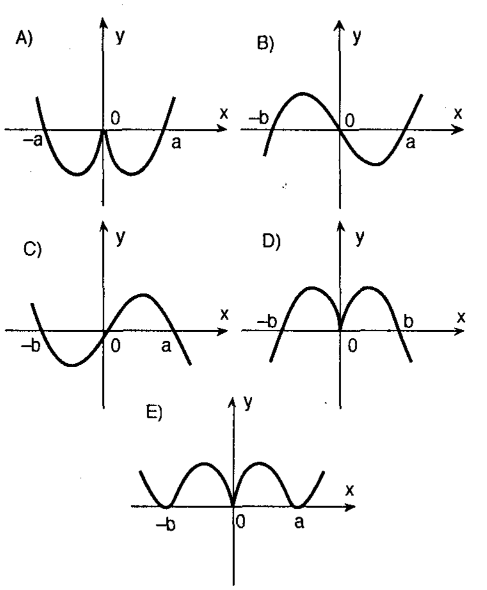


6.

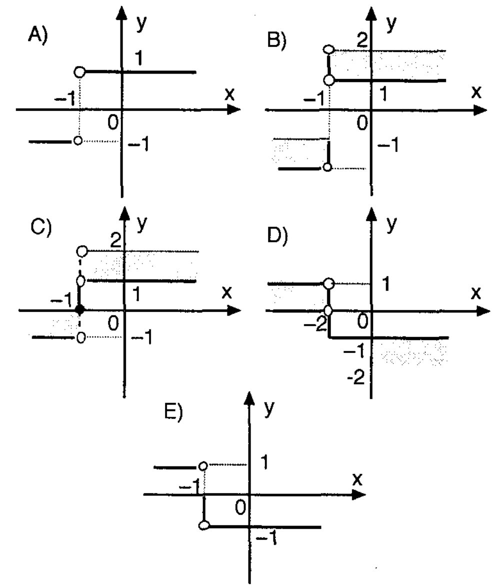


Şekilde f(x) fonksiyonunun grafiği çizilmiştir.

Buna göre, f(|x|) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

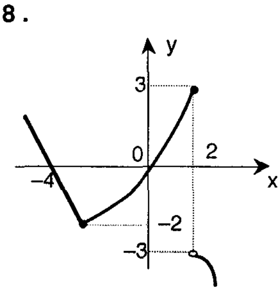


7. $[\![y]\!] = sgn(x + 1)$ **bağıntısının grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

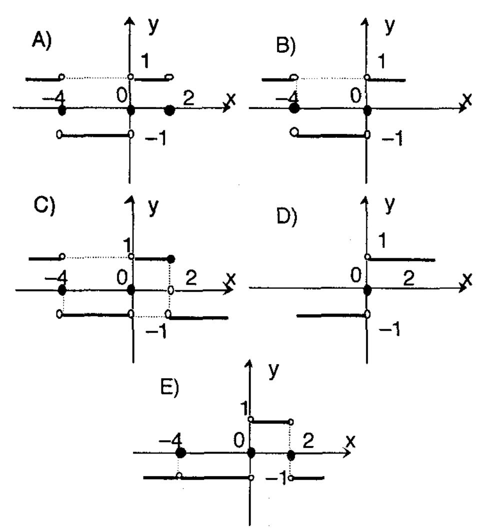


ZAFER YAYINLARI

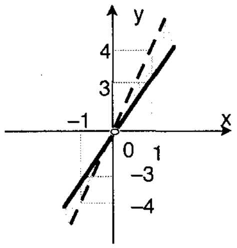
8.



Şekildeki grafik, y = f(x) fonksiyonuna aittir. Buna göre, y = sgn(f(x)) fonsiyonunun grafiği **aşağıdakilerden hangisidir?**



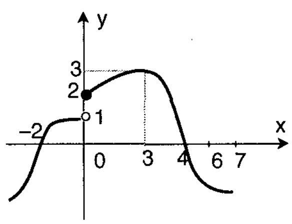
9.



Yandaki grafik aşağıdaki bağıntılardan hangisine aittir?

A) $[\![y]\!] = 4[\![x]\!]$
B) $[\![y]\!] = [\![4x]\!]$
C) $[\![y]\!] = 3[\![x]\!]$
D) $[\![y]\!] = [\![3x]\!]$
E) $[\![\frac{y}{x}]\!] = 3$

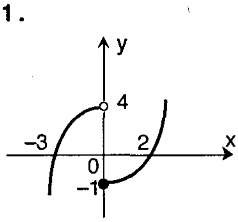
10.



Şekilde f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) $[\![f(2)]\!] = 2$
B) $[\![-f(1)]\!] = -3$
C) $\operatorname{sgn}(f(6)) = -1$
D) $\operatorname{sgn}(f(-1)) = 1$
E) $\operatorname{sgn} f(-4) + \operatorname{sgn} f(7) = 2$

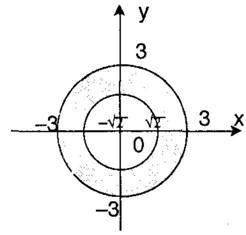
11.



Şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği çizilmiştir.
$g(x) = [\![x]\!] + 1$ ise
$(gof)(1) + (fog)\left(-\frac{7}{2}\right)$
toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

12.



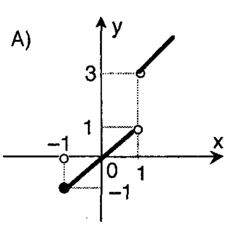
Taralı bölge aşağıdaki bağıntılardan hangisini belirler?

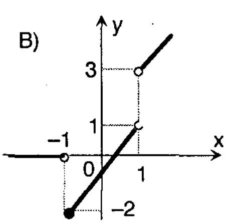
A) $1 \le [\![x^2 + y^2]\!] \le 9$
B) $1 < [\![x^2 + y^2]\!] \le 8$
C) $2 \le [\![x^2 + y^2]\!] \le 9$
D) $2 \le [\![x^2 + y^2]\!] \le 3$
E) $1 \le [\![x^2 + y^2]\!] < 3$

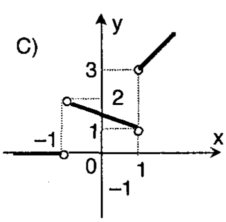
13. $f(x) = \begin{cases} -2 & ; x < -1 \\ x + 1 & ; x \ge -1 \end{cases}$ ve

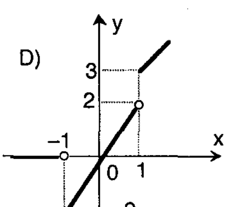
$g(x) = \begin{cases} 2 & ; x < -1 \\ x - 1 & ; -1 \le x < 1 \\ x & ; x \ge 1 \end{cases}$

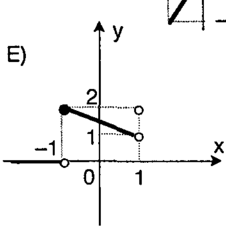
olduğuna göre, **(f + g) (x) in grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A)


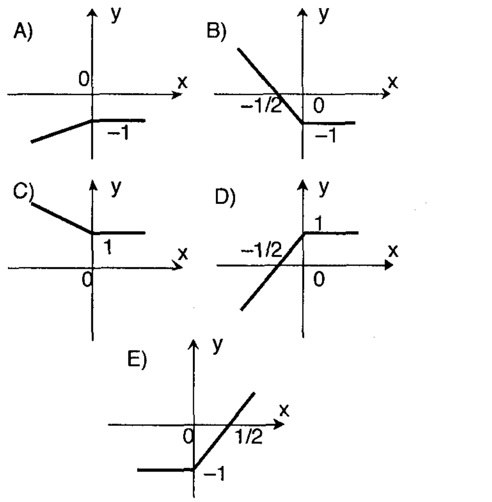
B)


C)


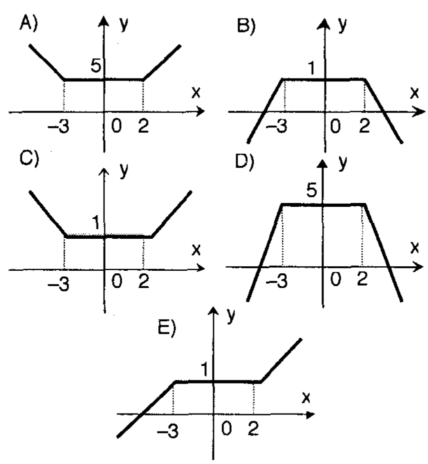
D)


E)


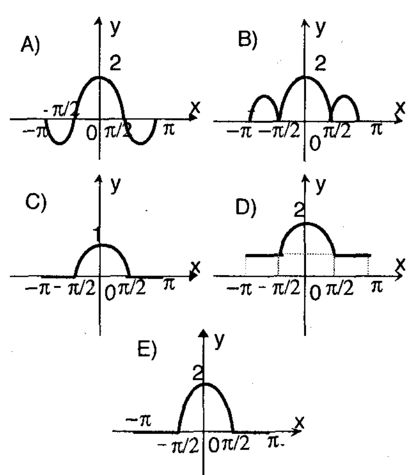
14. $f(x) = |x| - x - 1$ **fonksiyonunun grafiği, aşağıdakilerden hangisidir?**



15. $f(x) = |x - 2| + |x + 3| - 4$ fonksiyonunun grafiği **aşağıdakilerden hangisidir?**



16. $f : [-\pi, \pi] \to R$, $f(x) = |\cos x| + \cos x$ **fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

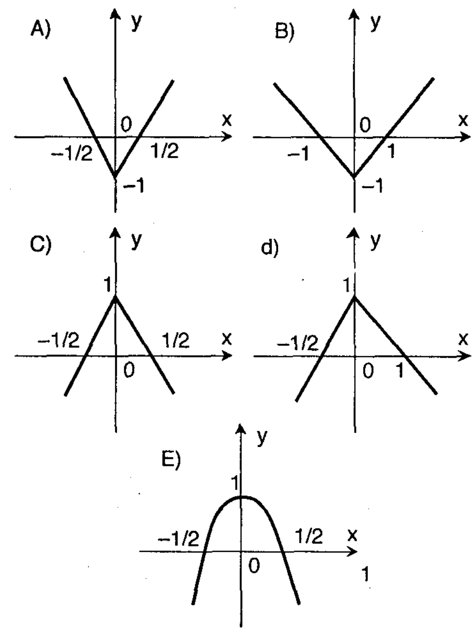


17. $R \to R$ ye $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları,

$f : x \to 2 - |x|$

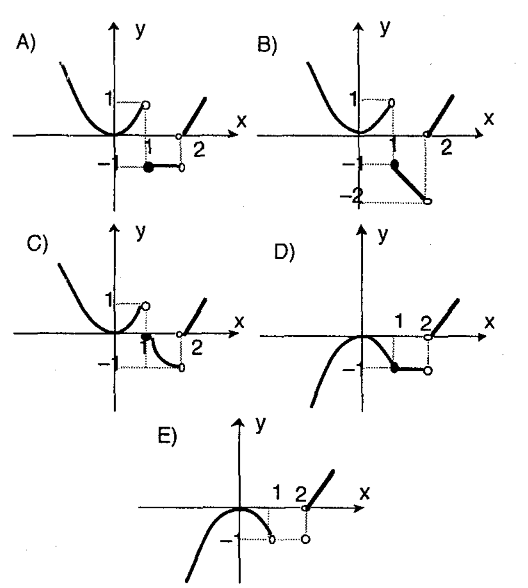
$g : x \to 2x - 3$ biçiminde tanımlanmıştır.

Buna göre, (gof) (x) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

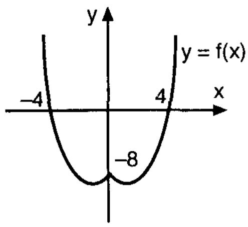


18. $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \ x < 1 \\ \text{sgn}(-x) & ; \ 1 \le x < 2 \\ |x - 2| & ; \ x > 2 \end{cases}$

biçiminde tanımlanan fonksiyonunun grafiği, aşağıdakilerden hangisidir?



19.

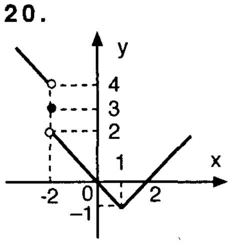


Şekilde, y= f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, y=f(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $y = x^2 + 2|x| - 8$
B) $y = x^2 - 2|x| - 8$
C) $y = x^2 - |x| - 8$
D) $y = x^2 + |x| - 8$
E) $y = x^2 - |x| + 8$

20.

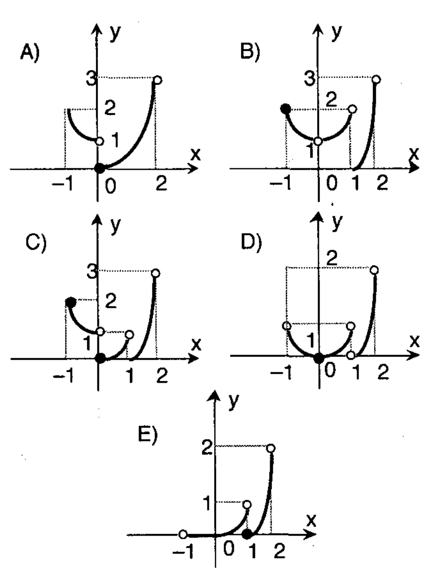


Şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği çizilmiştir.

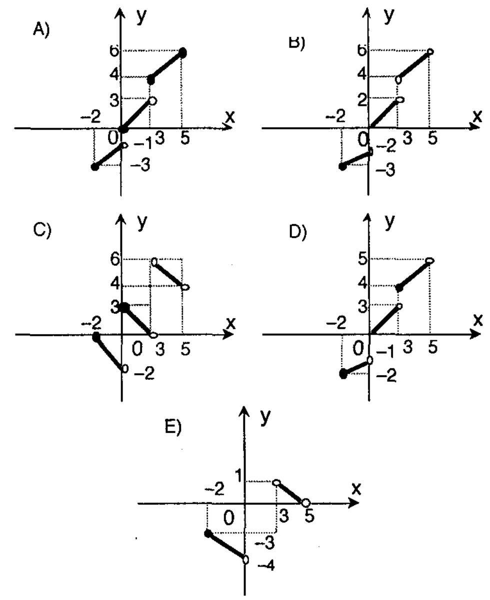
Buna göre, y=f(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $y = |x - 1| + sgn(x + 2)$
B) $y = |x - 1| + sgn(x + 2) - 2$
C) $y = |x| - sgn(x + 2)$
D) $y = |x - 1| - sgn(x + 2)$
E) $y = |x| + sgn(x + 2) - 3$

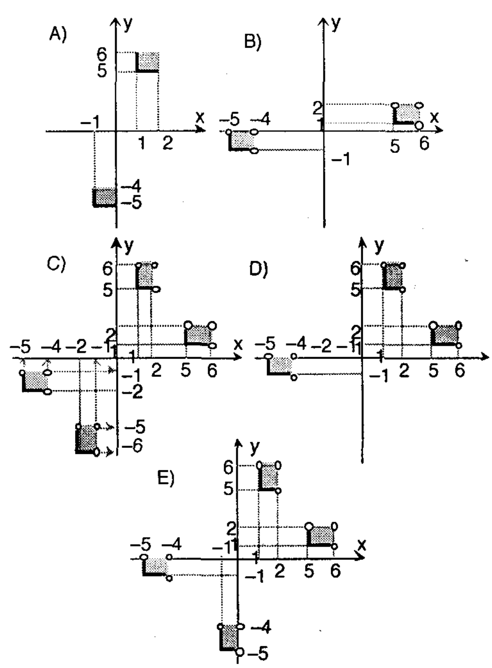
21. $f : [-1, 2) \to R$, $f(x) = x^2 - [\![x]\!]$ **biçiminde tanımlanan f(x) fonksiyonunun grafiği, aşağıdakilerden hangisidir?**



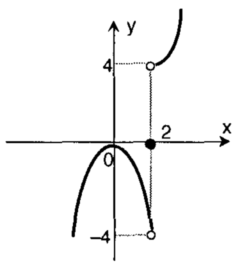
22. $f : [-2, 5] \to R$, $f(x) = x + [\![\frac{x}{3}]\!]$ **biçiminde tanımlanan fonksiyonunun grafiği, aşağıdakilerden hangisidir?**



23. $[\![x]\!] \cdot [\![y]\!] = 5$ **bağıntısının grafiği, aşağıdakilerden hangisidir?**



24.



Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $y=f(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $y = x^2 + \text{sgn}(x + 2)$

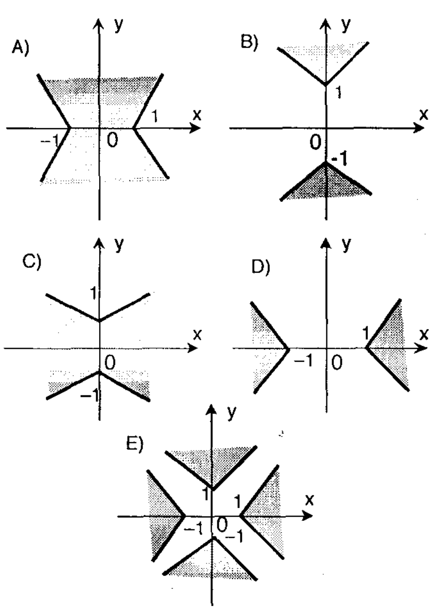
B) $y = x^2 \, \text{sgn}(x + 2)$

C) $y = x^2 \, \text{sgn}(x - 2)$

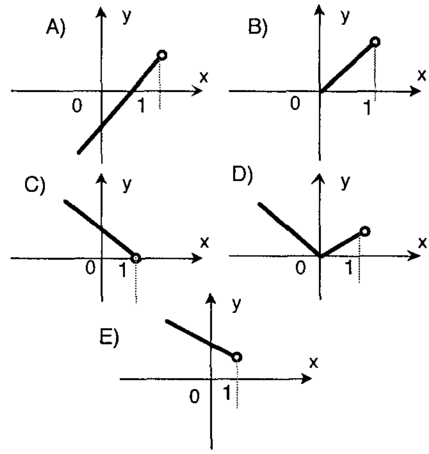
D) $y = x^2 + \text{sgn}(x - 2)$

E) $y = \text{sgn}(x^2 - 2)$

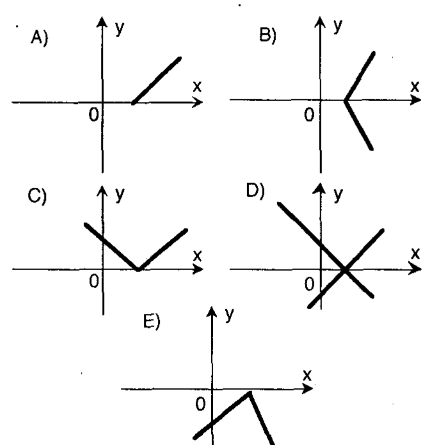
25. $|y| \leq |x| - 1$ **bağıntısının grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



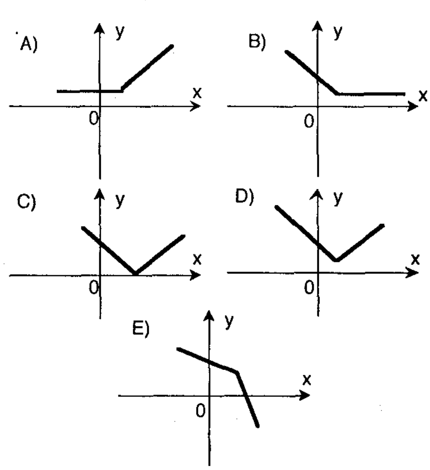
26. $x < 1$ iken $y = \text{sgn}(x - 2) + |x - 3|$ **fonksiyonunun grafiği, aşağıdakilerden hangisi olabilir?**



27. $|y| = 3x - 1$ **bağıntısının grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?**



28. $y = 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ **fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?**



ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

TEST 7

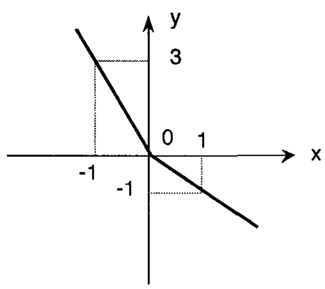
1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi veriliyor.

$B \subset A$ olmak üzere $B \to A$ tanımlanabilecek kaç fonksiyon vardır?

A) 123 B) 256 C) 436 D) 512 E) 624

2.

$R \to R$ ye tanımlı, $f(x) = 2x - |-x|$ ve $g(x) = ax$ fonksiyonları için, $(fog)(x)$ in grafiği yukarıda verilmiştir. **Buna göre a nın değeri kaçtır?**



A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

3. $R \to R$ ye $f(x) = \begin{cases} x & , 1 \le x < 3 \text{ ise} \\ -x + 8 & , 3 \le x \le 5 \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı f fonksiyonu için, $f^{-1}[2,4]$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[2, 3) \cup [4, 5]$ B) $[1, 2) \cup [3, 4]$
C) $[2, 3) \cup [3, 5]$ D) $[1, 2) \cup [2, 4]$
E) $[2, 4] \cup (4, 5)$

4. $A = \{1, 2, 3, ..., 100\}$ kümesinde

$f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ..... & 100 \\ 2 & 3 & 4 & ..... & 1 \end{pmatrix}$

biçiminde bir permütasyon fonksiyon tanımlanıyor.

$\underbrace{(fofo \; .... \; of)}_{50 \text{ tane}}(1)$

değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 1 B) 50 C) 51 D) 99 E) 100

5. $|3x - 1| + x = m$ denkleminin reel iki kökü olması için, **m aşağıdaki aralıkların hangisinde olmalıdır?**

A) $(-\infty, -3)$ B) $(-\infty, -3]$ C) $(-3, \frac{1}{3})$
D) $(\frac{1}{3}, \infty)$ E) $(\frac{1}{3}, 3)$

6. $f(x) = |x - m|$ ve $g(x) = \frac{x}{2} + 2$ fonksiyonlarının, **grafiklerinin kesim noktalarının apsisleri toplamı 8 ise m kaçtır?**

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

7. $y = mx$ doğrusunun $y = x^2 + x - 6$ parabolünü, **başlangıç noktasına göre simetrik iki noktada kesmesi için m ne olmalıdır?**

A) -3 B) -2 C) -1 D) 1 E) 3

8. **$y = x^2 - 3x - 5$ parabolünün (0,0) noktasına göre simetriğinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

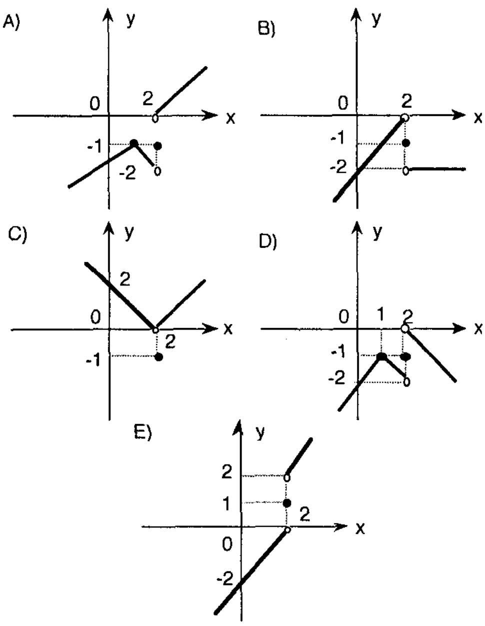
A) $y = -x^2 + 3x + 5$ B) $y = x^2 - 3x + 5$
C) $y = -x^2 - 3x + 5$ D) $y = -x^2 - 3x - 5$
E) $y = -x^2 + 3x - 5$

9. $f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$ fonksiyonu için,

$\frac{1 + f(a) \cdot f(b)}{f(a) - f(b)} = 1$ ise **b'nin a türünden değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{1 + a}{1 - a}$ B) $\frac{1 - a}{1 + a}$ C) $\frac{1}{1 - a}$
D) $\frac{1}{1 + a}$ E) $1 - a$

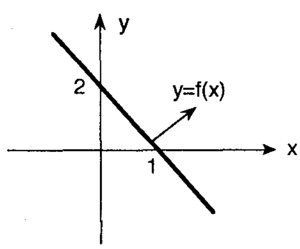
10. $f(x) = \text{sgn}(x-2) - |x-1|$ **fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

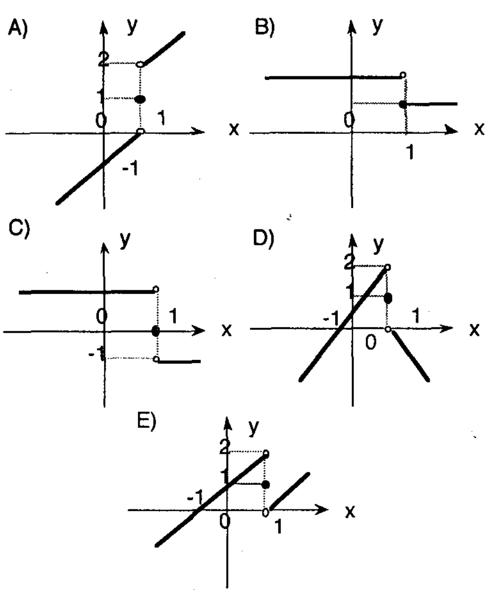


11.

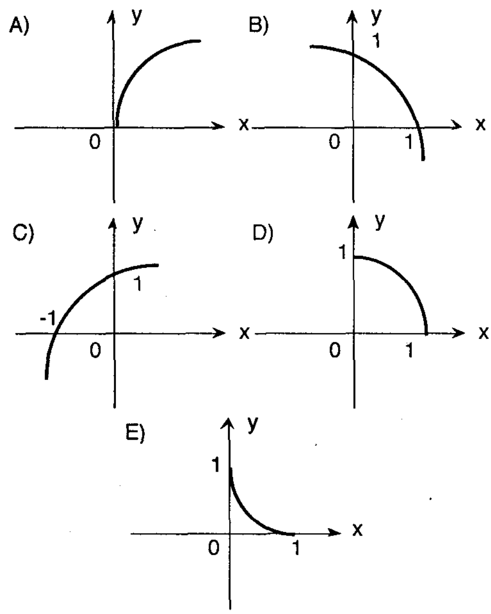
$f : R \to R$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir.

$y = x + \text{sgn}f(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

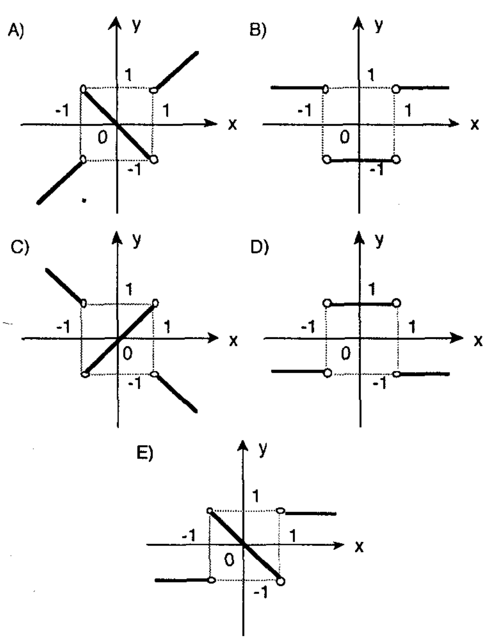




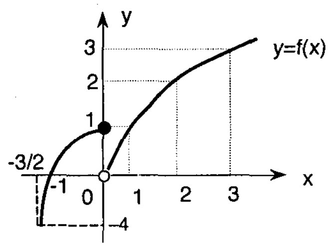
12. $y = f(x) = \sqrt{x}$ ve $g(y) = \sqrt{1-y}$ fonksiyonları veriliyor. **$h(x) = (gof)(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



13. $f : R - \{-1, 1\} \to R$, $f(x) = \dfrac{x}{\text{sgn}(x^2-1)}$ **fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



14.



$f : R \to R$ ye tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği yukarıda verilmiştir.

$g : R \to R$,

$$g(x) = \begin{cases} \llbracket f(x) \rrbracket & , \ x \geq 0 \text{ ise} \\ \operatorname{sgn}(f(x)) & , \ -1 \leq x < 0 \text{ ise} \\ \operatorname{sgn} \llbracket f(x) \rrbracket & , \ x < -1 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı g(x) fonksiyonu için

$g\left(\frac{3}{2}\right) + g\left(-\frac{1}{2}\right) + g\left(-\frac{3}{2}\right)$ **toplamı nedir?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

15. $\forall x \in R$ için $f(\llbracket x \rrbracket) = \llbracket f(x) \rrbracket$ **koşulunu aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi sağlar?**

A) $f(x) = x - 3$
B) $f(x) = x^2$
C) $f(x) = x + \frac{1}{4}$
D) $f(x) = x^2 - 1$
E) $f(x) = 2x - 5$

16. $f(x) = \llbracket \sin x \rrbracket$ ve $g(x) = \sin \llbracket x \rrbracket$ fonksiyonları veriliyor. $f(x) = g(x)$ olması için **x aşağıdakilerden aralıkların hangisinde olmalıdır?**

A) $[0, \frac{\pi}{2}]$ B) $[0, \pi]$ C) $[0, 1)$
D) $[-1, 1]$ E) $[-1, 0)$

17. $\llbracket x \rrbracket - \llbracket \frac{x}{2} \rrbracket = 0$ **denkleminin çözüm kümesi, aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $[-1, 0)$ B) $[0, 1)$ C) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
D) $[-1, 1)$ E) $[-1, 1]$

18. $[0, \sqrt{2})$ **aralığı aşağıdaki denklemlerden hangisinin çözüm kümesidir?**

A) $\llbracket x^2 \rrbracket = \llbracket x \rrbracket$ B) $\llbracket x^2 \rrbracket = \llbracket x \rrbracket^2$
C) $\llbracket x \rrbracket = \llbracket x^3 \rrbracket$ D) $\llbracket x^2 \rrbracket = \llbracket x^2 \rrbracket^2$
E) $\llbracket x \rrbracket = \llbracket x^2 \rrbracket^2$

19. $x \in R$ olmak üzere,

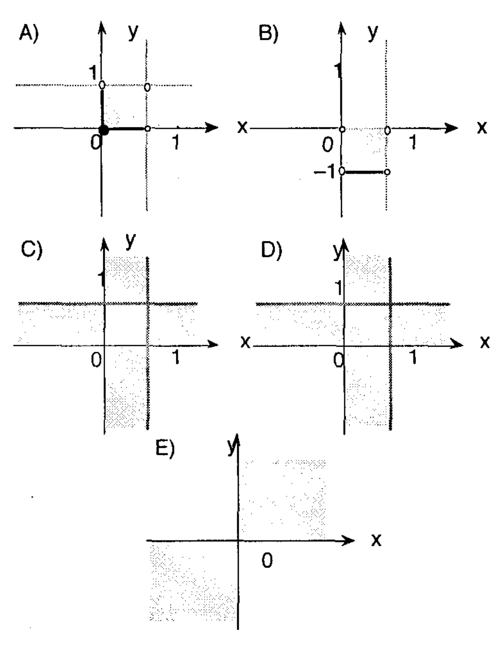
$f(x) = \llbracket x - \llbracket x - \llbracket x \rrbracket \rrbracket \rrbracket$ fonksiyonu için, **aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) $f(R) = \{0\}$ B) $f(R) = [0, 1]$
C) $f(R) = \{0, 1\}$ D) $f(R) = R$
E) $f(R) = Z$

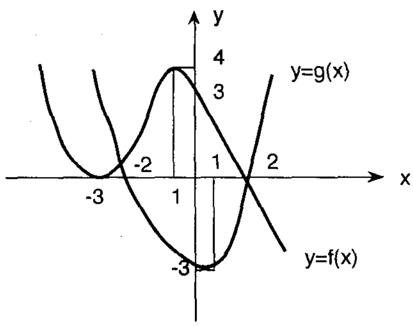
20. $f(x) = \llbracket x \rrbracket^{\llbracket x \rrbracket}$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesi, aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $R - Z$ B) $R - \{0\}$ C) $R - (-1, 1)$
D) $R - [0, 1)$ E) $[0, 1)$

21. $\llbracket x \rrbracket \cdot \llbracket y \rrbracket = 0$ **bağıntısının grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



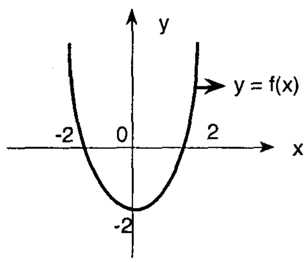
22.



Şekilde grafikleri verilen f ve g fonksiyonları için (fofog) (x) = 3 ise **x kaç olabilir?**

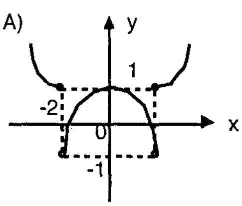
A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 1

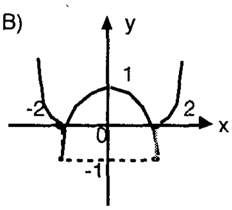
23.

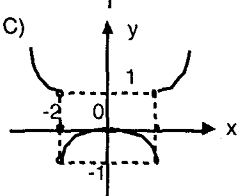


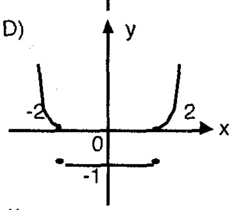
f : R →R ye y = f(x) fonksiyonunun grafiği yukarıda verilmiştir.

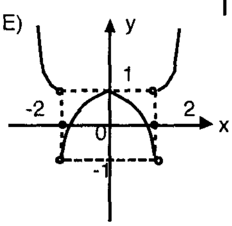
g(x) = |f(x)| + sgnf(x) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A)


B)


C)


D)


E)


24. $f(x) = \dfrac{-1}{sgn\sqrt{[\![cosx]\!]}}$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(0, 2\pi)$

B) $\left[2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi, 2\pi+2k\pi\right]$

C) $(2k + 1) . \pi$

D) $2k.\pi$

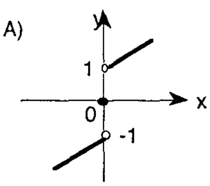
E) $k.\pi$

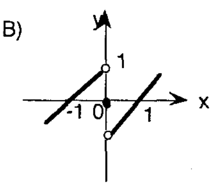
25. f : R → R, f(x) = cos(π.sgnx) **biçiminde tanımlı fonksiyonun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

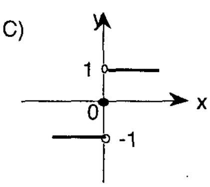
A) {–1} B) {–1, 1} C) {0, 1}
D) {–1, 0} E) {–1, 0, 1}

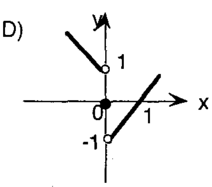
26. f : R → R, y = f(x) fonksiyonunun grafiği orijine göre simetriktir.

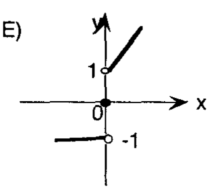
f(x) = 2x + f(–x) – 2 Sgn (–x) **ise f(x) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A)


B)


C)


D)


E)


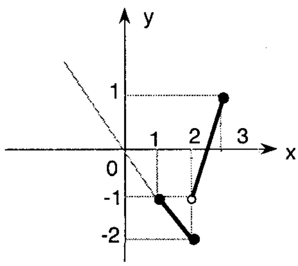
27. f : [2, 4) → R, $f(x) = 3x - 2[\![x]\!] - 4$ **fonksiyonunun x eksenini kestiği noktaların apsisleri toplamı nedir?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

TEST 8

1.



$f : [1, 3] \to R,\ f(x) = \begin{cases} x - 2 \cdot |x| & , x \le 2 \text{ ise} \\ 2x - m & , x > 2 \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı fonsiyonun grafiği yanda verilmiştir.

Buna göre $f\left(\frac{m}{5}\right)$ **değeri kaçtır?**

A) –1 B) –2 C) –3 D) –4 E) –5

2. $f(x) = |x|,\ g(x) = \begin{cases} 2 & , x < 0 \text{ ise} \\ 0 & , x = 0 \text{ ise} \\ -2 & , x > 0 \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı f ve g fonksiyonları için **(f.g) (x) aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $2x$

B) $-2x - 2$

C) $-2x$

D) $\begin{cases} 2x & , x < 0 \text{ ise} \\ -2x & , x \ge 0 \text{ ise} \end{cases}$

E) $\begin{cases} -2x & , x < 0 \text{ ise} \\ 2x & , x \ge 0 \text{ ise} \end{cases}$

3. $-\frac{5}{2} < x < -2$ olmak üzere;

$f(x) = |x + 2| - [\![2x - 1]\!]$ **fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $2 - x$ B) $4 - x$ C) $2 + 3x$
D) $6 - x$ E) 2

4. $R \to R$ ye tanımlı f ve g fonksiyonları

$f(x) = \max(1 - 2x, 3)$ ve $g(x) = [\![\frac{x}{2}]\!]$ biçiminde tanımlıdır. **Buna göre (gof) (–2) aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

5. $R \to R$ ye tanımlı

I. $f(x) = \sin(x + 1)$
II. $g(x) = x - [\![x]\!]$
III. $h(x) = t \quad (x = 4k + t,\ t \in R$ ve $k \in Z)$

biçiminde tanımlı fonksiyonlardan, hangisi ya da hangileri periyodiktir?

A) Yalnız I B) Yalnız I ve II
C) Yalnız II D) Yalnız III
E) I, II ve III

6. Gerçel sayılar kümesinde tanımlı

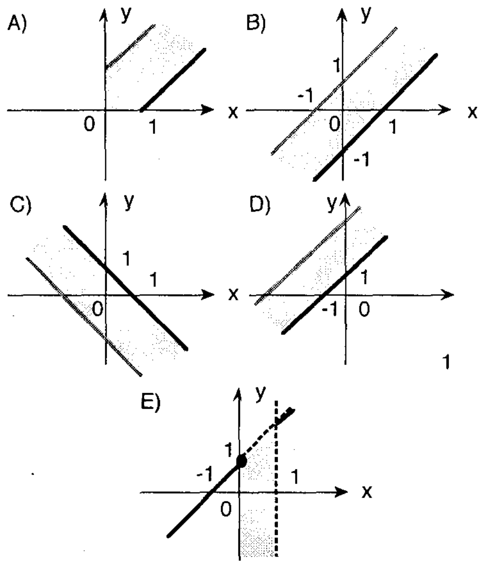
$\beta = \{(x, y) \mid y = x^2\}$ bağıntısı veriliyor.

$\beta \cap \beta^{-1}$ **kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

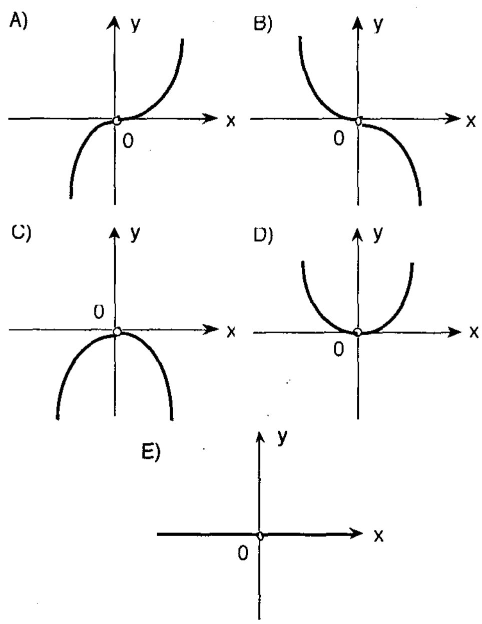
A) $\{(0, 0)\}$ B) $\{(1, 1)\}$
C) $\{(0, 0), (1, 1)\}$ D) $\{(-1, 1), (1, 1)\}$
E) $\varnothing$

ZAFER YAYINLARI

7. $\beta = \{ (x, y) \mid 0 \leq x < 1,\ y < x + 1 \text{ ve } x, y \in R\}$ **bağıntısının grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



8. $f : R - \{0\} \to R,\ f(x) = \dfrac{x \cdot |x|}{sgnx}$ **fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



9. $3x + [\![x]\!] = 6$ **denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

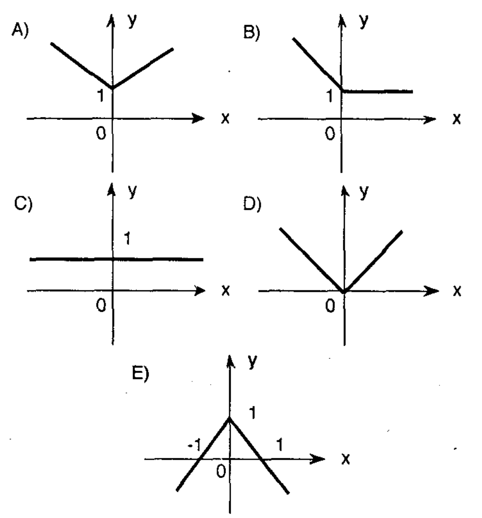
A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) 2 E) $\frac{7}{3}$

10. $f(x) = x^2 + sgn(-x^2 + 5x - 4)$ **fonksiyonunun grafiği, aşağıdaki aralıkların hangisinde x – eksenini kesmez?**

A) $(-4, -1)$ B) $(-\infty, 1]$ C) $(1, 4)$
D) $[1, 4]$ E) $[4, \infty)$

11. $f : R \to R,\ f(x) = \max(x + 1, -x + 1)$

f(x) biçiminde tanımlı fonksiyonunun grafiği, aşağıdakilerden hangisidir?



12. $n \in N^+$ olmak üzere,

$[\![n]\!] + [\![n + \frac{1}{n}]\!] + [\![n + \frac{2}{n}]\!] + \ldots + [\![n + \frac{n-1}{n}]\!]$

toplamı, aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 2n B) 3n C) 4n D) n^2 E) n^3

13. $f(x) = 3 - \text{sgn}\left(\dfrac{1-x}{4-x}\right) - |x|$ fonksiyonu veriliyor. **$x \in (1, 4)$ için f(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi ile ifade edilebilir?**

A) $f(x) = 1 - x$
B) $f(x) = 2 - x$
C) $f(x) = 3 - x$
D) $f(x) = 4 - x$
E) $f(x) = 5 - x$

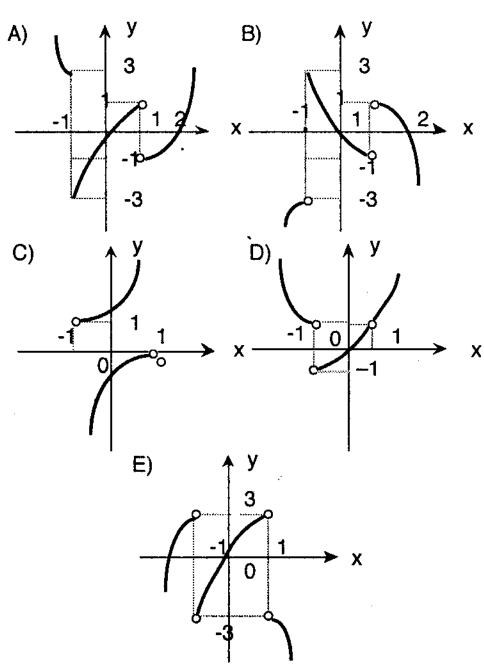
14. $x \neq 0$ olmak üzere;

$(x \quad + 1) \,.\, \text{sgn}x + |x|$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $|x + 1|$
B) $2x + 1$
C) $\text{sgn}x.(2x + 1)$
D) $|2x + 1|$
E) $\text{sgn}(x + 1)$

15. $f : R - \{-1, 1\} \to R,\ f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{\text{sgn}(x^2 - 1)}$

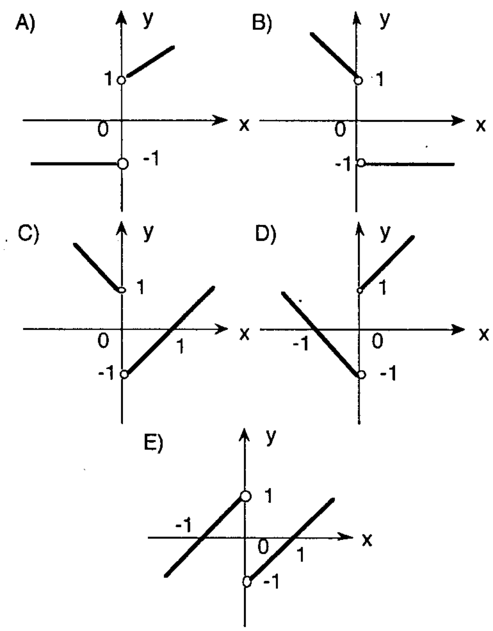
fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



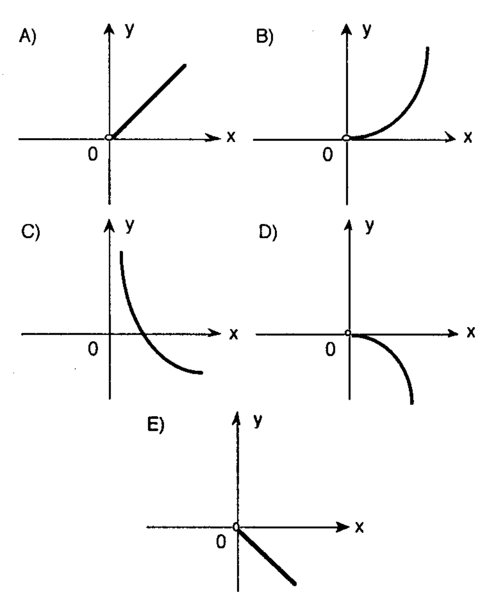
16. $f : R \to R$, $f(5 - 4x) = 7x$ ise $[\![f(-5)]\!]$ **kaçtır?**

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

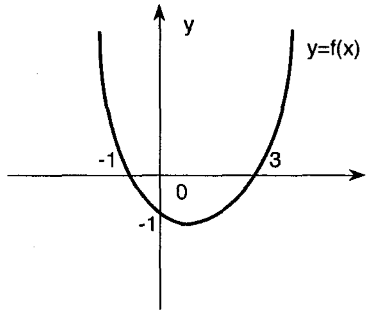
17. $f : R - \{0\} \to R,\ f(x) = |x| - \text{sgn}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



18. $\forall\, x, y \in R^+$ için $f\left(\dfrac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ **ise f fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?**



19.



$y = f(x)$ ile tanımlı $f : R \to R$ fonksiyonunun grafiği yukarıda verilmiştir.

$A = \left[\!\left[f\left(-\frac{1}{2}\right) \right]\!\right] . \operatorname{sgn}(f(-8)) + 4$

ifadesinin değeri nedir?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

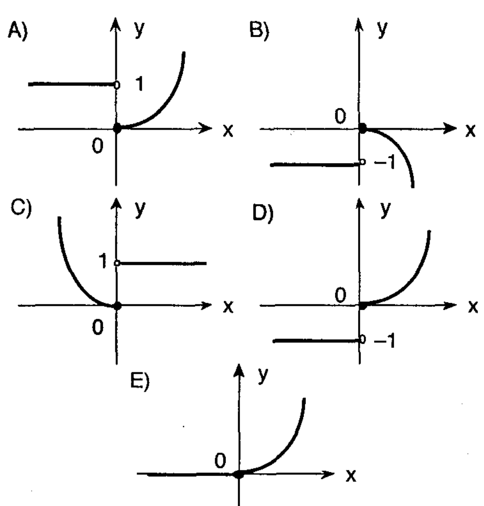
20. $x \in R^+$ olmak üzere;

$[\![7x]\!] - 3.[\![x]\!] = 3$ **denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

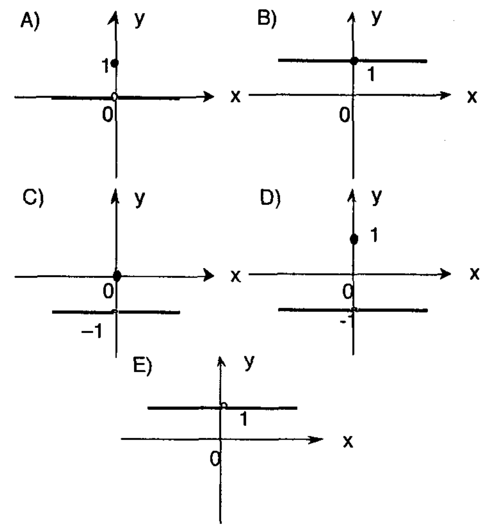
A) $[0, 1)$ B) $[0, \frac{1}{7})$ C) $[\frac{2}{7}, \frac{3}{7})$

D) $[\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$ E) $[\frac{4}{7}, \frac{5}{7})$

21. $f : R \to R$, $f(x) = x^{(1 + \operatorname{sgn}x)}$ **fonksiyonunun grafiği, aşağıdakilerden hangisidir?**

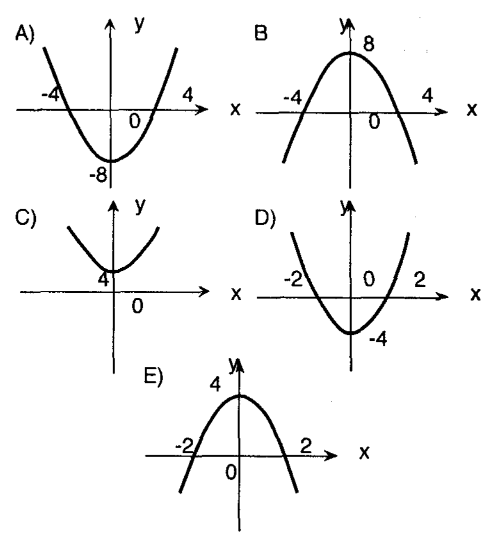


22. $f(x) = (-1)^{\operatorname{sgn}(-x)}$ **fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

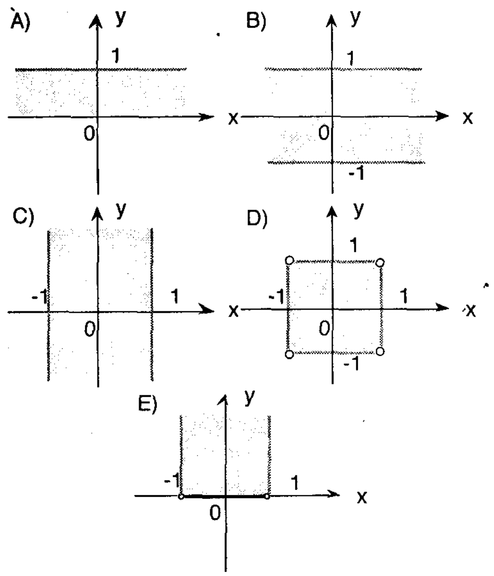


23. $f : R \to R$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetriktir.

$\forall x \in R$ için $f(x) = 8 - 2x^2 - f(-x)$ ise **f(x) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



24. $\beta = \{(x, y) \in R^2 : |x| \leq \text{sgn}y\}$ **bağıntısının grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

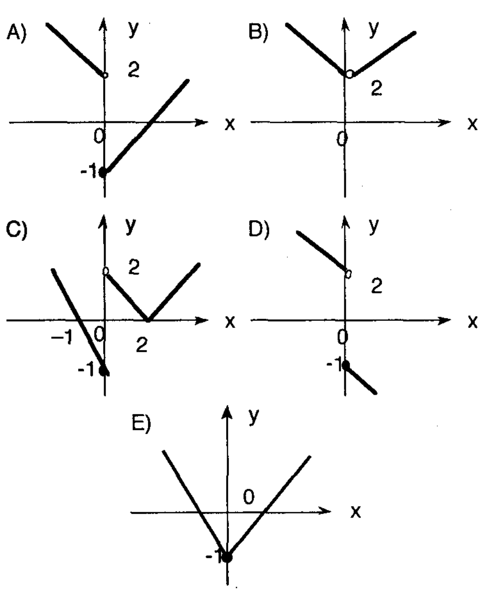


25. $R \to R$ ye f ve g fonksiyonları,

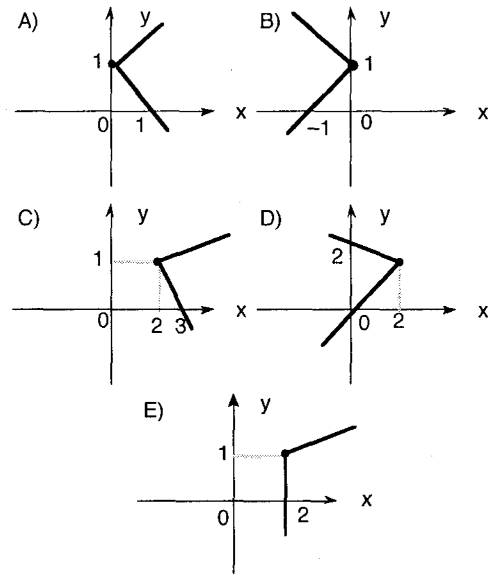
$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & , \; x \leq 0 \text{ ise} \\ |x + 2| & , \; x > 0 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve}$$

$$g(x) = \begin{cases} |x| & , \; x \leq 0 \text{ ise} \\ x.\text{sgn}(-x-3), & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

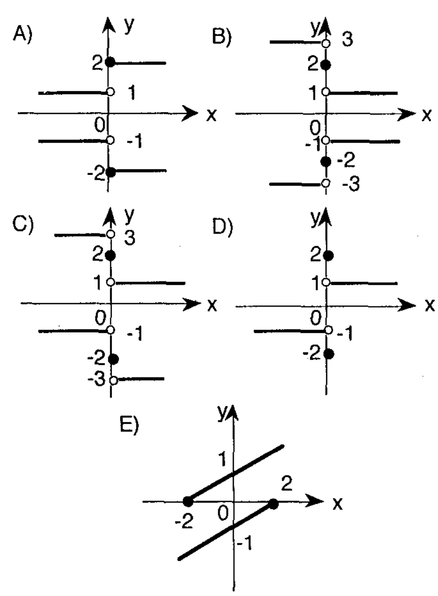
biçiminde tanımlanıyor. **(fog) (x) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



26. **$x = |y - 1| + 2$ bağıntısının grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



27. $\forall x, y \in R$ için $|y| + \text{sgn}x = 2$ **bağıntısının grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

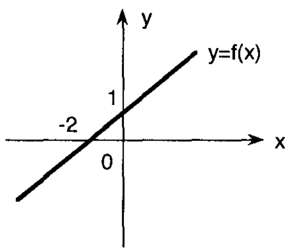
TEST 9

1. $y = x + a$ doğrusu, a nın hangi değerleri için $[2,\ 3)$ aralığında $y^2 = x\ .\ [\![x]\!]$ **fonksiyonunun grafiğini kesmez?**

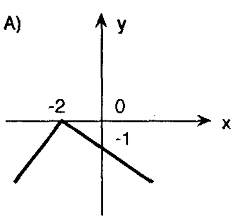
A) $(0, \frac{1}{2}]$ B) $(\frac{1}{2}, \infty)$ C) $[\frac{1}{2}, \infty)$

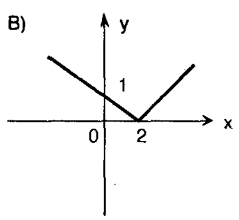
D) $(-\infty, -\frac{1}{2})$ E) $(-\infty, -\frac{1}{2}]$

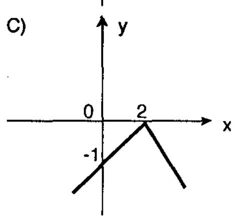
2.

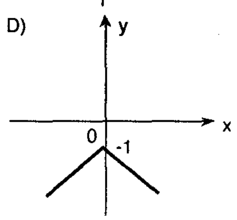


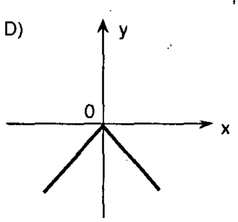
$f: R \rightarrow R$,
$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği yukarıdadır.
$y = -|f(-x)|$
grafiği, aşağıdakilerden hangisidir?

A)


B)


C)


D)


D)


3. $x \in R$ olmak üzere;

$\cos[\![2x]\!] = 0$ **denkleminin çözüm kümesi, aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $[0, \frac{\pi}{2}]$ B) $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ C) $\{\frac{\pi}{2}, 2\pi\}$

D) $\{0, \pi, 2\pi\}$ E) $\varnothing$

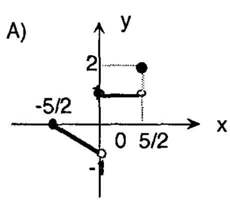
4. $-3 < x < -2$ olmak üzere;

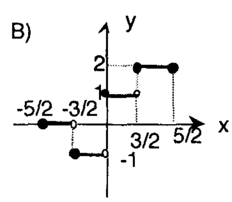
$f(x) = [\![-x]\!] - |-2x + 1| + \text{sgn}x$ biçiminde tanımlı f(x) fonksiyonu **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

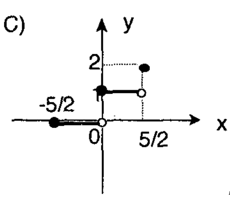
A) $2x$ B) $2x + 2$ C) $-2x - 4$

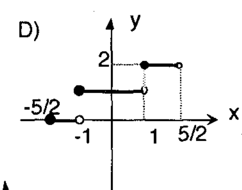
D) $2x + 4$ E) $-2x + 2$

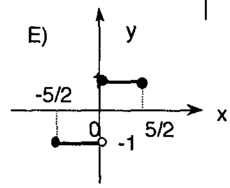
5. $\left.\begin{array}{l} f: \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right] \rightarrow R \\ f(x) = y = [\![\frac{2x}{5} + 1]\!] \end{array}\right\}$ fonksiyonunun grafiği, **aşağıdakilerden hangisidir?**

A)


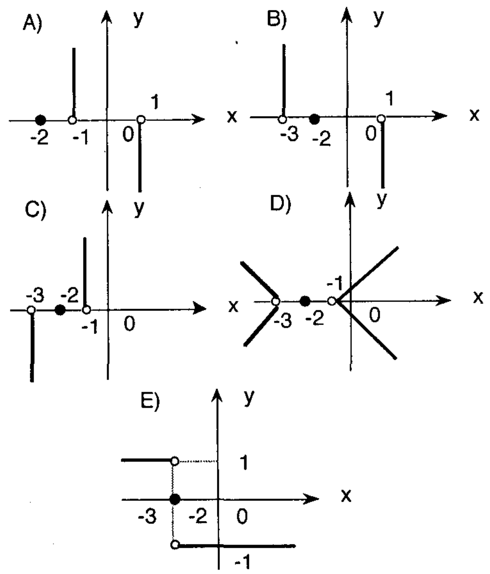
B)


C)


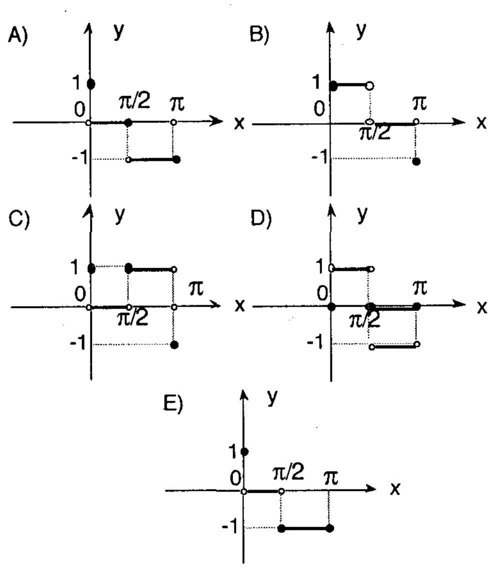
D)


E)


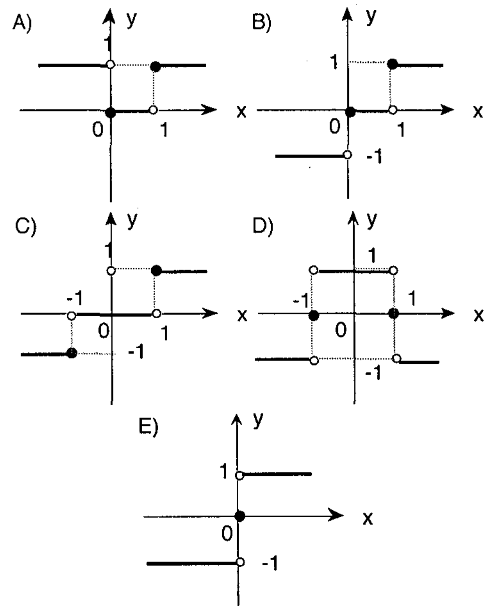
6. sgny – x = 2 **bağıntısının grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



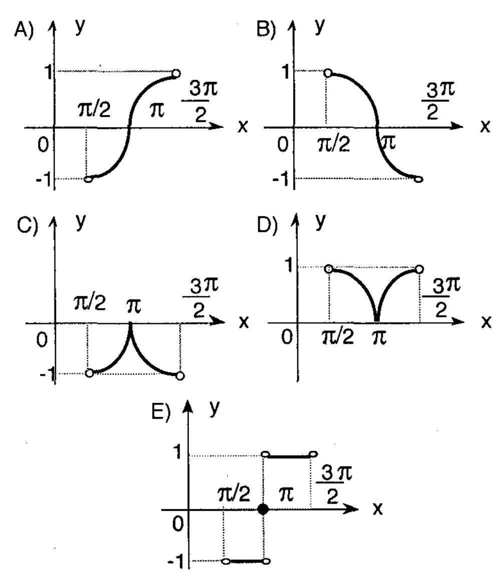
7. f : [0, π] → R, f(x) = ⟦cosx⟧ – ⟦sinx⟧ **fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



8. f(x) = sgn(⟦x⟧) **fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



9. $f:\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\to R,\ f(x)=\frac{\sin x}{[\![\cos x]\!]}$ **fonksiyonunun grafiği, aşağıdakilerden hangisidir?**



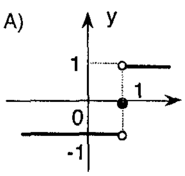
10. $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $x \in [a, a+1)$ ise $\llbracket 100x \rrbracket = 100 \,.\, \llbracket x \rrbracket$ **denkleminin çözüm kümesi, aşağıdakilerden hangisidir?**

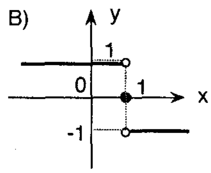
A) $[a - \frac{1}{100}, a)$ B) $[a, a + \frac{1}{100})$

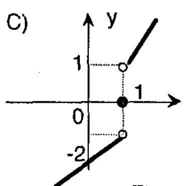
C) $[a - \frac{1}{100}, a + \frac{1}{100})$ D) $[a, \frac{1}{100})$

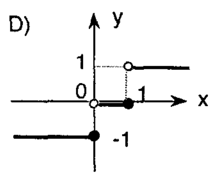
E) $[\frac{1}{100}, a)$

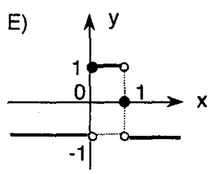
11. $f(x) = \text{sgn}[\text{sgn}(x-1)]$ **fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 

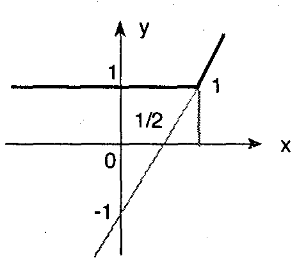
B) 

C) 

D) 

E) 

12.
Şekilde grafiği verilen fonksiyon, aşağıdakilerden hangisidir?



A) $f(x) = |2x - 1|$
B) $f(x) = x + |x - 1|$
C) $f(x) = -x + |1 - x|$
D) $f(x) = x + |1 - x|$
E) $f(x) = x - |x + 1|$

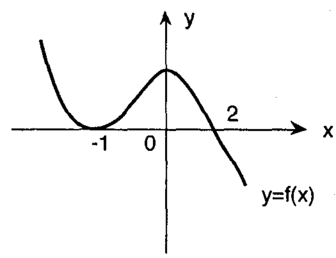
13. $f(x) = \dfrac{1}{\log \dfrac{2 - \llbracket x \rrbracket}{2 + \llbracket x \rrbracket}}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi, **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $[-1, 2)$ B) $[0, 1)$

C) $[-1, 0)$ D) $[-1, 2) \cup [3, 4)$

E) $[-1, 0) \cup [1, 2)$

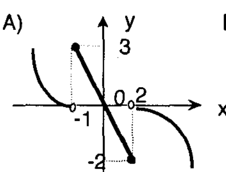
14.

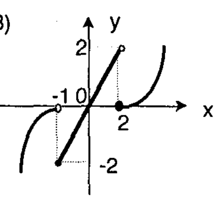


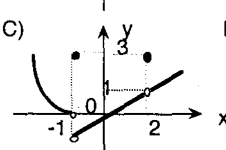
Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

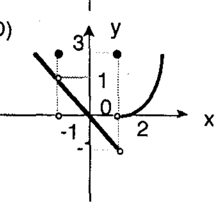
$$g(x) = \begin{cases} -f(x) & , \ f(x) < 0 \text{ ise} \\ 3 & , \ f(x) = 0 \text{ ise} \\ -x.\text{sgn}f(x) & , \ f(x) > 0 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{biçiminde}$$

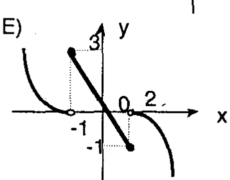
tanımlı $g(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

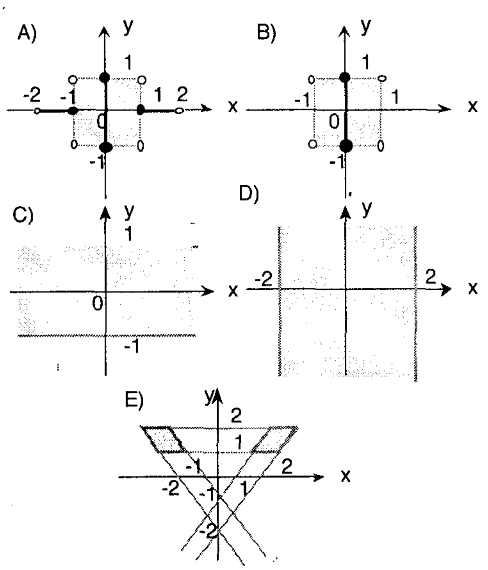
15. $f(x) = n.sgn(x^2 - 3x + m)$ fonksiyonu, x'in yalnız bir değeri için 0, **diğer değerleri için –3 e eşit ise m + n kaçtır?**

A) $-\frac{3}{4}$ B) $-\frac{3}{2}$ C) 0 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{3}{4}$

16. $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 10)$ fonksiyonunun grafiği, $x = -10$, $x = 10$ doğruları ve x – ekseni arasında kalan kapalı bölgede, **koordinatları tamsayı olan kaç nokta vardır?**

A) 200 B) 250 C) 410 D) 540 E) 506

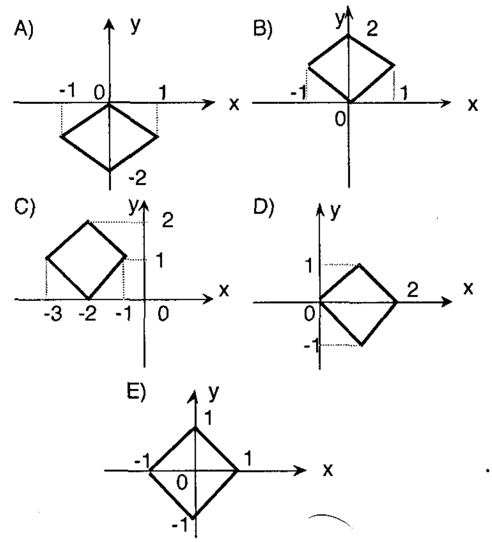
17. $\beta = \{ (x, y) \mid [\![|x|]\!] + |y| = 1;\ x, y \in R\}$ **bağıntısının grafiği, aşağıdakilerden hangisidir?**



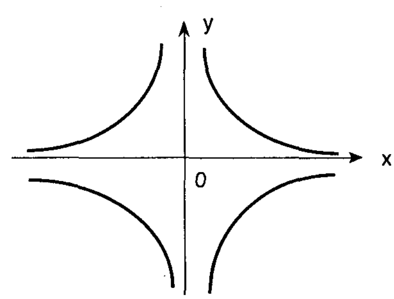
18. $f(x) = \dfrac{1}{[\![x]\!] - sgnx}$ **biçiminde tanımlı f(x) fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) R – [–1, 2) B) R – {–1, 0, 1}
C) R – [1, 2] D) R – [[–1, 0] ∪ [1, 2)]
E) R – [[–1, 1] ∪ [2, 3)]

19. $x, y \in R$ olmak üzere,
$|y - 1| + |x + 2| = 1$ **bağıntısının grafiği, aşağıdakilerden hangisidir?**



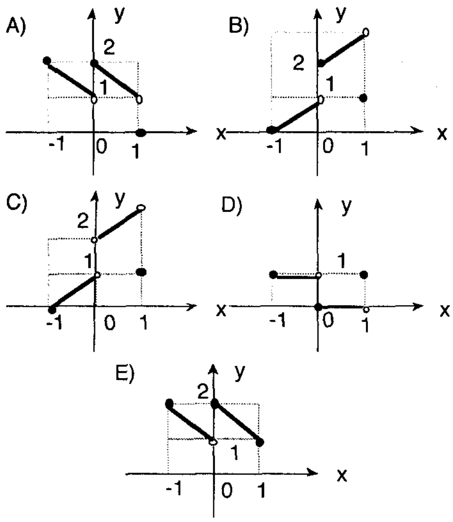
20.



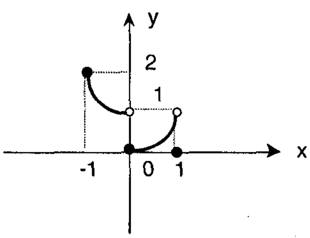
Şekilde $|y| = \dfrac{100}{x}$ bağıntısının grafiği verilmiştir. **Bu grafiğin kolları arasında koordinatları tamsayı olan kaç nokta vardır?**

A) 482 B) 964 C) 1446
D) 1928 E) 2410

21. $f : [-1, 1] \to R$, $f(x) = [\![x]\!] + |x-1| - sgn(x-1)$ **fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



22.



$x \in [-1, 1]$ olmak üzere; **şekildeki grafik aşağıdaki fonksiyonlardan hangisine ait olabilir?**

A) $f(x) = x^2 - sgnx$

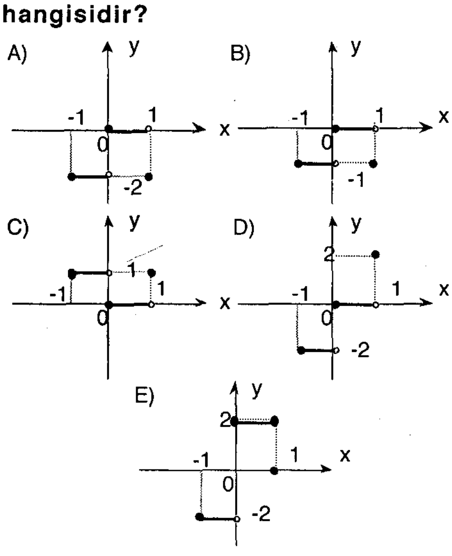
B) $f(x) = x^2 - [\![x]\!]$

C) $f(x) = |x^2| + [\![x]\!] - 1$

D) $f(x) = [\![x]\!] + sgnx - x^2$

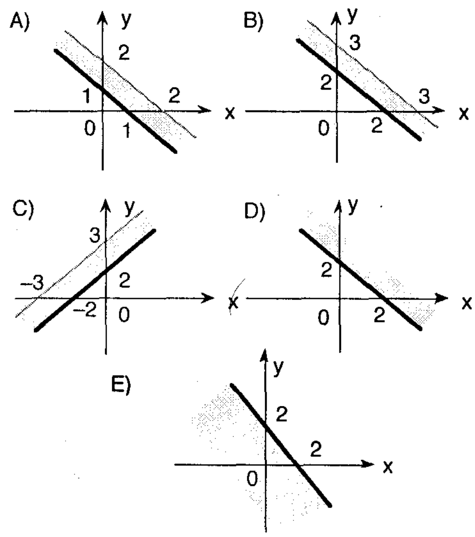
E) $f(x) = [\![x]\!] - x^2$

23. $f : [-1, 1] \to R$, $f(x) = (-1)^{[\![x]\!]} - 1$ **fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

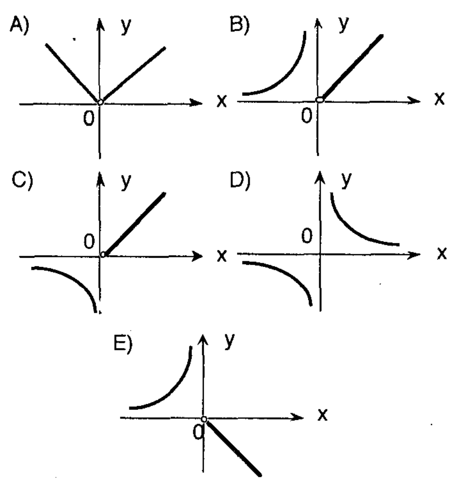


24. $[\![x + y]\!] = 3 - sgn(x^2 + 2y^2 + \frac{1}{2})$

bağıntısının grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



25. $f : R - \{0\} \to R$ $f(x) = |x|^{sgnx}$ **fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR

TEST 10

1. **Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi tek fonksiyondur?**

A) $f(x) = x \cdot \sin x$

B) $f(x) = x^3 + \sin x$

C) $f(x) = x^2 + \cos x$

D) $f(x) = x^3 + x^2 - 2$

E) $f(x) = |x| + x$

2. **Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi çift fonksiyondur?**

A) $f(x) = x^2 + \sin x$ B) $f(x) = \sin 2x$

C) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ D) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

E) $f(x) = |x|$

3. $[\![x + [\![2 + [\![3 + x]\!]]\!]]\!] = 3$ ise x **aşağıdaki aralıklardan hangisinin elemanıdır?**

A) $[-1, 0)$ B) $[0, 1)$ C) $[1, 2)$

D) $[2, 3)$ E) $[3, 4)$

4. $f(x) = \left[\!\left[\left| \dfrac{x-2}{5} \right| \right]\!\right]$, $g(x) = |2x - 1|$ ve

$h(x) = \operatorname{Sgn}\left(\dfrac{1-4x}{3}\right)$ ise **(fogoh)** $\left(\dfrac{1}{2}\right)$

kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

5. $\operatorname{Sgn}(mx^2 - mx - 2) = -1$ ise **m için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) $-6 < m < -2$ B) $-5 < m < -1$

C) $-3 < m < 1$ D) $-12 < m < -4$

E) $-8 < m < 0$

6. $\left[\!\left[\left| \dfrac{3x-7}{5} \right| \right]\!\right] = 1$ **denklemini sağlayan kaç tamsayı vardır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7. $\left[\!\left[\left| \dfrac{x+1}{3} \right| \right]\!\right] = \dfrac{x-2}{4}$ denklemini sağlayan **kaç tamsayı vardır?**

A) 3 B) 5 C) 9 D) 12 E) 15

8. $[\![\log_3 x]\!] + [\![\log_3 9x]\!] + [\![\log_3 27x]\!] = 5$ **denkleminin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-1 \le x < 1$ B) $0 \le x < 2$

C) $1 \le x < 3$ D) $2 \le x < 4$

E) $3 \le x < 5$

9. $\left[\!\left[\left| \dfrac{1}{2x-1} \right| \right]\!\right] = 2$ denkleminin R deki çözüm aralığı **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{4}\right]$ B) $\left(-\dfrac{5}{4}, 0\right]$ C) $\left(0, \dfrac{2}{3}\right]$

D) $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}\right]$ E) $\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{2}\right]$

10. $\operatorname{Sgn}(x^2 - 1) + \operatorname{Sgn}(x^2 - 2x - 3) = 0$ **denklemini sağlayan kaç tamsayı vardır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11. $[\![3 + 4x]\!] + [\![4x - 2]\!] = 5$

denkleminin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{5}{6} \le x < -\frac{1}{6}$ B) $-\frac{2}{3} \le x < \frac{1}{4}$

C) $-1 \le x < \frac{1}{2}$ D) $0 \le x < \frac{2}{3}$

E) $\frac{1}{2} \le x < \frac{3}{4}$

12. $|x^2| - 4|x| + 3 = 0$ **denkleminin kaç reel kökü vardır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13. $\left[\!\left[\left| \frac{3x-2}{x+1} \right| \right]\!\right] = 2$ denkleminin **R deki çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(-\infty, -1]$ B) $(-2, 3]$ C) $(-1, 4]$

D) $(0, 6]$ E) $[4, +\infty)$

14. $[\![2x + 3]\!] \le -5$ eşitsizliğinin **çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x \le -\frac{7}{2}$ B) $x < -\frac{7}{2}$ C) $x < -4$

D) $x \le -4$ E) $x < -3$

15. $x \in (-2, 0)$ için $f(x) = Sgnx + |x + 1| + [\![x + 2]\!]$

fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi ile ifade edilir?

A) $f(x) = \begin{cases} x &, -2 < x < -1 \text{ ise} \\ x-1 &, -1 \le x < 0 \text{ ise} \end{cases}$

B) $f(x) = \begin{cases} 2x-3 &, -2 < x < -1 \text{ ise} \\ x &, -1 \le x < 0 \text{ ise} \end{cases}$

C) $f(x) = \begin{cases} -x-2 &, -2 < x < -1 \text{ ise} \\ x+1 &, -1 \le x < 0 \text{ ise} \end{cases}$

D) $f(x) = 3x - 2,\ -2 < x < 0$ ise

E) $f(x) = 0,\ -2 < x < 0$ ise

16. $y = \sqrt{|x+1| - |1-x^2|}$ fonksiyonunun **en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(-1, 0]$ B) $[0, 2] \cup \{-1\}$

C) $[1, 3] \cup \{0\}$ D) $[2, 4] \cup \{-1\}$

E) $[3, 6]$

17. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt{x-1}}$ fonksiyonunun **en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(-\infty, 1)$ B) $(-\infty, 2)$ C) $(-3, 1)$

D) $(-3, 2)$ E) $(1, +\infty)$

18. $f(x) = \log [\, \log (2-3x) \,]$ fonksiyonunun **en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ B) $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ C) $\left(0, \frac{2}{3}\right)$

D) $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ E) $(10, +\infty)$

19. $f(x) = \frac{3x - 2}{Sgn(2 - x) + Sgn(x + 3)}$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, -3]$ B) $[-3, 2]$ C) $[2, 3]$

D) $[3, 6]$ E) $[6, +\infty)$

20. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x + \sqrt{x+1}}}{Sgn(x^2 - 4) + 1}$

fonksiyonunun **en geniş tanım aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(-\infty, -2]$ B) $(-2, -1)$ C) $(0, 1)$

D) $(0, 2)$ E) $[2, +\infty)$

21. f(x) fonksiyonunun periyodu 5 tir.
g(x) fonksiyonunun periyodu 4 dür.
$f(47) = 4$ ve $g(37) = 7$ ise

$\frac{\mathbf{f(32) + g(21)}}{\mathbf{(fog)(5)}}$ **kaçtır?**

A) $\frac{9}{4}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{11}{4}$ D) 3 E) $\frac{13}{4}$

22. $f(x) = x^4 + x^2 - 3f(-x)$ veriliyor.
f'in grafiği y eksenine göre simetrik ise f(1) kaçtır?

A) 4 B) 2 C) 1 D) 0 E) $\frac{1}{2}$

23. $\left.\begin{array}{l} [\![y]\!] = 2x \\ [\![x]\!] = y + 1 \end{array}\right\}$ Denklem sistemini sağlayan

y değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) –5 B) –4 C) –3 D) –2 E) –1

FONKSİYONLARDA LİMİT VE SÜREKLİLİK

BÖLÜM 2

BİR DEĞİŞKENİN LİMİTİ

x bir değişkeni, a da bir sabiti göstermek üzere x = a demek, x değişkeni a sabit değerini alıyor demektir. $x \neq a$ olmak üzere, x değişkeni sonsuz sayıda değerler alabiliyor ve sonunda a dan farkı istenildiği kadar küçük oluyorsa x, a ya yaklaşıyor veya x, a limit değerine yaklaşıyor denir ve $x \to a$ veya $\lim x = a$ biçiminde gösterilir. a'ya x in limiti denir. Diğer bir deyişle $x \to a$ demek x – a farkının mutlak değeri, sonunda pozitif istenildiği kadar küçük $\forall\, \varepsilon > 0$ sayısından da küçük oluyor ve daima öyle kalıyor demektir.

$|x - a| < \varepsilon$ veya $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ biçiminde de ifade edilebilir.

ÖRNEK

$\frac{1}{3}$ kesri bir ondalık sayıya çevrilmek istense, bölme işlemi hiç bir zaman bitmez. Daima 3 ile bölmeye devam edilebilecek bir kalan bulunur. Bunun için $\frac{1}{3}$ kesri $0,333\ldots.. = 0,\overline{3}$ devirli ondalık sayısından büyüktür.

Bir x değişkeni 0,3 ; 0,33 ; 0,333 ; .... değerlerini aldığına göre $x - \frac{1}{3}$ farkının mutlak değeri, ondalık basamak sayısı yeterince büyük alınmakla istenildiği kadar küçük yapılabilir.

O halde;

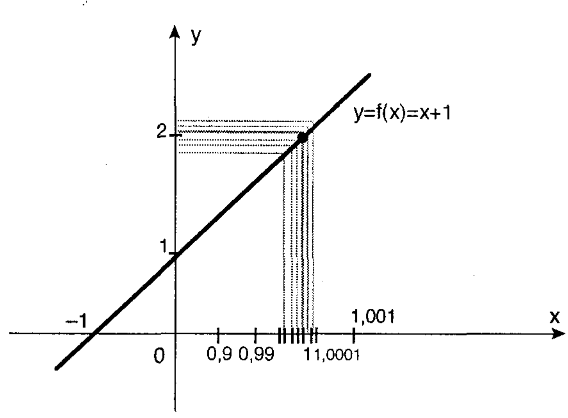
$x \to \frac{1}{3}$ yani $\lim x = \frac{1}{3}$ dür.

Limit kavramını aşağıdaki örnekler üzerinde açıklamaya çalışalım.

ÖRNEK

f : R → R, y = f(x) = x + 1 fonksiyonu veriliyor. x in 1 e yaklaşması halinde, **y nin alacağı değeri bulunuz.**

ÇÖZÜM



x	0,9	0,99	0,999	....	1	....	1,001	1,01	1,1
y	1,9	1,99	1,999	....	2	....	2,001	2,01	2,1

Yukarıdaki tablo ve grafik incelenirse, x değişkeni 1 sayısına 1 den küçük değerler alarak yaklaştığında y de 2 sayısına 2 den küçük 2 ye yakın değerler olarak yaklaşmaktadır.

x değişkeni 1 sayısına 1 den büyük değerler alarak yaklaştığında y de 2 sayısına 2 den büyük 2 ye yakın değerler alarak yaklaşmaktadır.

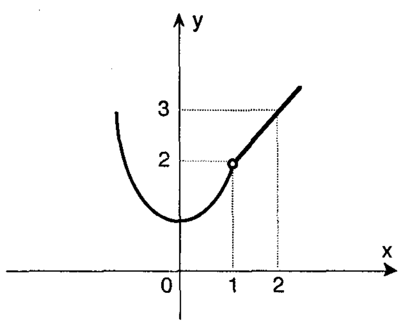
O halde x değişkeni büyüyerek ya da küçülerek 1 sayısına yaklaşırsa, y de 2 sayısına büyüyerek ya da küçülerek yaklaşır.

Yani x ile 1 arasındaki farkın mutlak değeri çok küçükken, y ile 2 arasındaki farkın mutlak değeride çok küçük olmaktadır.

ÖRNEK $f(x)=\begin{cases} x+1 & , \ x>1 \text{ ise} \\ x^2+1 & , \ x<1 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.

x in 1 e yaklaşması halinde y nin alacağı değeri bulunuz.

ÇÖZÜM



x = 1 noktasına yakınsayan iki dizi

$(a_n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ve $(b_n)=\left(1-\frac{1}{n}\right)$ olsun.

$\forall\, n \in N^+$ için $1+\frac{1}{n}>1$ olduğuna göre

$(f(a_n))=\left(1+\frac{1}{n}+1\right)\to 2$ ve

$\forall\, n \in N^+$ için $1-\frac{1}{n}<1$ olduğuna göre

$(f(b_n))=\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+1\right)=\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+1\right)\to 2$

olur.

O halde f(x) fonksiyonunda x in 1 e yaklaşması halinde y de 2 ye yaklaşmaktadır.

BİR FONKSİYONUN LİMİTİ

TANIM :

$A\subset R$ ve $f: A-\{a\}\to R$ ye bir fonksiyon f(x) olsun. x değişkeni $a\in R$ sayısına yaklaştığında, f(x) fonksiyonuda $t\in R$ sayısına yaklaşıyorsa, t gerçel sayısına x, a ya yaklaşırken f(x) fonksiyonunun limiti denir ve $\lim\limits_{x\to a} f(x)=t$ biçiminde gösterilir.

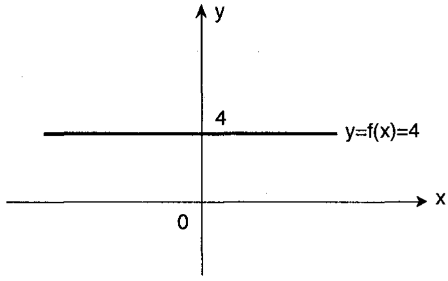
İkinci bir tanım olarak da limiti a olan tüm (x_n) dizileri için $(f(x_n))$ dizileri bir $t\in R$ sayısına yakınsıyorsa f(x) fonksiyonunun limitidir denir.

UYARI

limiti a olan tüm (x_n) dizileri için $(f(x_n))$ dizilerinin limiti farklı çıkıyorsa (en az iki tanesi farklı ise) a noktasında f(x) fonksiyonunun limiti yoktur.

ÖRNEK **$f : R \to R$, $f(x) = 4$ biçiminde tanımlı sabit fonksiyonun $x \to 2$ için limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM



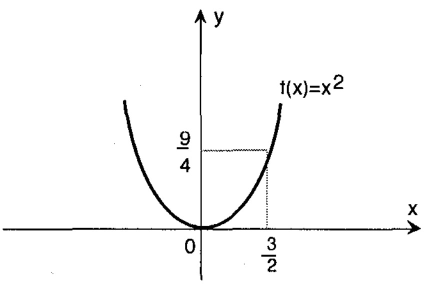
$\forall\ a_n \neq 2$ ve $(x_n) \to 2$ için

$\big(f(x_n)\big) = (4) \to 4$ olduğundan

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} 4 = 4$ dür.

ÖRNEK **$f : R \to R$, $f(x) = x^2$ ile tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun $x \to \frac{3}{2}$ için limiti nedir?**

ÇÖZÜM



$\forall\ (x_n) \subset R - \{\frac{3}{2}\}$ ve

$(x_n) \to \frac{3}{2}$ için

$\big(f(x_n)\big) = \big((x_n)^2\big) \to \left(\frac{3}{2}\right)^2$ olduğundan

$\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} x^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ dür.

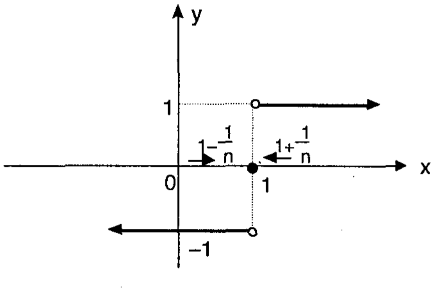
ÖRNEK **$f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$ fonksiyonun $x \to 1$ için limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x = 1$ noktasına yakınsayan iki dizi $(a_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ve $(b_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ olsun.

$$\big(f(a_n)\big) = \left(\frac{\left|1 + \frac{1}{n} - 1\right|}{1 + \frac{1}{n} - 1}\right) = \left(\frac{\left|\frac{1}{n}\right|}{\frac{1}{n}}\right) = \left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right) = (1) \to 1$$

$$\big(f(b_n)\big) = \left(\frac{\left|1 - \frac{1}{n} - 1\right|}{1 - \frac{1}{n} - 1}\right) = \left(\frac{\left|-\frac{1}{n}\right|}{-\frac{1}{n}}\right) = \left(\frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}}\right) = (-1) \to -1$$

O halde $f(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında limiti yoktur. Bunu fonksiyonun grafiği üzerinde de gösterelim.



Grafikte de görüldüğü gibi, terimleri 1 in solunda olan bir dizi yakınsarken $f(x)$ fonksiyonu -1 e yakınsıyor. Terimleri 1 in sağında olan bir dizi 1 e yakınsarken $f(x)$ fonksiyonu $+1$ e yakınsıyor.

ÖRNEK $f : R - \{3\} \to R,\ f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ fonksiyonunun $x \to 3$ için limitini bulunuz.

ÇÖZÜM $x \neq 3$ için $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \dfrac{(x-3)(x+2)}{x - 3} = x + 2$ dir.

$\forall\ (x_n) \subset R - \{3\}$ ve $(x_n) \to 3$ için

$\big(f(x_n)\big) = (x_n + 2) \to 3 + 2 = 5$ olduğundan

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$ dir.

UYARI

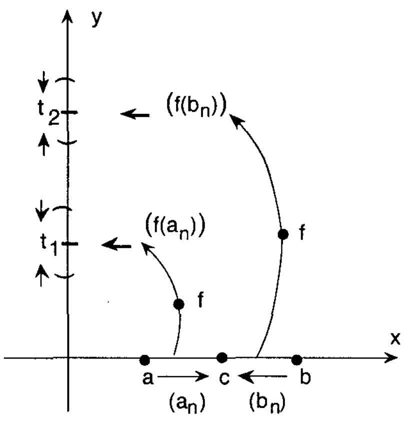
Bir fonksiyonun herhangi bir noktada limitinin olması ya da olmaması için, fonksiyonun o noktada tanımlı olma zorunluluğu yoktur.

BİR FONKSİYONUN SOLDAN VE SAĞDAN LİMİTİ

$a < c < b$ ve $a, b, c, t_1, t_2 \in R$ olsun.

$f : [a, b] \to R$, veya $f : [a,b] - \{c\} \to R$ fonksiyonu tanımlansın.

1. SOLDAN LİMİT :



Terimleri (a, c) aralığına ait ve c sayısına yakınsayan her (a_n) dizisi için $\big(f(a_n)\big)$ dizisi t_1 sayısına yakınsıyor ise t_1 sayısına $f(x)$ fonksiyonunun c noktasındaki **SOLDAN LİMİTİ** denir ve $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = t_1$ biçiminde gösterilir.

Veya diğer bir tanım olarak, $f(x)$ fonksiyonunda $x, c \in R$ değerine sol taraftan yaklaşırken $f(x)$ de bir $t_1 \in R$ değerine yaklaşıyorsa t_1 sayısına $f(x)$ in c noktasındaki **SOLDAN LİMİTİ** denir ve $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = t_1$ biçiminde gösterilir.

2. SAĞDAN LİMİT :

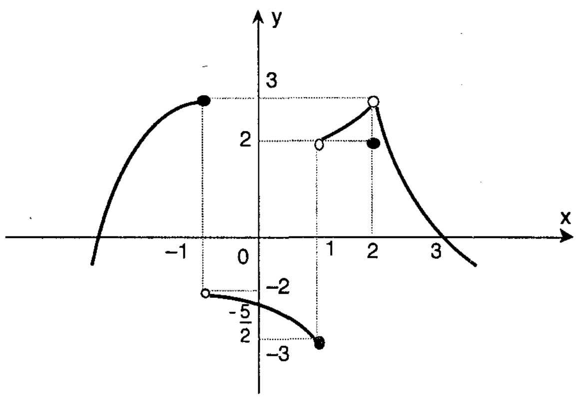
Terimleri (c, b) aralığına ait ve c sayısına yakınsayan her (b_n) dizisi için $\big(f(b_n)\big)$ dizisi t_2 sayısına yakınsıyor ise t_2 sayısına $f(x)$ fonksiyonunun c noktasındaki **SAĞDAN LİMİTİ** denir ve $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = t_2$ biçiminde gösterilir. Veya diğer bir tanım olarak, $f(x)$ fonksiyonunda $x, c \in R$ değerine sağ taraftan yaklaşırken $f(x)$ de bir $t_2 \in R$ değerine yaklaşıyorsa t_2 sayısına $f(x)$ in c noktasındaki **SAĞDAN LİMİTİ** denir ve $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = t_2$ biçiminde gösterilir.

UYARI

1. $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = t \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to c} f(x) = t$ dir.

2. $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to c^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to c} f(x)$ yoktur.

ÖRNEK



Yanda grafiği verilen f(x) fonksiyonu için aşağıdakileri bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ f) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ g) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 3$

b) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -2$

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\frac{5}{2}$ ve

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\frac{5}{2}$ olduğundan

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\frac{5}{2}$ dir.

d) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -3$ ve

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$ dir.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ $(-3 \neq 2)$

olduğundan $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ yoktur.

e) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$

f) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$

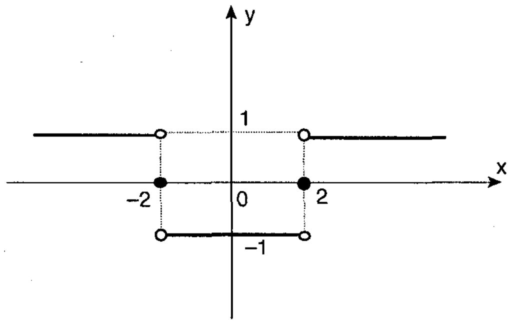
g) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 0$ ve

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 0$ olduğundan $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$ dır.

ÖRNEK **$f(x) = sgn(x^2 - 4)$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki limiti nedir?**

ÇÖZÜM

x	$-\infty$		–2		2		$+\infty$
$x^2 - 4$		+	o	–	o	+	



$x > 2 \Rightarrow x^2 - 4 > 0$

$\Rightarrow \text{sgn}(x^2 - 4) = 1$ dir.

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$ olur.

$-2 < x < 2 \Rightarrow x^2 - 4 < 0$

$\Rightarrow \text{sgn}(x^2 - 4) = -1$ dir.

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -1$

O halde, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

olduğundan $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ yoktur.

UYARI

Bir f(x) fonksiyonunun herhangi bir noktada limiti bulunurken, fonksiyonun grafiğinin çizilmesi gerekmez. Ancak grafiği verilen bir f(x) fonksiyonunun herhangi bir noktadaki limiti grafikten bulunabilir.

ÖRNEK

$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , \ x \geq 0 \text{ ise} \\ x + 1 & , \ x < 0 \text{ ise} \end{cases}$ **biçiminde tanımlı f fonksiyonunun x → 0 için limiti nedir?**

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (1 - x^2) = 1 - 0^2 = 1$ ve

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x + 1) = 0 + 1 = 1$ dir. O halde $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ dir.

UYARI

Soldan ve sağdan limit her zaman sürekli olmayan aşağıdaki dört çeşit özel tanımlı fonksiyonlar için uygulanır.

a) Parçalı sürekli fonksiyonlarda

b) Mutlak değer fonksiyonlarında

c) İşaret fonksiyonlarında

d) Tam değer fonksiyonlarında

Bu fonksiyonların dışındaki A → R tanımlı fonksiyonlarda soldan ve sağdan limitler birbirine eşit olduğundan doğrudan limit alınır.

ÖRNEK

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \ x < 2 \text{ ise} \\ 3 & , \ x = 2 \text{ ise} \\ 2x - 1 & , \ x > 2 \text{ ise} \end{cases}$ **biçiminde tanımlı f fonksiyonunun x → 2 için soldan ve sağdan limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = 2^2 - 1 = 3$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x - 1) = 2.2 - 1 = 3$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$ olduğundan f(x) fonksiyonunun $x \to 2$ için limiti vardır ve

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ dür.

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+1} & , \ x < -2 \ \text{ ise} \\ 1 & , \ x = -2 \ \text{ ise} \\ 2 - x & , \ x > -2 \ \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı f(x) fonksiyonunun $x \to -2$ için soldan ve sağdan limitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{|x+1|}{x+1} = \dfrac{|-2+1|}{-2+1} = \dfrac{1}{-1} = -1$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} (2-x) = 2 - (-2) = 4$

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$, $(-1 \neq 4)$ olduğundan $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ yoktur.

ÖRNEK

$f : R - \{2\} \to R$, $f(x) = 4x + \dfrac{|x-2|}{x-2}$ **fonksiyonunun $x \to 2$ için limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM

x	$-\infty$	$\longrightarrow 2 \longleftarrow$	$+\infty$
x – 2	–	0	+

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(4x + \dfrac{-(x-2)}{x-2}\right) = \lim\limits_{x \to 2^-} (4x - 1) = 4.2 - 1 = 7$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(4x + \dfrac{x-2}{x-2}\right) = \lim\limits_{x \to 2^+} (4x + 1) = 4.2 + 1 = 9$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, $(7 \neq 9)$ olduğundan $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ yoktur.

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} [\![x]\!] & , \ x > 0 \ \text{ ise} \\ \text{sgn}x & , \ x < 0 \ \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı f(x) fonksiyonun $x \to 0$ için limitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} [\![x]\!] = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ $(-1 \neq 0)$ olduğundan $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ yoktur.

ÖRNEK

$f(x) = [\![2x - 1]\!]$ **fonksiyonun** $x \to \frac{1}{2}$ **için limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-$ ise $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ alalım.

$f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) = [\![2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) - 1]\!] = [\![1 - \frac{2}{n} - 1]\!] = [\![-\frac{2}{n}]\!]$ olur.

$n \to \infty$ için $-\frac{2}{n}$ negatif değerler alarak sıfıra yaklaşacağından $[\![-\frac{2}{n}]\!] = -1$ dir.

Yani $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = -1$ olur.

$x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+$ ise $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ alalım.

$f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) = [\![2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) - 1]\!] = [\![1 + \frac{2}{n} - 1]\!] = [\![\frac{2}{n}]\!]$ olur.

$n \to \infty$ için $\frac{2}{n}$ pozitif değerler alarak sıfıra yaklaşacağından $[\![\frac{2}{n}]\!] = 0$ dır.

Yani $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = 0$ olur.

$\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x)$, $(-1 \neq 0)$ olduğundan $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ yoktur.

UYARI

$f(x) = mx + n$ fonksiyonu için;

1. $\lim\limits_{x \to a} [\![f(x)]\!]$ de $f(a) \in Z$ ve $m > 0$ ise, sağdan yaklaşımda aynı değer, soldan yaklaşımda ise bu değerin 1 eksiği alınır.

2. $\lim\limits_{x \to a} [\![f(x)]\!]$ de $f(a) \in Z$ ve $m < 0$ ise, soldan yaklaşımda aynı değer, sağdan yaklaşımda ise bu değerin 1 eksiği alınır.

ÖRNEK

$f(x) = [\![3x + 1]\!]$ **fonksiyonun** $x \to \frac{1}{3}$ **için limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^+} [\![3x + 1]\!]$ de $3 \cdot \frac{1}{3} + 1 = 2 > 0$ olduğundan

$\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^+} [\![3x + 1]\!] = 2$ bulunur.

$\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^-} [\![3x + 1]\!]$ de $3 \cdot \frac{1}{3} + 1 = 2 > 0$ olduğundan

$\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^-} [\![3x + 1]\!] = 2 - 1 = 1$ bulunur.

O halde $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^-} f(x)$ olduğundan $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} f(x)$ yoktur.

ÖRNEK

$f(x) = [\![1 - 3x]\!]$ fonksiyonun $x \to 2$ için limitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to 2^+} [\![1 - 3x]\!]$ de $1 - 3.2 = -5 < 0$ olduğundan

$\lim\limits_{x \to 2^+} [\![1 - 3x]\!] = 1 - 3.2 = -5 - 1 = -6$ bulunur.

$\lim\limits_{x \to 2^-} [\![1 - 3x]\!]$ de $1 - 3 \cdot 2 = -5 < 0$ olduğundan

$\lim\limits_{x \to 2^-} [\![1 - 3x]\!] = 1 - 3.2 = -5$ bulunur. O halde

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, $(-6 \neq -5)$ olduğundan $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ yoktur.

ÖRNEK

$f(x) = [\![x + 4]\!]$ fonksiyonun $x \to 1$ için limitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to 1^+} [\![x + 4]\!] = \lim\limits_{x \to 1^+} [\![1{,}0001 + 4]\!] = [\![5{,}0001]\!] = 5$ dir.

$\lim\limits_{x \to 1^-} [\![x + 4]\!] = \lim\limits_{x \to 1^-} [\![0{,}9999 + 4]\!] = [\![4{,}9999]\!] = 4$ dir.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $(5 \neq 4)$ olduğundan $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ yoktur.

UYARI

$\lim\limits_{x \to a} [\![f(x)]\!]$ fonksiyonunda limit alınırken sağdan yaklaşımda $x \to a + \varepsilon$, soldan yaklaşımda ise $x \to a - \varepsilon$ için limit bulunabilir.

Yukarıdaki örneği inceleyiniz. $\varepsilon = \frac{1}{10000}$ alınmıştır.

ÖRNEK $f(x) = [\![\frac{x}{3} - 1]\!]$ **fonksiyonun $x \to 3$ için limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to 3^-} [\![\frac{x}{3} - 1]\!] = \lim_{x \to 3^-} [\![\frac{2,999}{3} - 1]\!] = -1$$

$$\lim_{x \to 3^+} [\![\frac{x}{3} - 1]\!] = \lim_{x \to 3^+} [\![\frac{3,001}{3} - 1]\!] = 0$$ bulunur. O halde

$\lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x)$, $(-1 \neq 0)$ olduğundan $\lim_{x \to 3} f(x)$ yoktur.

ÖRNEK $f(x) = [\![2x + 3]\!]$ **fonksiyonun $x \to \frac{1}{3}$ için limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^-} [\![2x + 3]\!] = \lim_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^-} [\![2.\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1000}\right) + 3]\!] = 3$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^+} [\![2x + 3]\!] = \lim_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^+} [\![2.\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{1000}\right) + 3]\!] = 3$$ bulunur. O halde

$\lim_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^-} f(x) = \lim_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^+} f(x) = 3$ olduğundan $\lim_{x \to \frac{1}{3}} f(x) = 3$ dür.

UYARI

$\lim_{x \to a} [\![f(x)]\!]$ bulunurken $f(a) \notin Z$ ise sağdan ve soldan limit birbirine eşit ve

$\lim_{x \to a} [\![f(x)]\!] = [\![f(a)]\!]$ dır.

ÖRNEK $f(x) = [\![\frac{x}{7} - 1]\!]$ **fonksiyonun $x \to 4$ için limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$x = 4$ için $f(4) = \frac{4}{7} - 1 = -\frac{3}{7} \notin Z$ olduğundan

$\lim_{x \to 4} [\![\frac{x}{7} - 1]\!] = [\![\frac{4}{7} - 1]\!] = [\![-\frac{3}{7}]\!] = -1$ bulunur.

UYARI

$x = a$ da tanımlı $f(x)$ fonksiyonu için $x = a$ bir kritik nokta değilse, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ dır.

Kritik nokta genellikle ;

1. $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ fonksiyonunda $h(x) = 0$ için
2. $f(x) = | g(x) |$ fonksiyonunda $g(x) = 0$ için
3. $f(x) = \text{sgn}\,(g(x))$ fonksiyonunda $g(x) = 0$ için
4. $f(x) = [\![g(x)]\!]$ fonksiyonunda $g(x) \in Z$ için karşımıza çıkacaktır.

ÖRNEK $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ ise $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ nedir?

ÇÖZÜM $x = 1$ noktası $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ fonksiyonunun kritik noktası olmadığından

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 2x^2 + x - 1) = 1^3 - 2.1^2 + 1 - 1 = -1$ bulunur.

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x - 5}{x + 1}$ değeri nedir?

ÇÖZÜM $x = -3$ noktası $\dfrac{2x-5}{x+1}$ in bir kritik noktası değildir.

$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x-5}{x+1} = \dfrac{2.(-3)-5}{-3+1} = \dfrac{11}{2}$ bulunur.

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to 2} x \,.\, |x - 3|$ değeri nedir?

ÇÖZÜM $x = 2$ noktası $x \,.\, |x - 3|$ ün bir kritik noktası değildir.

$\lim\limits_{x \to 2} x \,.\, |x - 3| = 2 \,.\, |2 - 3| = 2 \,.\, |-1| = 2.1 = 2$ bulunur.

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + |x|}{|x - 1|}$ değeri nedir?

ÇÖZÜM $x = -1$ noktası $\dfrac{x+|x|}{|x-1|}$ in bir kritik noktası değildir.

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+|x|}{|x-1|} = \dfrac{-1+|-1|}{|-1-1|} = \dfrac{-1+1}{2} = 0$ bulunur.

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to 1} \left[x^3 - \operatorname{sgn}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) + [\![\dfrac{x}{2}]\!] \right]$ değeri nedir?

ÇÖZÜM $x^3 - \operatorname{sgn}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) + [\![\dfrac{x}{2}]\!]$ noktalarının kritik noktaları

$\operatorname{sgn}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$ için $x = -1$ ve $x = -2$, $[\![\dfrac{x}{2}]\!]$ için ise çift tamsayılardır.

Yani $x = 1$ noktası $x^3 - \operatorname{sgn}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) + [\![\dfrac{x}{2}]\!]$ nin bir kiritik noktası değildir.

$\lim\limits_{x \to 1} \left[x^3 - \operatorname{sgn}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) + [\![\dfrac{x}{2}]\!] \right] = 1^3 - \operatorname{sgn}\left(\dfrac{1+1}{1+2}\right) + [\![\dfrac{1}{2}]\!] = 1 - 1 + 0 = 0$

bulunur.

ÖRNEK $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & , \ x < 0 \text{ ise} \\ x^2 - 4 & , \ x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$ **biçiminde tanımlı f(x) fonksiyonu**

için $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

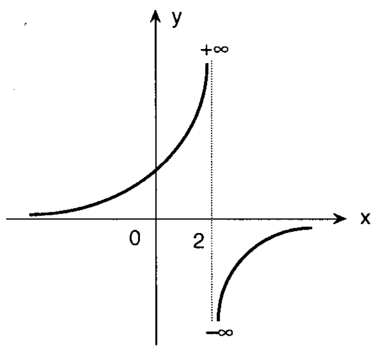
f(x) fonksiyonunun kritik noktası x = 0 dır. x = 1 noktası f(x) in bir kritik noktası olmadığından;
$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} (x^2 - 4) = 1^2 - 4 = -3$ bulunur.

ÖRNEK

$\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{2 - x}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

x = 2 için $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ fonksiyonu ∞ olduğundan (x = 2 için payda 0 olur.)
x = 2 için soldan ve sağdan limitlere bakılır.



$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{2-x} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2-(2-h)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{+h} = \frac{1}{0} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{2-x} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2-(2+h)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{-h} = -\frac{1}{0} = -\infty$$

O halde

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{2-x} \neq \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{2+x}$$

olduğundan

$\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{2-x}$ yoktur.

Grafikten de x, 2 nin solundan 2 ye yaklaştıkça fonksiyonun +∞ a, 2 nin sağından 2 ye yaklaştıkça fonksiyonun –∞ a yaklaştığı görülebilir.

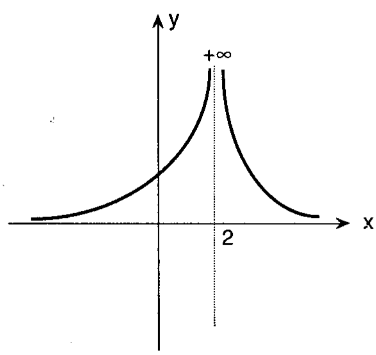
ÖRNEK

$\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

x = 2 için $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ fonksiyonunu ∞ olduğundan (x = 2 için payda 0 dır.)

x = 2 için soldan ve sağdan limitlere bakılır.



$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{[(2-h)-2]^2}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(-h)^2} = \frac{1}{h^2} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{[(2+h)-2]^2}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(+h)^2} = \frac{1}{h^2} = \frac{1}{0} = +\infty \text{ olur.}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)^2}$$
$$= +\infty \text{ olur.}$$

Ancak limit bir reel sayı olmalıdır. + ∞ bir reel sayı olmadığından $\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2}$ yoktur denir.

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to -3^+} [\![3x + 7]\!]$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM $x = -3$ noktası $[\![3x + 7]\!]$ nin bir kritik noktası olduğundan sağdan limit alınır.

($x = -3$ için $[\![3x + 7]\!] = [\![-2]\!] = -2 \in Z$ dir.)

$$\lim_{x \to -3^+} [\![3x + 7]\!] = \lim_{h \to 0} [\![3.(-3 + h) + 7]\!] = \lim_{h \to 0} [\![-2 + 3h]\!] = -2 \text{ olur.}$$

$-2 + 3h$ sayısı -2 den büyük ama -2 ye çok yakın bir sayı olduğundan tamdeğeri -2 dir.

Yani $\lim\limits_{x \to -3^+} [\![3x + 7]\!] = -2$ dir.

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to 2^-} \left([\![x]\!]^2\right)$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM $x = 2$ değeri $[\![x]\!]$ in bir kritik noktası olduğundan soldan limit alınır.

$$\lim_{x \to 2^-} \left([\![x]\!]^2\right) = \lim_{h \to 0} \left([\![2 - h]\!]^2\right) = 1^2 = 1 \text{ olur.}$$

$2 - h$ sayısı 2 den küçük ama 2 ye çok yakın bir sayı olduğundan tamdeğeri 1 dir.

UYARI

Tam değer fonksiyonların kritik noktalarındaki sağdan–soldan limitleri bulunurken, kritik noktadan biraz büyük ya da biraz küçük değer koymak her zaman limiti vermeyebilir.

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to 3^-} [\![x^4]\!]$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM Önce $x \to 3^-$ olduğu için x yerine 2,9 yazalım.

$$\lim_{x \to 3^-} [\![x^4]\!] = [\![(2,9)^4]\!] = [\![70,7281]\!] = 70 \text{ olur.}$$

Şimdi x yerine 3'e daha yakın olan 2,99 yazalım.

$$\lim_{x \to 3^-} [\![x^4]\!] = [\![(2,99)^4]\!] = [\![79,92538801]\!] = 79 \text{ olur.}$$

Oysa gerçek değer hiç de böyle değildir.

$$\lim_{x \to 3^-} [\![x^4]\!] = \lim_{h \to 0} \left([\![(3 - h)^4]\!]\right) = 3^4 - 1 = 80 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to 5^+} [\![x^3]\!]$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x \to 5^+} [\![x^3]\!] = \lim\limits_{h \to 0} [\![(5 + h)^3]\!]$ dersek

$5 + h$ sayısı 5 den büyük ama 5 e oldukça yakın bir sayıdır. $(5 + h)^3$ sayısı da 5^3 sayısından büyük ama 5^3'e oldukça yakındır.

Bu nedenle $(5 + h)^3$ sayısının tam değeri $5^3 = 125$ dir. Yani

$$\lim_{x \to 5^+} [\![x^3]\!] = \lim_{h \to 0} [\![(5 + h)^3]\!] = 5^3 = 125 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to -2} [(x^2 - 3x) \,.\, \text{sgn}(x^2 - 4)]$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM $x = -2$ noktası $\text{sgn}(x^2 - 4)$ ün kritik noktası olduğundan soldan ve sağdan limit alınır.

x	$-\infty \longrightarrow$	-2	$\longleftarrow$	2	$+\infty$
$x^2 - 4$	$+$	o	$-$	o	$+$

Tabloda da görüleceği gibi,

$x \to -2^-$ için $x^2 - 4 > 0$ ve $\text{sgn}(x^2 - 4) \to 1$

$x \to -2^+$ için $x^2 - 4 < 0$ ve $\text{sgn}(x^2 - 4) \to -1$ dir.

$$\lim_{x \to -2^-} [(x^2 - 3x) \,.\, \text{sgn}(x^2 - 4)] = [(4 + 6) \,.\, 1] = 10$$

$$\lim_{x \to -2^+} [(x^2 - 3x) \,.\, \text{sgn}(x^2 - 4)] = [(4 + 6) \,.\, (-1)] = -10 \text{ bulunur.}$$

Soldan ve sağdan limitler farklı olduğundan

$\lim\limits_{x \to -2} [(x^2 - 3x) \,.\, \text{sgn}(x^2 - 4)]$ yoktur.

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to 0} \llbracket x^2 \rrbracket$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM $x = 0$ noktası $\llbracket x^2 \rrbracket$ nin bir kritik noktası olduğundan soldan ve sağdan limitlere bakılır.

$$\lim_{x \to 0^-} \llbracket x^2 \rrbracket = \lim_{h \to 0} \llbracket (0 - h)^2 \rrbracket = \llbracket h^2 \rrbracket = 0 \qquad (0 < h^2 < 1)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \llbracket x^2 \rrbracket = \lim_{h \to 0} \llbracket (0 + h)^2 \rrbracket = \llbracket h^2 \rrbracket = 0 \qquad (0 < h^2 < 1)$$

O halde $\lim\limits_{x \to 0^-} \llbracket x^2 \rrbracket = \lim\limits_{x \to 0^+} \llbracket x^2 \rrbracket = 0$ olduğundan

$\lim\limits_{x \to 0} \llbracket x^2 \rrbracket = 0$ dur.

UYARI

Bazı kaynaklarda tamdeğer içini tamsayı yapan x değerleri için tam değer fonksiyonunun bu noktada limitinin olmadığı söylenir. Bu ifadenin her zaman doğru olmadığı yukarıdaki örnekte görülmektedir. Bu yüzden tamdeğer fonksiyonun $x \to a$ için limiti bulunurken $x \to a^+$ ve $x \to a^-$ limitlerini bulmak gerekir. Eğer $f(x) = \llbracket ax + b \rrbracket$ fonksiyonunun $x \to k$ için limiti istenilirse $f(k) \in Z$ iken $f(x)$ in $x = k$ noktasındaki sağdan ve soldan limitleri farklı olacağından limiti yoktur.

FONKSİYONLARIN LİMİTLERİ İLE İLGİLİ TEOREMLER

$A \subset R$ olmak üzere $A \to R$ veya $A - \{a\} \to R$ ye tanımlı $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının a noktasında limitleri varsa;

1. $c \in R$ olmak üzere $\lim\limits_{x \to a} c = c$

2. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

3. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \,.\, g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \,.\, \lim\limits_{x \to a} g(x)$

a. $c \in R$ olmak üzere,

$\lim\limits_{x \to a} [c.f(x)] = c.\ \lim\limits_{x \to a} f(x)$

b. $n \in N^+$ için

$\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to a} f(x)]^n$

c. f(x) fonksiyonu sınırlı ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ ise $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \,.\, g(x)] = 0$

4. $\forall\, x \in A$ için $g(x) \neq 0$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$ ise

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

5. a) n tek doğal sayı ise

$\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

b) n çift doğal sayı ve $f(x) \geq 0$ ise

$\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

6. $\lim\limits_{x \to a} |f|\,(x) = \lim\limits_{x \to a} |\,f(x)\,| = |\lim\limits_{x \to a} f(x)\,|$

7. f, g, h fonksiyonları A da tanımlı olsunlar.

$\forall\, x \in A$ için $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ ve

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = t \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} h(x) = t$ dir.

8. $a \in R^+$ ve $b \neq 1$ olmak üzere,

$\lim\limits_{x \to a} b^{f(x)} = b^{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to 3} \left[(2x + 1) \,.\, \left(\frac{x}{3} + 1\right)^2 \right]$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x \to 3} \left[(2x + 1) \,.\, \left(\frac{x}{3} + 1\right)^2 \right] = \lim\limits_{x \to 3} (2x + 1) \,.\, \lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{x}{3} + 1\right)^2$

$= (2.3 + 1) \,.\, \left(\frac{3}{3} + 1\right)^2 = 7.4 = 28$ bulunur.

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{x^2 - 2x + 3}\right)$ ***değeri nedir?***

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{x^2 - 2x + 3}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 3x^2 + 4x - 1)}{\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 2x + 3)} = \frac{1^3 - 3.1^2 + 4.1 - 1}{1^2 - 2.1 + 3} = \frac{1}{2}$ bulunur.

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} [\text{sgn}(x^2 - 1) - [\![3x]\!] + |x - 1|]$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} [\text{sgn}(x^2 - 1) - [\![3x]\!] + |x - 1|] = \text{sgn}\left(\frac{1}{4} - 1\right) - [\![\frac{3}{2}]\!] + \left| \frac{1}{2} - 1 \right|$$
$$= \text{sgn}\left(-\frac{3}{4}\right) - [\![\frac{3}{2}]\!] + \left| -\frac{1}{2} \right|$$
$$= -1 - 1 + \frac{1}{2} = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{\sqrt[3]{3x + 5}}{\sqrt{2x - 1}} + \sqrt[4]{15x + 1} \right)$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM
$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{\sqrt[3]{3x + 5}}{\sqrt{2x - 1}} + \sqrt[4]{15x + 1} \right) = \frac{\lim\limits_{x \to 1} \sqrt[3]{3x + 5}}{\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{2x - 1}} + \lim_{x \to 1} \sqrt[4]{15x + 1}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{\lim\limits_{x \to 1} (3x + 5)}}{\sqrt{\lim\limits_{x \to 1} (2x - 1)}} + \sqrt[4]{\lim_{x \to 1} (15x + 1)}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{3.1 + 5}}{\sqrt{2.1 - 1}} + \sqrt[4]{15.1 + 1}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{1}} + \sqrt[4]{16} = \frac{2}{1} + 2 = 4 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK **$f : R \to R$, $f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 12x + 3$ biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu için $\lim\limits_{x \to 1} |f(x)|$ değeri nedir?**

ÇÖZÜM
$$\lim_{x \to 1} |f(x)| = \left| \lim_{x \to 1} f(x) \right| = \left| \lim_{x \to 1} (4x^3 - 2x^2 - 12x + 3) \right|$$
$$= |4.1^3 - 2.1^2 - 12.1 + 3| = |7 - 14| = |-7| = 7 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x + \cos x}{3 + \sqrt{\cot \frac{x}{2}}}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM
$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sqrt{\cot \frac{x}{2}}} = \frac{\lim\limits_{x \to \pi} \sin x + \lim\limits_{x \to \pi} \cos x}{\lim\limits_{x \to \pi} 3 + \sqrt{\lim\limits_{x \to \pi} \cot \frac{x}{2}}} = \frac{\sin\pi + \cos\pi}{3 + \sqrt{\cot \frac{\pi}{2}}}$$
$$= \frac{0 - 1}{3 + \sqrt{0}} = -\frac{1}{3} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK **$\lim\limits_{x \to 2} [(3x^3 - 2x^2 + x - 1) . g(x)] = 34$ ise $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to 2} (3x^3 - 2x^2 + x - 1) \,.\, g(x)] = 34$$

$$\lim_{x \to 2} (3x^3 - 2x^2 + x - 1) \,.\, \lim_{x \to 2} g(x) = 34$$

$$(3.2^3 - 2.2^2 + 2 - 1) \,.\, \lim_{x \to 2} g(x) = 34$$

$$(24 - 8 + 2 - 1) \,.\, \lim_{x \to 2} g(x) = 34$$

$$17 \,.\, \lim_{x \to 2} g(x) = 34 \Rightarrow \lim_{x \to 2} g(x) = 2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to 0} x^2 \,.\, \sin \frac{1}{x}$ değeri nedir?

ÇÖZÜM

$x \to 0$ için $\sin \frac{1}{x} \to \sin(\infty)$ olur.

$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ olduğundan $\sin \frac{1}{x}$ sınırlıdır.

O halde;

$$\lim_{x \to 0} x^2 \,.\, \sin \frac{1}{x} = 0 \,.\, \sin\infty = 0.m = 0 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to -1} \left(2^{3x^2 + 4x}\right)$ değeri nedir?

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to -1} \left(2^{3x^2 + 4x}\right) = 2^{\lim\limits_{x \to -1} (3x^2 + 4x)} = 2^{3 - 4} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to 3^-} \left(6^{\frac{1}{x - 3}}\right)$ değeri nedir?

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to 3^-} \left(6^{\frac{1}{x - 3}}\right) = \lim_{h \to 0} \left(6^{\frac{1}{3 - h - 3}}\right) = 6^{\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{-h}} = 6^{-\frac{1}{0}} = 6^{-\infty} = \frac{1}{6^{\infty}} = 0 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to 2^+} \left[\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{x - 2}} \right]$ değeri nedir?

ÇÖZÜM

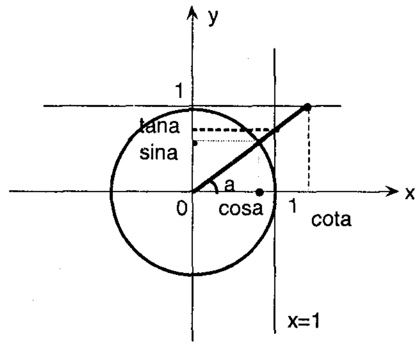
$$\lim_{x \to 2^+} \left[\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{x - 2}} \right] = \lim_{h \to 0} \left[\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2 + h - 2}} \right] = \left(\frac{1}{5}\right)^{\lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{3}{h}\right)} = \left(\frac{1}{5}\right)^{+\infty} = 0 \text{ bulunur.}$$

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN LİMİTLERİ

TEOREM

$a \in R$ olmak üzere

1. $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$
2. $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$
3. $\lim\limits_{x \to a} \tan x = \tan a$, $(\cos a \neq 0)$
4. $\lim\limits_{x \to a} \cot x = \cot a$, $(\sin a \neq 0)$



TEOREM

$x \to a$ için $g(x) \to 0$ ise

1. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin g(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{\sin g(x)} = 1$
2. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\tan g(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{\tan g(x)} = 1$

Özel olarak $a = 0$ ve $g(x) = x$ ise

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\tan x} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\tan x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{\sin x} = 1$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin kx}{px} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin kx}{\tan px} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin kx}{\sin px} = \dfrac{k}{p}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan kx}{px} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan kx}{\sin px} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan kx}{\tan px} = \dfrac{k}{p}$

ÖRNEKLER

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{4x} = \dfrac{3}{4}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 9x}{\sin 3x} = \dfrac{9}{3} = 3$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 4x}{x} = 4$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\tan 3x} = \dfrac{2}{3}$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\tan 5x} = \dfrac{2}{5}$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sin 3x)^2}{(x)^2} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)^2 = 3^2 = 9$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 \frac{x}{4}}{\tan^2 x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin \frac{x}{4}}{\tan x}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{16}$

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^3 3x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x} \cdot \sin^2 3x = \dfrac{3}{2} \cdot 0 = 0$

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{\cos 2x}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x}{\cos 2x} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} 3x}{\lim\limits_{x \to 0} \cos 2x} = \frac{3.0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{4x - 2\pi}{\tan(2x - \pi)}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{4x - 2\pi}{\tan(2x - \pi)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2(2x - \pi)}{\tan(2x - \pi)}$$

$2x - \pi = t$ dersek $x \to \frac{\pi}{2}$ için $2x - \pi \to 0 \Rightarrow t \to 0$ olur. O halde ;

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2(2x - \pi)}{\tan(2x - \pi)} = \lim_{t \to 0} \frac{2t}{\tan t} = \frac{2}{1} = 2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin(3x - 6)}{2x - 4}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin(3x - 6)}{2x - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{\sin[3(x - 2)]}{2(x - 2)}$$

$x - 2 = t$ dersek $x \to 2$ için $x - 2 \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$ olur. O halde;

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin[3.(x - 2)]}{2(x - 2)} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin 3t}{2t} = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\tan(x - 1)}{\cot\left(x - 1 + \frac{\pi}{2}\right)}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM $x - 1 = t$ dersek $x \to 1$ için $(x - 1) \to 0 \Rightarrow t \to 0$ olur. O halde

$$\lim_{x \to 1} \frac{\tan(x - 1)}{\cot\left(x - 1 + \frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{\tan t}{\cot\left(\frac{\pi}{2} + t\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{\tan t}{-\tan t} = -1 \text{ bulunur.}$$

$$\left[\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha \text{ dır.}\right]$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to 0} (\cos^2 x)^{\sin x}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x \to 0} (\cos^2 x)^{\sin x} = (\cos^2 0)^{\sin 0} = 1^0 = 1$ bulunur.

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to 0} (\sin 2x \,.\, \cot 3x)$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x \cdot \cot 3x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan 3x} = \dfrac{2}{3}$ bulunur. $\left(\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}\text{ dır.}\right)$

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x - \sin^3 x}{3x}\right)$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x - \sin^3 x}{3x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\sin^2 x)}{3x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{3x} \cdot \lim\limits_{x\to 0}\mathrm{Cos}^2 x$

$= \dfrac{1}{3}\cdot 1 = \dfrac{1}{3}$ bulunur. $(\cos^2 x = 1 - \sin^2 x)$

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x + \tan 3x}{\sin x}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x + \tan 3x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4x}{\sin x} + \dfrac{\tan 3x}{\sin x}\right) = 4 + 3 = 7$ bulunur.

GENİŞLETİLMİŞ GERÇEL SAYILAR KÜMESİNDE LİMİT

TANIM :

R gerçel sayılar kümesine $-\infty$ ve $+\infty$ eklenmesiyle elde edilen kümeye, genişletilmiş gerçel (Reel) sayılar kümesi denir ve $\overline{R}$ ile gösterilir.

$\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$ dur.

Şu ana kadar $a \in R$ olmak üzere $x \to a$ için limit alındı. Bundan sonra $x \to +\infty$ veya $x \to -\infty$ içinde limitler hesaplayacağız.

1. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ifadesi bir polinom fonksiyon olmak üzere;

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0 & , \ n < m \text{ ise} \\ \dfrac{a_n}{b_m} & , \ n = m \text{ ise} \\ \pm\infty & , \ n > m \text{ ise} \end{cases}$$

UYARI

Dizilerde $n \to \infty$ için limit alındığından, fonksiyonlarda da $x \to \pm\infty$ için limit bulma işlemi, dizilerdeki limit bulma işlemine benzer biçimde yapılır.

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to +\infty}(3x^3 - 4x^2 + 1)$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x\to +\infty}(3x^3 - 4x^2 + 1) = \lim\limits_{x\to +\infty}(3x^3) = 3\cdot(+\infty)^3 = 3.\infty = \infty$ bulunur.

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to -\infty} (4 - x^2)$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to -\infty} (4 - x^2) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2) = [-(-\infty)^2] = -(+\infty) = -\infty$ bulunur.

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 1}{x^2 + 4}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

Payın derecesi, paydanın derecesinden küçük olduğu için limit sıfırdır.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x - 1}{x^2 + 4} = 0$$

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 + x - 2}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

Pay ve paydanın dereceleri eşit olduğundan limit, en yüksek dereceli terimlerin katsayıları oranına eşittir. Yani,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 + x - 2} = \frac{3}{1} = 3 \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 - 5x + 3}{7 - x}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

Payın derecesi paydanın derecesinden büyük olduğundan limit ∞ dır. ∞ un işareti ise

$x \to +\infty$ olduğundan en yüksek dereceli terimlerin işaretleri oranına eşittir. Yani $\frac{+}{-} = -$ dir.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - 5x + 3}{7 - x} = -\infty \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3 - 6x^2 - 7x + 8}{3x^2 - 2x - 1}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^3 - 6x^2 - 7x + 8}{3x^2 - 2x - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3\left(5 - \frac{6}{x} - \frac{7}{x^2} + \frac{8}{x^3}\right)}{x^2\left(3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x \,.\left(5 - \frac{6}{x} - \frac{7}{x^2} + \frac{8}{x^3}\right)}{3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

Paydasında x olan terimler $x \to -\infty$ için 0 olurlar. Buradan ;

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^3 - 6x^2 - 7x + 8}{3x^2 - 2x - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(5 - \frac{6}{x} - \frac{7}{x^2} + \frac{8}{x^3}\right)}{3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{-\infty \,.\, (5 - 0 - 0 + 0)}{3 - 0 - 0} = \frac{-\infty}{3} = -\infty \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}}{2x - 1} \quad \textbf{değeri nedir?}$$

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}}{2x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(2 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{3 - \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}}}{x \cdot \left(2 - \frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{3 - \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}}}{x \cdot \left(2 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ bulunur.}$$

($x \to +\infty$ için $x > 0$ ve $|x| = x$ dir.)

ÖRNEK

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 5x + 1}}{\sqrt[3]{8x^3 + 1}} \quad \textbf{değeri nedir?}$$

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 5x + 1}}{\sqrt[3]{8x^3 + 1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(9 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt[3]{x^3\left(8 + \frac{1}{x^3}\right)}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{9 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x \cdot \sqrt[3]{8 + \frac{1}{x^3}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x \cdot \sqrt{9 - \frac{5}{x} - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x \cdot \sqrt[3]{8 + \frac{1}{x^3}}} = \frac{-\sqrt{9}}{\sqrt[3]{8}} = -\frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

($x \to -\infty$ için $x < 0$ ve $|x| = -x$ dir.)

ÖRNEK

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sgn}\left(\frac{3x - 1}{x + 4}\right) \quad \textbf{değeri nedir?}$$

ÇÖZÜM

x	$-\infty$	-4		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$\frac{3x-1}{x+4}$	$+$	‖	$-$	0	$+$

Değişim tablosunda görüleceği gibi $x \to +\infty$ için $\frac{3x - 1}{x + 4} > 0$ dır.

O halde $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sgn}\left(\frac{3x - 1}{x + 4}\right) = 1$ dir.

ÖRNEK

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\frac{x^2-1}{3x^2+4} \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{3-2x}{x+1}\right) \right]$$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$\frac{3-2x}{x+1}$		$-$	‖	$+$	o	$-$	

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\frac{x^2-1}{3x^2+4} \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{3-2x}{x+1}\right) \right] = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2-1}{3x^2+4}\right) \cdot \lim_{x \to -\infty} \operatorname{sgn}\left(\frac{3-2x}{x+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (-1) = -\frac{1}{3} \text{ bulunur.}$$

($x \to -\infty$ için $\frac{3-2x}{x+1} < 0$ dır.)

ÖRNEK

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{[\![x]\!]}$$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$[\![x]\!] \le x < [\![x]\!] + 1$ olduğunu biliyoruz. x'in çok büyük pozitif değerleri için eşitsizliğin her yanını $[\![x]\!]$ ile bölelim.

$$\frac{[\![x]\!]}{[\![x]\!]} \le \frac{x}{[\![x]\!]} < \frac{[\![x]\!]+1}{[\![x]\!]}$$

$1 \le \frac{x}{[\![x]\!]} < 1 + \frac{1}{[\![x]\!]}$ olur. Bu eşitsizliğin her yanını 2 ile çarpalım.

$2 \le \frac{2x}{[\![x]\!]} < 2 + \frac{2}{[\![x]\!]}$ olur. $x \to +\infty$ için eşitsizliğin her yanının limitini alalım.

$$\lim_{x \to +\infty} 2 \le \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{[\![x]\!]} < \lim_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{2}{[\![x]\!]}\right)$$

$2 \le \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{[\![x]\!]} < 2 + \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{[\![x]\!]}$, buradan $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{[\![x]\!]} = 0$ olacağından

$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{[\![x]\!]} = 2$ bulunur.

BELİRSİZLİKLER VE BELİRSİZLİK DURUMUNDA LİMİT HESAPLARI

$\lim_{x \to a} f(x)$ limiti hesaplanırken f(x) fonksiyonunda x yerine a yazıldığında $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0, ∞^∞ biçiminde ifadelerle karşılaşılabilir. Bu tür ifadelere **BELİRSİZ İFADELER** denir. $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 . \infty$, $\infty - \infty$ belirsizlik türlerini bu bölümde inceleyeceğiz. 0^0, 1^∞, ∞^0, ∞^∞ gibi belirsiz ifadeler ise ileriki konularda incelenecektir.

$\frac{0}{0}$ BELİRSİZLİĞİ

$\frac{0}{0}$ ifadesi gerçekten belli değil midir? Bunu açıklamaya çalışalım.

$$\frac{0,1}{0} = +\infty, \frac{0,01}{0} = +\infty, \frac{0,001}{0} = +\infty, \ldots\ldots$$

$$-\frac{0,1}{0} = -\infty, -\frac{0,01}{0} = -\infty, -\frac{0,001}{0} = -\infty, \ldots\ldots$$

Paydası 0 olan kesirlerin payı sıfıra sağdan yaklaştıkça kesir $+\infty$' a, payı sıfıra soldan yaklaştıkça kesir $-\infty$' a yaklaşmaktadır. Ancak Pay 0 olduğunda kesir $+\infty$ mu yoksa $-\infty$ nın olur belli değildir. O halde $\frac{0}{0}$ bir belirsizliktir.

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limiti bulunurken, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ ise $\frac{0}{0}$ belirsizliği ile karşılaşılır. Bu durumda f(x) ve g(x) polinom biçiminde ise f(x) ve g(x)'de (x – a) çarpanı var demektir.

Yani $f(x) = (x - a) \,.\, f_1(x)$ ve $g(x) = (x - a) \,.\, g_1(x)$ dir.

Buradan

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a) \,.\, f_1(x)}{(x-a) \,.\, g_1(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1(a)}{g_1(a)} \text{ bulunur.}$$

$\frac{f_1(a)}{g_1(a)} = \frac{0}{0}$ ise yukarıdaki düşünceyle işlem sürdürülür ve limit hesaplanır.

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{4 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2) \,.\, (x+2)}{(x-2)} = 2 + 2 = 4 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - x - 2}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - x - 2} = \frac{1 + 3 - 4}{1 + 1 - 2} = \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Pay ve paydada gerekli sadeleştirmenin yapılabilmesi için, pay ve paydanın ortak çarpanları (x + 1) olmalıdır.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1) \,.\, (x-4)}{(x+1) \,.\, (x-2)} = \frac{-1-4}{-1-2} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - x - 6}{x^2 - 4}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - x - 6}{x^2 - 4} = \dfrac{8 - 2 - 6}{4 - 4} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Belirsizliğin giderilmesi için pay ve paydanın ortak çarpanı (x – 2) olmalıdır.

Payı (x – 2) ye bölersek;

$$\begin{array}{rl|l} & x^3 - x - 6 & x - 2 \\ \hline - & x^3 - 2x^2 & x^2 + 2x + 3 \\ \hline & 2x^2 - x - 6 & \\ - & 2x^2 - 4x & \\ \hline & 3x - 6 & \\ - & 3x - 6 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2).(x^2+2x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{4+4+3}{2+2} = \frac{11}{4} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8} = \dfrac{4 - 6 + 2}{8 - 8} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Pay ve paydayı çarpanlara ayırırsak,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2).(x-1)}{(x-2).(x^2+2x+4)} = \frac{2-1}{4+4+4} = \frac{1}{12} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4} = \dfrac{\sqrt{4} - 2}{16 - 20 + 4} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Bu durumda sadeleştirme yapılabilmesi için, önce ifadenin payını rasyonel hale getirmek gerekir. Bunun içinde ifadenin pay ve paydasını ($\sqrt{x}$ – 2) nin eşleniği olan ($\sqrt{x}$ + 2) ile çarparız.

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x} - 2).(\sqrt{x} + 2)}{(x^2 - 5x + 4).(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{(x-4)(x-1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{3.4} = \frac{1}{12} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-1} = \dfrac{0}{\sqrt{0+1}-1} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

İfadenin pay ve paydasını $(\sqrt{x^2+1}-1)$ in eşleniği olan $(\sqrt{x^2+1}+1)$ ile çarpalım.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim_{x \to 0} \frac{x\,.\,(\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}-1)\,.\,(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x\,.\,(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2+1-1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x} = \frac{1+1}{0} = \frac{2}{0} = +\infty \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{5x+16}-6}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{5x+16}-6} = \dfrac{4-\sqrt{16}}{\sqrt{36}-6} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. İfadenin pay ve paydasını hem $(x-\sqrt{3x+4}\,)$ ün, hemde $(\sqrt{5x+16}-6)$ nın eşleniği ile çarpalım.

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{5x+16}-6} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-\sqrt{3x+4})\,(x+\sqrt{3x+4})\,.\,(\sqrt{5x+16}+6)}{(\sqrt{5x+16}-6)\,.\,(\sqrt{5x+16}+6)\,.\,(x+\sqrt{3x+4})}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x^2-3x-4)\,.\,(\sqrt{5x+16}+6)}{(5x+16-36)\,.\,(x+\sqrt{3x+4})}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)\,.\,(x+1)\,.\,(\sqrt{5x+16}+6)}{5(x-4)\,.\,(x+\sqrt{3x+4})}$$

$$= \frac{(4+1)\,.\,(\sqrt{20+16}+6)}{5\,.\,(4+\sqrt{12+4})} = \frac{5\,.\,12}{5\,.\,8} = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-5x-6}{\sqrt[3]{x}+1}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-5x-6}{\sqrt[3]{x}+1} = \dfrac{1+5-6}{\sqrt[3]{-1}+1} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

İfadenin pay ve paydasını $(\sqrt[3]{x}+1)$ in eşleniği olan $(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)$ ile çarpalım.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-5x-6}{\sqrt[3]{x}+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x^2-5x-6)\,\,(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}+1)\,.\,(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(x-6)\,.\,(x+1)\,.\,(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}{(x+1)}$$

$$= (-1-6)\,.\,(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{-1}+1)$$

$$= -7\,.\,(1+1+1) = -21 \text{ bulunur.}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ BELİRSİZLİĞİ

$\frac{\text{sayı}}{\infty} = 0$, $\frac{\infty}{\text{sayı}} = \infty$ dır. ∞ un ∞ a bölümü $\frac{\infty}{\infty}$ için kesin birşey söylenemediğinden $\frac{\infty}{\infty}$ bir belirsizliktir.

$a \in R$ olmak üzere ;

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limiti bulunurken $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ ise $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$ belirsizliklerinden biri ile karşılaşılır. Bu durumda $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitinde $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır denir.

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + 4x - 1}{2x - 1}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 4x - 1}{2x - 1} = \dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. Pay ve paydadaki ifadeleri x in en büyük dereceli olanının parantezini alıp, sadeleştirme yaptıktan sonra limit hesaplayalım.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 4x - 1}{2x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(2 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x.\left(3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{2 - \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{\infty\ .\ 3}{2} = +\infty \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 - 5x + 1}{2 - x^2}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - 5x + 1}{2 - x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(4 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{2}{x^2} - 1\right)} = \frac{4}{-1} = -4 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 2x - 7}{2x^3 + 5x - 1}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 2x - 7}{2x^3 + 5x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(3 - \frac{2}{x} - \frac{7}{x^2}\right)}{x^3\left(2 + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 - \frac{2}{x} - \frac{7}{x^2}}{x\ .\left(2 + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \frac{3}{+\infty\ .\ 2} = \frac{3}{\infty} = 0 \text{ bulunur.}$$

UYARI

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\infty}{\infty}$ durumda pay ve paydanın derecelerine bakılarak limit bulunur. Bu özellik daha önce dizilerin limiti ve genişletilmiş gerçel sayıların limitinde verilmişti.

ÖRNEKLER

a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{4x^2 - 3x + 7} = \dfrac{3}{4}$ (Pay ve paydanın dereceleri eşit olduğundan limit, en yüksek dereceli terimlerin katsayıları oranına eşittir.)

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4 - x^3}{3x^3 + 1} = -\dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 1}{x^2 + 5} = 0$ (Payın derecesi, paydanın derecesinden küçük olduğu için limit 0 dır.)

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 - 5x + 9}{7x^3 - x^2 + 1} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{x - 2} = +\infty$ (Payın derecesi, paydanın derecesinden büyük olduğu için limit $+\infty$ veya $-\infty$ dur.)

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7x^3 - 9x^2 + 11x - 12}{5x^2 + 6x - 2} = -\infty$

UYARI

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{mx + n + \sqrt{ax^2 + bx + c}}{px + k}$ ifadesinin limitini bulalım.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{x^2\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right)} = |x| \cdot \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}$$

($n \in N$ olmak üzere $\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|$, $\sqrt[2n-1]{x^{2n-1}} = x$ dir.)

$x \to +\infty$ için $|x| = x$ ve $x \to -\infty$ için $|x| = -x$ olur.

O halde;

1. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{mx + n + \sqrt{ax^2 + bx + c}}{px + k} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(m + \frac{n}{x} + \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}\right)}{x\left(p + \frac{k}{x}\right)} = \frac{m + \sqrt{a}}{p} \text{ dir.}$$

2. $$\lim_{x \to -\infty} \frac{mx + n + \sqrt{ax^2 + bx + c}}{px + k} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(m + \frac{n}{x} - \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}\right)}{x\left(p + \frac{k}{x}\right)} = \frac{m - \sqrt{a}}{p} \text{ dir.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{7x^2 - 3x + 1}}{4x - 2}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM–1 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{7x^2 - 3x + 1}}{4x - 2} = \dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{7x^2 - 3x + 1}}{4x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(7 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}}{4x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{|x| . \sqrt{7 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x\left(4 - \frac{2}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x . \sqrt{7 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x . \left(4 - \frac{2}{x}\right)} = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ bulunur.}$$

ÇÖZÜM–2 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{7x^2 - 3x + 1}}{4x - 2} = \dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. Yukarıdaki uyarı gereğince

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{7x^2 - 3x + 1}}{4x - 2} = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + \sqrt{4x^2 + x - 1}}{4x + 3}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + \sqrt{4x^2 + x - 1}}{4x + 3} = \dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + \sqrt{4x^2 + x - 1}}{4x + 3} = \frac{3 + \sqrt{4}}{4} = \frac{3 + 2}{4} = \frac{5}{4} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7x - 3 - \sqrt{9x^2 + 5x - 7}}{5x - 1}$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7x - 3 - \sqrt{9x^2 + 5x - 7}}{5x - 1} = \dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{7x - 3 - \sqrt{9x^2 + 5x - 7}}{5x - 1} = \frac{7 - (-\sqrt{9})}{5} = \frac{7 + 3}{5} = 2 \text{ bulunur.}$$

$\infty - \infty$ BELİRSİZLİĞİ

∞ dan bir sayı çıkarılır ya da eklenirse ∞ olur. Ancak ∞ dan ∞ çıkarılırsa 0 mı olur, ∞ mu olur. Kesin olarak yanıtlayamayız. O halde $\infty - \infty$ bir belirsizliktir.

$\lim\limits_{x \to +\infty} [\, f(x) - g(x)\,] = \infty - \infty$ belirsizliği varsa $f(x) + g(x)$ ile limiti hesaplanacak olan fonksiyon çarpılıp – bölünerek belirsizlik giderilmeye çalışılır.

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 4}\right)$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2-4}\right) = \infty - \infty$ belirsizliği vardır.

$\left(\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2-4}\right)$ ün eşleniği olan $\left(\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2-4}\right)$ ile ifadenin pay ve paydasını çarparak belirsizliği yok etmeye çalışalım.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2-4}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2-4}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2-4}\right)}{\left(\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2-4}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2+4) - (x^2-4)}{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+4-x^2+4}{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2-4}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{8}{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2-4}} = \frac{8}{+\infty} = 0 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+2}\right)$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+2}\right) = \infty - \infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+2}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2+x) - (x^2+2)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x-x^2-2}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} + \sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{|x| \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x}} + |x| \cdot \sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} \quad (x \to +\infty \text{ için } |x| = x \text{ dir.})$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2-3x-1} + x\right)$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2-3x-1} + x\right) = \infty - \infty$ belirsizliği vardır?

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2-3x-1} + x\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2-3x-1} + x\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{x^2-3x-1} - x\right)}{\left(\sqrt{x^2-3x-1} - x\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-3x-1-x^2}{\sqrt{x^2-3x-1} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x-1}{\sqrt{x^2-3x-1} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(-3-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x \cdot \left(-3-\frac{1}{x}\right)}{|x| \cdot \sqrt{1-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}} - x}$$

$(x \to -\infty$ için $|x| = -x$ dir.

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(-3-\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}} - x} = \frac{-3}{-\sqrt{1}-1} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

UYARI

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+px+k}=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{p}{2}\right)\text{ dir.}$$

$$\sqrt{x^2+px+k}=\sqrt{x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+k}=\sqrt{\left(x^2+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+k}=\sqrt{x^2+px+\frac{p^2}{4}}\text{ olsun.}$$

$A=\sqrt{x^2+px+k}-\sqrt{x^2+px+\frac{p^2}{4}}$ farkının $x\to\infty$ için limiti hesaplanırken A eşleniği ile çarpılıp bölünürse,

$$A=\frac{\left(\sqrt{x^2+px+k}-\sqrt{x^2+px+\frac{p^2}{4}}\right).\left(\sqrt{x^2+px+k}+\sqrt{x^2+px+\frac{p^2}{4}}\right)}{\sqrt{x^2+px+k}+\sqrt{x^2+px+\frac{p^2}{4}}}$$

$$A=\frac{(x^2+px+k)-\left(x^2+px+\frac{p^2}{4}\right)}{\sqrt{x^2+px+k}+\sqrt{x^2+px+\frac{p^2}{4}}}$$ olur. $x\to\infty$ için $\lim\limits_{x\to\infty} A=0$ olacağından

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+px+k}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+px+\frac{p^2}{4}}=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{p}{2}\right)\text{ dir.}$$

$x>0$ ise $\sqrt{x^2}=+x$ ve $x<0$ ise $\sqrt{x^2}=-x$ olacağından

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+px+k}=+\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{p}{2}\right)\text{ ve}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+px+k}=-\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{p}{2}\right)\text{ dir.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x-1}\right)$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x-1}\right)=\infty-\infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(x-x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+1}+x\right)$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[-\left(x+\frac{6}{2}\right)+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(-x-\frac{6}{2}+x\right)=-\frac{6}{2}=-3$$

bulunur.

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x^2-x}-\frac{2}{x^2-1}\right)$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x^2-x} - \dfrac{2}{x^2-1}\right) = \dfrac{1}{0} - \dfrac{2}{0} = \infty - \infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x^2-x} - \frac{2}{x^2-1}\right) = \lim_{x \to 1} \left[\underset{(x+1)}{\frac{1}{x(x-1)}} - \underset{(x)}{\frac{2}{(x-1)(x+1)}}\right]$$

$$= \lim_{x \to 1} \left(\frac{x+1-2x}{x(x-1)(x+1)}\right)$$

$$= \lim_{x \to 1} \left(\frac{1-x}{x(x-1)(x+1)}\right) = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği vardır.}$$

$$= \lim_{x \to 1} \left[\frac{-(x-1)}{x \cdot (x-1)(x+1)}\right] = \frac{-1}{1 \cdot (1+1)} = -\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{\sqrt[3]{x+6}}{x-2} - \dfrac{\sqrt[3]{10-x}}{x^2-4}\right)$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{\sqrt[3]{x+6}}{x-2} - \dfrac{\sqrt[3]{10-x}}{x^2-4}\right) = \dfrac{\sqrt[3]{8}}{0} - \dfrac{\sqrt[3]{8}}{0} = \infty - \infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to 2} \left(\underset{(x+2)}{\frac{\sqrt[3]{x+6}}{x-2}} - \underset{(1)}{\frac{\sqrt[3]{10-x}}{x^2-4}}\right) = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)\,\sqrt[3]{x+6} - \sqrt[3]{10-x}}{x^2-4} = \frac{4.\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{8}}{0}$$

$$= \frac{8-2}{0} = \frac{6}{0} = +\infty \text{ bulunur.}$$

$0 \cdot \infty$ BELİRSİZLİĞİ

0 ile bir sayının çarpımı 0, ∞ ile bir sayının çarpımı ∞ dır. 0 ile ∞ un çarpımı 0 mıdır, ∞ mudur belli değildir. Bu yüzden $0 \cdot \infty$ bir belirsizliktir.

$0 \cdot \infty$ belirsizliği, çarpanlardan birisinin çarpmaya göre tersi paydaya yazılarak $\dfrac{0}{0}$ ya da $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine dönüştürülerek limit hesaplanır. Yani ;

$\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0 \cdot \infty$ ise $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}\right]$ ya da $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}\right]$ biçiminde yazılarak limit hesaplanır.

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to 0} (x \cdot \cot 2x)$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x \to 0} (x \cdot \cot 2x) = 0 \cdot \infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to 0} (x \cdot \cot 2x) = \lim_{x \to 0} x \cdot \frac{1}{\tan 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan 2x} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği oluşur.}$$

O halde; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\tan 2x} = \dfrac{1}{2}$ bulunur.

ÖRNEK $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x \cdot \sin \dfrac{3}{x}\right)$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x \cdot \sin\frac{3}{x}\right) = 0 \cdot \infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(2x \cdot \sin\frac{3}{x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2\sin\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}}\right) = \frac{0}{0} \text{ belirsizliğine dönüşür.}$$

$\frac{1}{x} = t$ dersek; $x \to -\infty$ için $\frac{1}{x} \to 0 \Rightarrow t \to 0$ olur.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2\sin\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{2\sin 3t}{t}\right) = \frac{2.3}{1} = 6 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}}$ (sin2x . secx) değeri nedir?

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin 2x \cdot \sec x) = 0 \cdot \infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin 2x \cdot \sec x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliğine dönüşür.}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x \cos x}{\cos x} = 2 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 2 \cdot 1 = 2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}}$ [tan2x . (tanx – 1)] değeri nedir?

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} [\tan 2x \cdot (\tan x - 1)] = \tan\frac{\pi}{2} \cdot \left(\tan\frac{\pi}{4} - 1\right) = \infty \cdot (1 - 1) = 0 \cdot \infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} [\tan 2x \cdot (\tan x - 1)] = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\frac{\sin 2x}{\cos 2x} \cdot \left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1\right)\right]$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\frac{2\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \cdot \frac{\sin x - \cos x}{\cos x}\right]$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\frac{2\sin x \cos x}{(\cos x - \sin x) \cdot (\cos x + \sin x)} \cdot \frac{-(\cos x - \sin x)}{\cos x}\right]$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\frac{-2\sin x}{\cos x + \sin x}\right] = \frac{-2 \cdot \sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}} = \frac{-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1 \text{ bulunur.}$$

ÇALIŞMA SORULARI

Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^3 - 4x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 4x + 1}$ (cevap : $-\frac{5}{3}$)

2. $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^3 + 8}{|x^2 + x - 2|}$ (cevap : 4)

3. $\lim\limits_{x \to \pi^+} [\mathrm{sgn}(\sin x) + \llbracket \cos x \rrbracket]$ (cevap : –2)

4. $\lim\limits_{x \to \pi^-} \dfrac{\llbracket \sin x \rrbracket}{\sin x}$ (cevap : 0)

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{9^x - 3^x}{3^x}$ (cevap : 0)

6. $\lim\limits_{x \to 2^+} \llbracket x - 1 - \llbracket 2x + 1 \rrbracket \rrbracket$ (cevap : – 4)

7. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 8x + 15}$ (cevap : 2)

8. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$ (cevap : $\frac{3}{4}$)

9. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^n - 2^n}{2^m - x^m}$ (cevap : $-\frac{n}{m} \cdot 2^{n-m}$)

10. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 2}{x^2 - 9}$ (cevap : $\frac{1}{24}$)

11. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^3 - a^2x - ax^2 + a^3}{x^3 + ax^2 - 5a^2x + 3a^3}$ (cevap : $\frac{1}{2}$)

12. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{x + 7} - 3}$ (cevap : $\frac{3}{2}$)

13. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x - 2 - \sqrt{4x^2 - x - 2}}{x^2 - 3x + 2}$ (cevap : $\frac{1}{2}$)

14. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - \sqrt{x^2 - 5x + 5}}{\sqrt{x^2 - 6x + 6} - \sqrt{x^2 - 7x + 7}}$ (cevap:2)

15. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{5}}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$ (cevap : $\frac{2}{3} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{5}}$)

16. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x + 7} - 2}{\sqrt{x + 3} - 2}$ (cevap : $\frac{1}{3}$)

17. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt[3]{x^2 - ax} + \sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt[3]{x^2 - a^2} + \sqrt[3]{x^3 - ax^2}}$ (cevap : $\frac{1 + \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{a}}$)

18. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}$ (cevap : $\frac{15}{8}$)

19. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2 - x}}{2 + x - \sqrt{4 - x^2}}$ (cevap : $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

20. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x - 2} - \sqrt{6 - x}}{x - 2 - \sqrt{-x^2 + 8x - 12}}$ (cevap : $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

21. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{2x + 1 - \sqrt{8x + 1}}$ (cevap : $\frac{3}{2}$)

22. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt[3]{4x^3 + 4a^3} - 2a}{2x - \sqrt[3]{4x^3 + 4a^3}}$ (cevap : 1)

23. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2 + 2x - 1} - \sqrt{2} \, . \, x)$ (cevap: $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

24. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 2 - \sqrt{x^2 - 5x + 1})$ (cevap : $-\infty$)

25. $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 - 10x + 8} - x + 3)$ (cevap:$+\infty$)

26. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 4x^2 + 5x - 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 - 2x + 3}\right)$

(cevap : 1)

27. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x^6 - x^5 - 5x^4 + x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$ (cevap : 10)

28. $\lim\limits_{x \to \infty} \left[x^{\frac{4}{3}} . \left(\sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2} \right) \right]$ (cevap : $\frac{1}{3}$)

29. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x - 2} + \sqrt[3]{x^2 - x + 1}}{x^2 - 1}$ (cevap : $\frac{1}{3}$)

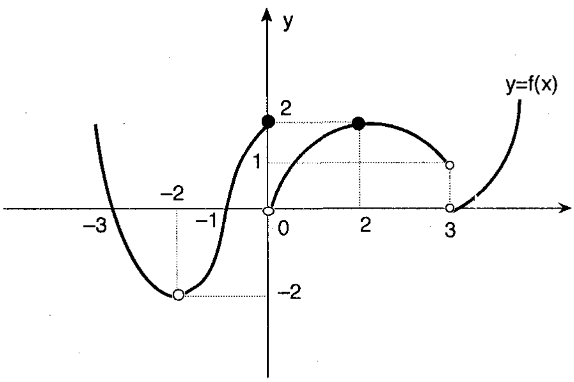
30. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^3 + 1}}{\sqrt{x - 1} + \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^3 + 1}}$ (cevap:$\sqrt{2}$)

FONKSİYONLARDA SÜREKLİLİK VE SÜREKSİZLİK

$A \subset R$ ve $x_0 \in A$ olmak üzere, $f : A \to R$ fonksiyonunun $x = x_0$ da sürekli olması için ;

1. $f(x)$, $x = x_0$ da tanımlı yani $f(x_0) \in R$ olmalıdır.
2. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ yani $\lim_{x \to x_0} f(x)$ olmalıdır.
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ise f fonksiyonu **$x = x_0$ noktasında süreklidir** denir.
4. Bu üç koşuldan en az biri gerçekleşmezse f fonksiyonu **$x = x_0$ noktasında süreksizdir** denir.
5. f fonksiyonu A tanım kümesinin her noktasında sürekli ise f fonksiyonu **A da süreklidir** denir.
6. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ise f fonksiyonu $x = x_0$ noktasında **soldan süreklidir denir.**
7. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ise f fonksiyonu **$x = x_0$ noktasında sağdan süreklidir denir.**

ÖRNEK



Yanda grafiği verilen f(x) fonksiyonunun $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ ve $x = 3$ noktalarında ki süreklilik durumunu inceleyiniz.

ÇÖZÜM

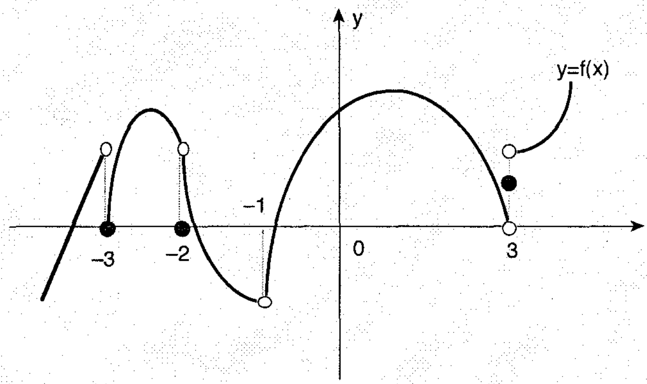
a) $x = -2$ noktasında fonksiyon tanımlı olmadığından f fonksiyonu $x = -2$ noktasında sürekli değildir.

b) $x = 0$ noktasında $f(0) = 2$ olduğundan f fonksiyonu $x = 0$ noktasında tanımlıdır.
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2$ ve $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ olduğundan $\lim_{x \to 2} f(x)$ yoktur.
O halde f fonksiyonu $x = 0$ noktasında süreksizdir.
Ancak ; $\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 2$ olduğundan f fonksiyonu $x = 0$ noktasında soldan süreklidir.

c) $x = 2$ noktasında $f(2) = 2$ olduğundan f fonksiyonu $x = 2$ noktasında tanımlıdır.
$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$ ve $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$ olduğundan $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$ dir.
O halde $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 2$ olduğundan f fonksiyonu $x = 2$ noktasında süreklidir.

d) $x = 3$ noktasında fonksiyon tanımlı olmadığından f fonksiyonu $x = 3$ noktasında sürekli değildir.

UYARI



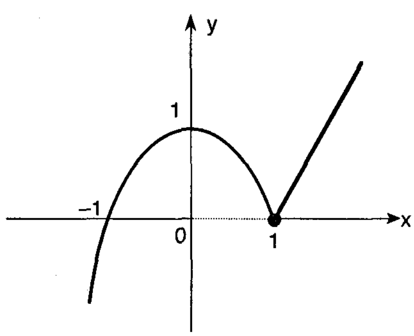
Örnekte incelediğimiz fonksiyonun grafiğinde de görüldüğü gibi, bir fonksiyonun sürekli olması için grafiğinin kesiksiz olması, grafikte boşluklar ya da atlamalar bulunmaması gerekir.

Yanda grafiği çizilmiş olan f(x) fonksiyonu –3, –2, –1, 3 noktalarında süreksiz, bunların dışındaki bütün noktalarda süreklidir.

ÖRNEK

$f : R \to R,\ f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , x < 1 \text{ ise} \\ x - 1 & , x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$ **biçiminde tanımlı f fonksiyonu x = 1 noktasında sürekli midir?**

ÇÖZÜM



Grafikte de görüleceği gibi,

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$ **ve** $f(1) = 0$

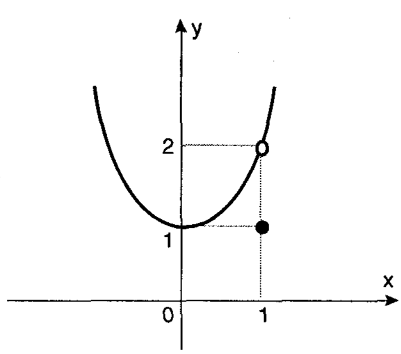
dır.

O halde $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 0$ **olduğundan f fonksiyonu x = 1 noktasında süreklidir.**

ÖRNEK

$f : R \to R,\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \neq 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$ **biçiminde tanımlı f(x) fonksiyonu x = 1 noktasında sürekli midir?**

ÇÖZÜM



Fonksiyonun grafiğinden de görüleceği gibi $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2,\ f(1) = 1$ dir.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$, $(2 \neq 1)$ olduğundan, f(x) fonksiyonu x = 1 noktasında sürekli değildir.

ÖRNEK $f : R \to R,\ f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x &, x < 0 \text{ ise} \\ 1 &, x = 0 \text{ ise} \\ \cos x &, x > 0 \text{ ise} \end{cases}$ **biçiminde tanımlı f fonksiyonu x = 0 noktasında sürekli midir?**

ÇÖZÜM $f(0) = 1$ dir.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (1 + \sin x) = 1 + \sin 0 = 1$ ve

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (\cos x) = \cos 0 = 1$ dir.

O halde $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$ olduğundan f fonksiyonu $x = 0$ noktasında süreklidir.

ÖRNEK $f : R \to R,\ f(x) = \begin{cases} [\![x]\!] &, x < 2 \text{ ise} \\ \operatorname{sgn}(x - 3) &, x = 2 \text{ ise} \\ |x - 1| &, x > 2 \text{ ise} \end{cases}$ **biçiminde tanımlı f fonksiyonu x = 2 noktasında sürekli midir?**

ÇÖZÜM $f(2) = \operatorname{sgn}(2 - 3) = \operatorname{sgn}(-1) = -1$ dir.

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} [\![x]\!] = 1$ ve

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} |x - 1| = |2 - 1| = 1$ dir. O halde $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$ olur.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$, $(1 \neq -1)$ olduğundan f fonksiyonu $x = 2$ noktasında sürekli değildir.

ÖRNEK $f : R \to R,\ f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x^2 - 9) &, x > 3 \text{ ise} \\ 2ax + 5 &, x \le 3 \text{ ise} \end{cases}$ **biçiminde tanımlı f fonksiyonu x = 3 noktasında sağdan sürekli olması için a ne olmalıdır?**

ÇÖZÜM f fonksiyonunun $x = 3$ noktasında sağdan sürekli olması için ;

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = f(3)$ olmalıdır.

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \operatorname{sgn}(x^2 - 9) = 1$ dir.

$f(3) = 2a \cdot 3 + 5 = 6a + 5$ dir. O halde, $6a + 5 = 1 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$ bulunur.

ÖRNEK **$f(x) = \sin x$ fonksiyonunun $\forall\ x_0 \in R$ için sürekli olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ olmalıdır.

$f(x_0) = \sin x_0$ dır.

$\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$ olduğunu gösterelim.

$\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (\sin x - \sin x_0) = 0$ dır.

$$\lim_{x \to x_0} (\sin x - \sin x_0) = \lim_{x \to x_0} \left(2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2}\right)$$

$$= 2 \cdot \sin 0 \cdot \cos x_0 = 2.0 \cdot \cos x_0 = 0 \text{ yani}$$

$$\lim_{x \to x_0} \sin x - \lim_{x \to x_0} \sin x_0 = 0 \text{ veya}$$

$$\lim_{x \to x_0} (\sin x - \sin x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0 \text{ dir.}$$

O halde f(x) = sinx fonksiyonu $\forall\, x_0 \in R$ için süreklidir. f(x) = sinx fonksiyonunun grafiği çizildiğinde fonksiyonun $\forall\, x_0 \in R$ için sürekli olduğu görülebilir.

ARALIKTA SÜREKLİLİK

y = f(x) fonksiyonu [a, b] aralığının her noktasında sürekli ise, f(x) fonksiyonu [a, b] aralığında süreklidir denir.

FONKSİYONLARIN SÜREKLİLİĞİ İLE İLGİLİ TEOREMLER

$A \to R$ ye tanımlı f ve g fonksiyonları ile $x_0 \in A$ verilsin. f ve g fonksiyonları $x = x_0$ noktasında sürekli iki fonksiyon olmak üzere;

1. $f + g$ ve $f - g$ fonksiyonlarıda $x = x_0$ noktasında süreklidir.

2. $g(x_0) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ fonksiyonu $x = x_0$ noktasında süreklidir.

3. $f \cdot g$ fonksiyonu $x = x_0$ noktasında süreklidir.

4. $c \in R$ ise c.f fonksiyonu $x = x_0$ noktasında süreklidir.

5. $n \in N^+$ ise f^n fonksiyonu $x = x_0$ noktasında süreklidir.

6. $n \in N^+$ ise $\sqrt[2n-1]{f}$ fonksiyonu $x = x_0$ noktasında süreklidir.

7. $n \in N^+$ ve $f(x) \geq 0$ ise $\sqrt[2n]{f}$ fonksiyonu $x = x_0$ noktasında süreklidir.

8. $|f|$ fonksiyonu $x = x_0$ noktasında süreklidir.

9. $f(x_0) = y_0$ ve g fonksiyonu $x = y_0$ noktasında sürekli ise gof fonksiyonuda $x = x_0$ noktasında süreklidir.

10. sin ve cos fonksiyonları R kümesinde, tan ve cot fonksiyonlarıda tanımlı oldukları noktalarda süreklidir.

11. y = sgn f(x) fonksiyonu, kritik noktalarda süreksizdir.

12. $y = [\![f(x)]\!]$ fonksiyonu, kritik noktalarda süreksizdir.

13. $c \in R$ ise $y = c^{f(x)}$ fonksiyonu f fonksiyonunun sürekli olduğu yerlerde süreklidir.

14. $y = \log_a[f(x)]$ fonksiyonu tanım aralığında süreklidir.

ÖRNEK $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 6x + 1}{x^2 - 4x - 5}$ **fonksiyonu hangi noktalarda süreksizdir?**

ÇÖZÜM $x^2 - 4x - 5 = 0$ denkleminin kökleri olan $x = -1$ ve $x = 5$ apsisli noktalarda fonksiyon süreksizdir.

ÖRNEK $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & , x \neq -2 \text{ ise} \\ -4 & , x = -2 \text{ ise} \end{cases}$ **biçiminde tanımlı f(x) fonksiyonu**

x = –2 noktasında sürekli midir?

ÇÖZÜM

$x \neq -2$ için $x + 2 \neq 0$ olacağından $\dfrac{x^2-4}{x+2} = \dfrac{(x+2).(x-2)}{x+2} = x - 2$ dir. Yani

$$f(x) = \begin{cases} x-2 \ , & x \neq -2 \text{ ise} \\ -4 \ , & x = -2 \text{ ise} \end{cases}$$ olur. Buradan

$f(-2) = -4$ ve

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -2 - 2 = -4$ bulunur.

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2) = -4$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonu $x = -2$ noktasında süreklidir.

ÖRNEK

$m \in R$ olmak üzere, $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x - 1}{x^2 - (m+1)x + 1}$ fonksiyonun $\forall\ m \in R$ için sürekli ise **m in alabileceği değerler kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$f(x)$ fonksiyonunun payını oluşturan $y = 3x^2 - 4x - 1$ fonksiyonu $\forall\ x \in R$ için süreklidir.

$f(x)$ fonksiyonunun paydasını oluşturan $y = x^2 - (m+1)x + 1$ fonksiyonuda $\forall\ x \in R$ için süreklidir.

Ancak $f(x)$ in $\forall\ x \in R$ için sürekli olabilmesi için paydası olan $y = x^2 - (m+1)x + 1 \neq 0$ olmalıdır. Bunun içinde $x^2 - (m+1)x + 1 = 0$ üç terimlisinin diskirminantı $(\Delta < 0)$ sıfırdan küçük olmalıdır.

$\Delta = (m+1)^2 - 4.1.1 < 0$

$\Delta = m^2 + 2m + 1 - 4 < 0$

$\Delta = m^2 + 2m - 3 < 0$

$m^2 + 2m - 3 = 0 \Rightarrow m = -3$ ve $m = 1$ bulunur.

m	$-\infty$		-3		1		$+$
$\Delta = m^2 + 2m - 3$		$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	

$-3 < m < 1$ bulunur.

O halde $m \in (-3,1)$ aralığında $\forall\ x \in R$ için $f(x)$ fonksiyonu süreklidir.

ÖRNEK

$f(x) = \sqrt{4 - |x+1|}$ fonksiyonunun sürekli olduğu kümeyi bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonu $4 - |x+1| \geq 0$ koşuluna uyan $\forall\ x \in R$ için süreklidir.

$4 - |x+1| \geq 0$

$|x+1| \leq 4$

$-4 \leq x + 1 \leq 4$

$-5 \leq x \leq 3$ olur. O halde $f(x)$ fonksiyonu $[-5, 3]$ aralığında tanımlı ve süreklidir.

ÖRNEK

$f : R \to R$, $f(x) =$ $\begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} \ , & x < 0 \text{ ise} \\ m \ , & x = 0 \text{ ise} \\ \dfrac{3x - n}{x+3} \ , & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$ biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu $\forall\ x \in R$ **için sürekli ise m + n ne olmalıdır?**

ÇÖZÜM

fonksiyon $x < 0$ için süreklidir.

$x > 0$ için $y = \frac{3x-n}{x+3}$ dür. Bu fonksiyon $x = -3$ de süreksizdir. Ancak $x = -3$ değeri $x > 0$ aralığında olmadığından $x > 0$ için $y = \frac{3x-n}{x+3}$ süreklidir. fonksiyonun R de sürekli olması için $x = 0$ da da sürekli olması gerekir.

i) $f(0) = m$ dir.

ii) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin 2x}{x} = 2$

iii) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{3x-n}{x+3} = \frac{-n}{3}$ dir.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$ olacağından $2 = -\frac{n}{3} \Rightarrow n = -6$ bulunur.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow m = 2$ bulunur. O halde $m + n = 2 - 6 = -4$ dür.

ÖRNEK

$f(x) = 4^{\frac{3x+2}{x^2-4}}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = 4^{\frac{3x+2}{x^2-4}}$ fonksiyonu ile $y = \frac{3x+2}{x^2-4}$ fonksiyonu aynı noktalarda süreksiz olacağından $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2$ ve $x = +2$ noktalarında f fonksiyonu süreksizdir.

ÖRNEK

$f(x) = \frac{3x^2-1}{x - [\![x]\!]}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu kümeyi bulunuz.

ÇÖZÜM

f(x) in payı olan $y = 3x^2 - 1$ fonksiyonu $\forall x \in R$ için süreklidir.

f(x) in paydası olan $y = x - [\![x]\!]$ için $x - [\![x]\!] \neq 0$ olmalıdır.

$x \neq [\![x]\!]$ olur.

$x \in Z$ için $[\![x]\!] = a \Rightarrow a \leq x < a + 1$ dir. O halde $x \in Z$ için $[\![x]\!] = x$ olacağından $x - [\![x]\!] = 0$ olur. fonksiyonun sürekli olması için $x \in Z$ olmamalıdır.

O halde f(x) fonksiyonunun süreksiz olduğu küme Z dir.

ÖRNEK

$f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x & , x \neq 2 \text{ ise} \\ x+1 & , x = 2 \text{ ise} \end{cases}$ ve

$g : R \to R$, $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x \neq 2 \text{ ise} \\ x+2 & , x = 2 \text{ ise} \end{cases}$ biçiminde tanımlı f ve g fonksiyonları için

(fog) (x) fonksiyonunun sürekli olduğu kümeyi bulunuz.

ÇÖZÜM

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f(2x+1) & , x \neq 2 \text{ ise} \\ f(x+2) & , x = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

$$(fog)(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x \neq 2 \text{ ise} \\ (x+2)+1 & , x = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

$$(fog)(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x \neq 2 \text{ ise} \\ x+3 & , x = 2 \text{ ise} \end{cases}$$ bulunur.

(fog) (x) fonksiyonunun kritik noktası 2 dir.

i) $(fog)(2) = 2 + 3 = 5$

ii) $\lim\limits_{x \to 2^-} (fog)(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2x+1) = 5$ ve

$\lim\limits_{x \to 2^+} (fog)(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x+1) = 5$ yani $\lim\limits_{x \to 2} (fog)(x) = 5$ bulunur.

O halde $\lim\limits_{x \to 2} (fog)(x) = (fog)(2) = 5$ olduğundan (fog) (x) fonksiyonu $\forall x \in R$ için süreklidir.

SINIRLI FONKSİYONLAR

Lise 2. sınıfta sınırlı dizilerden bahsedilmiş ve alttan sınırlı dizilerde EBAS, üstten sınırlı dizilerde EKÜS kavramları anlatılmıştı. Burada ise bu kavramları fonksiyonlar için vereceğiz.

TANIM 1 :

1. ALTTAN SINIRLI FONKSİYON

$f : A \to R$ ye bir fonksiyon olsun. $\forall x \in A$ için $f(x) \geq m \in R$ oluyorsa f fonksiyonu alttan sınırlı fonksiyondur. $m \in R$ sayısıda fonksiyonun alt sınırıdır.

2. ÜSTTEN SINIRLI FONKSİYON

$f : A \to R$ ye bir fonksiyon olsun. $\forall x \in A$ için $f(x) \leq M \in R$ oluyorsa f fonksiyonu üstten sınırlı fonksiyondur. $M \in R$ sayısı da fonksiyonun üst sınırıdır

3. SINIRLI FONKSİYON

$f : A \to R$ ye bir fonksiyon olsun. $\forall x \in A$ ve $m, M \in R$ olmak üzere; $m \leq f(x) \leq M$ oluyorsa f(x) fonksiyonu sınırlıdır.

$m \in R$ ye fonksiyonun en küçük (Minimum)

$M \in R$ ye de fonksiyonun en büyük (Maksimum) değeri denir.

TANIM 2 :

1. Alttan sınırlı bir f fonksiyonun alt sınırlarının oluşturduğu kümenin en büyük elemanına, f *fonksiyonunun* ***en büyük alt sınırı*** *denir ve* ***EBAS (f)*** *biçiminde gösterilir.*
2. Üstten sınırlı bir f fonksiyonunun üst sınırlarının oluşturduğu kümenin en küçük elemanına, f fonksiyonunun **en küçük üst sınırı** denir ve **EKÜS (f)** biçiminde gösterilir.

ÖRNEK **$f : R \to R$, $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun alttan sınırlı olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM $\forall x \in R$ için $x^2 + 1 \geq 1$ dir. O halde f fonksiyonu alttan sınırlıdır ve fonksiyonun en küçük değeri yani EBAS (f) = f(0) = 1 dir.

ÖRNEK **$f : R \to R$, $f(x) = 1 - x^2$ fonksiyonunun üstten sınırlı olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM $\forall x \in R$ için $1 - x^2 \leq 1$ olduğundan f fonksiyonu üstten sınırlıdır ve fonksiyonun en büyük değeri yani EKÜS (f) = f(0) = 1 dir.

ÖRNEK **$f : R \to R$, $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun sınırlı olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM $\forall x \in R$ için $-1 \leq \cos x \leq 1$ olduğundan f fonksiyonu hem alttan hem de üstten sınırlıdır Yani f sınırlı bir fonksiyondur.

fonksiyonun en küçük değeri EBAS (f) = –1 ve

fonksiyonun en büyük değeri yani EKÜS (f) = 1 dir.

KAPALI BİR ARALIKTA SÜREKLİ FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

1. $f : [a, b] \to R$ fonksiyonun $[a, b]$ aralığında sürekli ise fonksiyon bu aralıkta sınırlıdır.

2. $f : [a, b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise, $\forall x_0 \in [a, b]$ için $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ dır.

3. $f : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise bu aralıkta fonksiyonun bir en küçük (minimum) ve bir en büyük (maksimum) değeri vardır.

SÜREKLİLİKLE İLGİLİ TEOREMLER

TEOREM 1.

$A \subset R$ olmak üzere; $A \to R$ ye tanımlı ve A kümesinde sürekli fonksiyonların kümesi C(A) olsun.

$f \in C(A)$ ve $g \in C(A)$ ise

a) $k \in R$ olmak üzere $(k \,.\, f) \in C(A)$

b) $(f + g) \in C(A)$

c) $(f - g) \in C(A)$

d) $f \,.\, g \in C(A)$

e) $\forall x \in A$ için $g(x) \neq 0$ ise $\frac{f}{g} \in c(A)$ dır.

TEOREM 2.

$A \subset R$ olmak üzere ; $A \to R$ fonksiyonu verilsin.

$S \subset A$ ve $a \in R$ olmak üzere

a) f fonksiyonu a noktasında sürekli ise f'in $f_{|S}$ kısıtlanmış fonksiyonuda a noktasında süreklidir.

($f_{|S}$ kısıtlanmış fonksiyon)

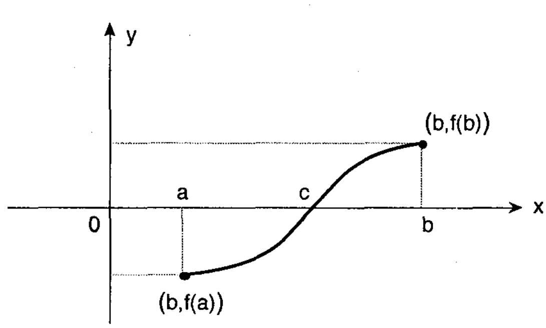
b) $f \in C(A)$ ise $f_{|S} \in C(A)$ dır.

TEOREM 3.

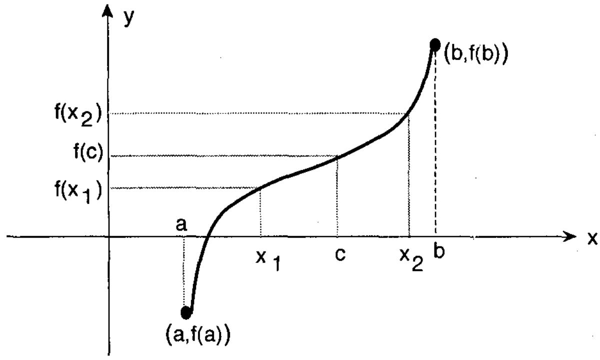
$f : [a, b] \to R$ fonksiyonu tanım kümesinin bir c noktasında sürekli ve $f(c) \neq 0$ ise c nin öyle bir $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ komşuluğu vardır ki, bu komşuluktaki $\forall x \in R$ için f(x) ile f(c) aynı işaretlidir.

TEOREM 4. (Bolzano Teoremi)

$f : [a, b] \to R$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve f(a) ile f(b) ters işaretli ise $f(c) = 0$ olacak biçimde (a, b) aralığında en az bir c noktası vardır.



TEOREM 5. (Ara Değer Teoremi)
$f : [a, b] \to R$ fonksiyonu aralığında sürekli ve $x_1, x_2 \in [a, b]$ olsun. $x_1 < x_2$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise f fonksiyonu $f(x_1)$ ile $f(x_2)$ arasındaki y_0 değerini (x_1, x_2) aralığındaki en az bir $x = c$ değeri için alır.

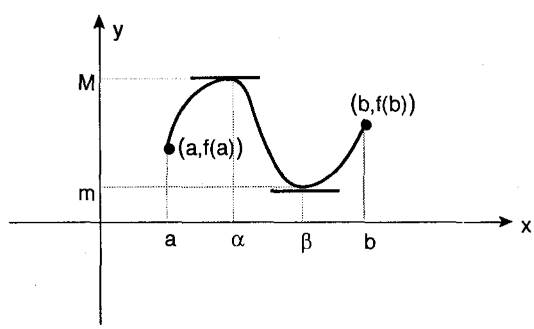


TEOREM 6.
$A, B \subset R$ olmak üzere, $f : A \to R$ ve $g : B \to R$ fonksiyonları verilsin. $f(A) \subset B$ olmak üzere f fonksiyonu $a \in A$ noktasında , g fonksiyonu $f(a) \in B$ noktasında sürekli ise gof fonksiyonu a noktasında süreklidir.

TEOREM 7.
$f : [a, b] \to R$ fonksiyonu, [a,b] aralığında monoton sürekli ise f fonksiyonu bu aralıkta sınırlıdır.

TEOREM 8.
$f : [a,b] \to R$ fonksiyonu, [a,b] aralığında sürekli ise f bu kapalı aralıkta monoton süreklidir.

TEOREM 9. (Uç Değer Teoremi)
$f : [a, b] \to R$ fonksiyonu [a, b] aralığında sürekli ise, f fonksiyonunun bu aralıkta bir minimum ve bir de maksimum değeri vardır.



TEOREM 10.

$f : [a, b] \to R$ fonksiyonu [a, b] aralığında sürekli ise, f([a, b]) kümesi bir aralıktır.

TEOREM 11.

$f : A \to f(A) \subset R$ fonksiyonu A kümesinde sürekli ve kesin olarak artan ya da kesin olarak azalan bir fonksiyon ise f(A) kümesinde tanımlı f^{-1} ters fonksiyonuda f(A) kümesinde kesin olarak artan ya da kesin olarak azalan bir fonksiyondur.

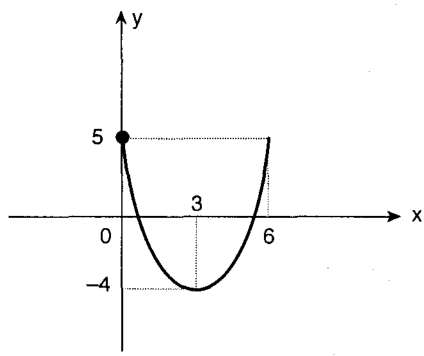
TEOREM 12.
$f : A \to R$ ve $g : A \to R$ fonksiyonları $a \in A$ noktasında sürekli iseler, Max (f,g) ve Min(f,g) fonksiyonlarıda $x = a$ noktasında süreklidir.

ÖRNEK

f : [0,6] $\rightarrow$ R fonksiyonu $f(x) = x^2 - 6x + 5$ ile tanımlıdır. **f fonksiyonunun bu aralıkta sürekli olduğunu gösteriniz ve f ([0,6]) kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (x^2 - 6x = 5) = a^2 - 6a + 5$ ve



$f(a) = a^2 - 6a + 5$ dir. $\forall\, a \in [0, 6]$ için $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ olduğundan f bu aralıkta süreklidir.

$f(x) = x^2 - 6x + 5$ parabolünün tepe noktası

$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = (3, -4)$ olduğundan f fonksiyonunun minimum değeri $f(3) = -4$ dür.

$x = 6$ için $f(6) = 6^2 - 6.6 + 5 = 5$,

$x = 0$ için $f(0) = 5$ olduğundan

f fonksiyonunun maksimum değeri $f(6) = 5$ dir. Yani f([0,6]) = [– 4, 5] dir. Yukarıdaki grafiği inceleyiniz.

ÖRNEK

f : R $\rightarrow$ R sürekli ve kesin olarak artan bir fonksiyondur. $f(x + y) = f(x) \,.\, f(y)$ ise

$f^{-1}(xy) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonunun f^{-1} ters fonksiyonu vardır. x, y, t $\in$ f (R) için $x = f(z_1)$, $y = f(z_2)$ ve

$t = f(z_1 + z_2)$ olacak biçimde z_1 ve z_2 sayıları vardır. Buradan

$z_1 = f^{-1}(x)$, $z_2 = f^{-1}(y)$ ve $z_1 + z_2 = f^{-1}(t)$ yazılabilir.

$f(x + y) = f(x) \,.\, f(y)$ olduğundan $f(z_1 + z_2) = f(z_1) \,.\, f(z_2)$ dir.

Yani $t = x \,.\, y$ dir. Buna göre ;

$f^{-1}(x \,.\, y) = f^{-1}(t)$

$f^{-1}(x \,.\, y) = z_1 + z_2$

$f^{-1}(x \,.\, y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$ bulunur.

ÖRNEK

$f(x) = \sin^3 x + 2\sin^2 x + \sin x + 5$ ile tanımlı **f : R $\rightarrow$ R fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{2}$ noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM

$g(x) = x^3 + 2x^2 + x + 5$ ile tanımlı g : R $\rightarrow$ R fonksiyonu ile $h(x) = \sin x$ ile tanımlı

h : R $\rightarrow$ R fonksiyonunu düşünelim.

$(goh)(x) = g(h(x))$

$(goh)(x) = g(\sin x)$

$(goh)(x) = \sin^3 x + 2\sin^2 x + \sin x + 5$ olduğundan

$f(x) = (goh)(x)$ olduğu görülür. g ve h fonksiyonları için , $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ve g fonksiyonu

$x = \frac{\pi}{2}$ de sürekli olduğundan $f(x) = (goh)(x)$ fonksiyonuda $x = \frac{\pi}{2}$ noktasında süreklidir.

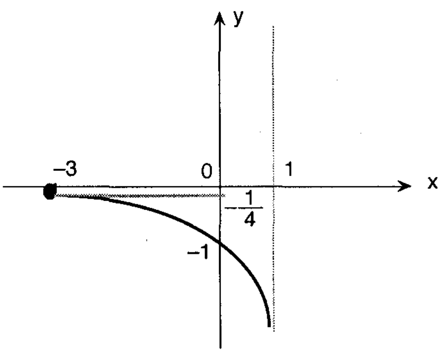
MONOTON (TEK DÜZE) FONKSİYONLAR

f : A → R fonksiyonu verilsin.

1. $\forall\ x_1, x_2 \in A$ için $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0$ oluyorsa, f fonksiyonu A kümesinde **monoton artandır.**
2. $\forall\ x_1, x_2 \in A$ için $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0$ oluyorsa, f fonksiyonu A kümesinde **monoton azalandır.**
3. $\forall\ x_1, x_2 \in A$ için $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) \le 0$ oluyorsa, f fonksiyonu A kümesinde **monoton azalmayandır.**
4. $\forall\ x_1, x_2 \in A$ için $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) \ge 0$ oluyorsa, f fonksiyonu A kümesinde **monoton artmayandır.**

ÖRNEK $f : [-3, 1) \to R,\ f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ **fonksiyonunun monotonluğunu araştırınız.**

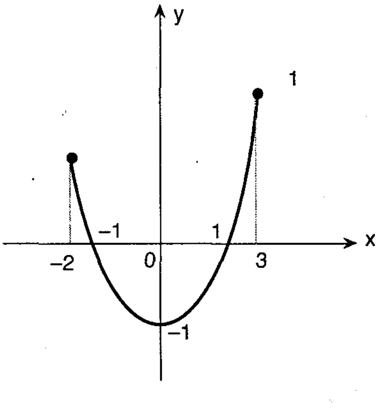
ÇÖZÜM



$x_1, x_2 \in [-3, 1)$ ve $x_1 < x_2$ olsun. $x_1 - 1 < x_2 - 1$ dir. $x_1 - 1 < 0$ ve $x_2 - 1 < 0$ olduğundan $\dfrac{1}{x_1 - 1} > \dfrac{1}{x_2 - 1}$ dir. Yani $f(x_1) > f(x_2)$ dir. O halde f fonksiyonu $[-3, 1)$ aralığında monoton azalandır. Grafiği inceleyiniz.

ÖRNEK $f : [-2, 3] \to R,\ f(x) = x^2 - 1$ **fonksiyonunun monotonluğunu araştırınız.**

ÇÖZÜM



Grafiktede görüldüğü gibi f fonksiyonu $-2 < x < 0$ aralığında monoton azalan, $0 < x < 3$ aralığında ise monoton artandır.

ÇÖZÜMLÜ TEST

1. **$\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 4x^2 + 5x + 1)$ değeri nedir?**

A) –3 B) –2 C) 0 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - 4x^2 + 5x + 1) = 2^3 - 4.2^2 + 5.2 + 1$$

$$= 8 - 16 + 10 + 1 = 3$$

YANIT "E"

2. **$\lim\limits_{x \to -6} \sqrt{100 - x^2}$ değeri nedir?**

A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

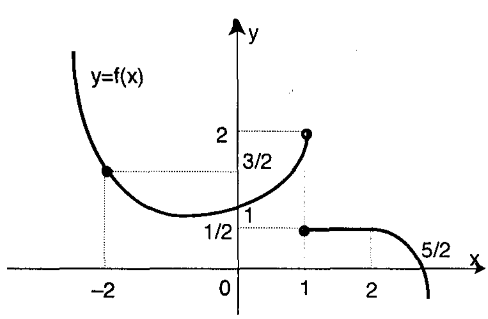
ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to -6} \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100 - (-6)^2} = \sqrt{100 - 36}$$

$$= \sqrt{64} = 8$$

YANIT "B"

3.



Şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **Fonksiyonun –2, 0, 1, 2 apsisli noktaları için var olan limitleri toplamı kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \frac{3}{2} \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \frac{3}{2} \end{array}\right\} \lim_{x \to -2} f(x) = \frac{3}{2} \text{ dir.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = 1 \text{ dir.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \lim_{x \to 1} f(x) \text{ yoktur.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \lim_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

O halde fonksiyonun –2, 0, 2 apsisli noktalarda limiti vardır. Bu noktalardaki limitleri toplamın ise;

$$\lim_{x \to -2} = f(x) + \lim_{x \to 0} f(x) + \lim_{x \to 2} f(x)$$

$$= \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 3 \text{ bulunur.}$$

YANIT "C"

4. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & , \; x < -1 \text{ ise} \\ 3 & , \; x = -1 \text{ ise} \\ 2x + 1 & , \; x > -1 \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı f fonksiyonunun $x \to -1$ için soldan ve sağdan limitleri toplamı kaçtır?

A) –4 B) –3 C) –2 D) –1 E) 0

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1} (x^2-4) = 1-4=-3$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (2x+1) = -2x+1=-1$$

dir.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) + \lim_{x\to -1^+} f(x) = -3-1=-4$$

bulunur.

YANIT "A"

5. $f(x) = \begin{cases} \llbracket x+1 \rrbracket & , \ x<0 \text{ ise} \\ -x & , \ 0 \le x < 1 \text{ ise} \\ -x^2+3x-2 & , \ 1 \le x \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı f fonksiyonu için $\lim_{x\to 0} f(x)$ değeri nedir?

A) –2 B) – 1 C) 0
D) 1 E) Limit yoktur.

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \llbracket x+1 \rrbracket = \lim_{x\to 0^-} (\llbracket x \rrbracket+1) =$$

$-1+1=0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (-x) = -0 = 0$ dır. Yani

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ olduğundan

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ bulunur.

YANIT "C"

6. $\lim_{x\to 2^-} \left(\frac{|x-2|}{2-x} + x + 1\right)$ **değeri nedir?**

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) limit yoktur

ÇÖZÜM

x	⟶ –2	
x – 2	– ○	+

$$\lim_{x\to 2^-} \left(\frac{|x-2|}{2-x} + x + 1\right) =$$

$$\lim_{x\to 2^-} \left(\frac{-(x-2)}{2-x} + x + 1\right) = 1+2+1=4$$

bulunur.

YANIT "D"

7. $\lim_{x\to 2^-} [\, (x-x^2) .\text{sgn}(x^2-x-6)\,]$ **değeri nedir?**

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) limit yoktur

ÇÖZÜM

x	–∞	–2 ⟶ 2		3	+∞
x^2-x-6	+	○	–	○	+

$$\lim_{x\to 2^-} [\, (x-x^2)\, .\, \text{sgn}\,(x^2-x-6)\,]$$

$$= \lim_{x\to 2^-} [(x-x^2)\, .\, (-1) = (2-4)\, .\, (-1) = 2$$

bulunur.

YANIT "B"

8. $\lim_{x\to -2^+} (\, \llbracket x \rrbracket - |x+2|)$ **değeri nedir?**

A) 2 B) 1 C) 0 D) – 1 E) – 2

ÇÖZÜM

$\lim_{x\to -2^+} \llbracket x \rrbracket = -2$ dir.

$\lim_{x\to -2^+} |x+2| = \lim_{x\to -2^+} (x+2) = 0$ dır.

O halde;

$\lim_{x\to -2^+} (\, \llbracket x \rrbracket - |x+2|\,) = (-2-0) = -2$

bulunur.

YANIT "E"

9. $\lim_{x\to \pi^+} \llbracket 3 + \sin x \rrbracket$ **değeri nedir?**

A) 2 B) 1 C) 0 D) – 1 E) – 2

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to\pi^+} [\![3+\sin x]\!] = \lim_{x\to\pi^+} (3+[\![\sin x]\!])$$
$$= \lim_{x\to\pi^+} 3 + \lim_{x\to\pi^+} [\![\sin x]\!]$$
$$= 3+(-1) = 2 \text{ bulunur.}$$

YANIT "A"

10. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\dfrac{x+1}{|x+1|}, & x<-1 \text{ ise} \\ x^2+mx-1, & x\geq -1 \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı f fonksiyonunun $x \to -1$ için limiti varsa m kaçtır?

A) $\frac{5}{2}$ B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) 1 E) $\frac{1}{2}$

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \operatorname{sgn}\frac{x+1}{|x+1|}$$
$$= \lim_{x\to -1^-} \operatorname{sgn}\frac{x+1}{-(x+1)} = -1$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2+mx-1)$$
$$= 1-m-1 = -m \text{ dir.}$$
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) \text{ olacağından}$$
$$-m=-1 \Rightarrow m=1 \text{ bulunur.}$$

YANIT "D"

11. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+5x-6}{x+\operatorname{sgn}(x^2-2x-1)}$ **değeri nedir?**

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

ÇÖZÜM

$x=1$ için $\operatorname{sgn}(x^2-2x-1) = \operatorname{sgn}(1-2-1)$ $= \operatorname{sgn}(-2) = -1$ dir.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+5x-6}{x+\operatorname{sgn}(x^2-2x-1)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+5x-6}{x-1} = \frac{0}{0}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+6)}{(x-1)} = 7 \text{ bulunur.}$$

YANIT "B"

12. $\lim_{x\to 3} [f(x)+x-4] = 6$ ise

$\lim_{x\to 3} f(x)$ **değeri nedir?**

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to 3} [f(x)+x-4] = 6$$
$$\lim_{x\to 3} f(x) + \lim_{x\to 3} (x-4) = 6$$
$$\lim_{x\to 3} f(x) + 3 - 4 = 6$$
$$\lim_{x\to 3} f(x) = 7 \text{ bulunur.}$$

YANIT "C"

13. $\lim_{x\to 3^-} \left(\dfrac{|9-x^2|}{x-3} + \dfrac{\operatorname{sgn}(3-x)}{|x+1| + [\![x]\!]} - 2x + 1 \right)$

değeri nedir?

A) $-\frac{3}{2}$ B) -1 C) 0 D) $-\frac{53}{6}$ E) $-\frac{65}{6}$

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to 3^-} \left(\frac{|9-x^2|}{x-3} + \frac{\operatorname{sgn}(3-x)}{|x+1| + [\![x]\!]} - 2x + 1 \right)$$

$$\lim_{x\to 3^-} \left(\frac{(9-x^2)}{x-3} + \frac{1}{(x+1)+2} - 2x + 1 \right)$$

$$\lim_{x\to 3^-} \left[\frac{(3-x).(3+x)}{-(3-x)} + \frac{1}{(x+3)} - 2x + 1 \right]$$
$$= -6 + \frac{1}{6} - 6 + 1$$
$$= -12 + \frac{7}{6} = -\frac{65}{6}$$

YANIT "E"

14. $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{\sin\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sin(x-3)}}$ **değeri nedir?**

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\sin\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sin(x-3)}}=\frac{0}{0}$$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\sin\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sin(x-3)}}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sin\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}}\cdot\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sin(x-3)}}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{\sin\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}}\right)\cdot\lim_{x\to 3^+}\sqrt{\frac{x-3}{\sin(x-3)}}$$

$=1\,.\,\sqrt{1}=1$ bulunur.

YANIT "C"

15. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\cos[\![x-2]\!]}{[\![\sin(x-3)]\!]}$ **değeri nedir?**

A) -1 B) 0 C) $-\cos 2$ D) $\cos 2$ E) 1

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\cos[\![x-2]\!]}{[\![\sin(x-3)]\!]}=\frac{\cos(-2)}{[\![\sin(-2)]\!]}=\frac{\cos 2}{[\![-\sin 2]\!]}$$

$=\dfrac{\cos 2}{-1}=-\cos 2$ bulunur.

YANIT "C"

16. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{x^3-64}$ **değeri nedir?**

A) $-\dfrac{1}{128}$ B) $-\dfrac{1}{112}$ C) 0

D) $\dfrac{1}{112}$ E) $\dfrac{1}{128}$

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{x^3-64}=\frac{2-\sqrt{4}}{4^3-64}=\frac{0}{0}$$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 4}\left[\frac{(2-\sqrt{x})\,.\,(2+\sqrt{x})}{(x^3-64)\,.\,(2+\sqrt{x})}\right]$$

$$\lim_{x\to 4}\left[\frac{2-x}{(x-2)\,(x^2+2x+4)\,.\,(2+\sqrt{x})}\right]$$

$$=\frac{-1}{(4^2+2.4+4)\,.\,(2+\sqrt{4})}=\frac{-1}{28.4}$$

$=-\dfrac{1}{112}$ bulunur.

YANIT "B"

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+3^{\frac{1}{x}}}{7-2^{\frac{1}{x}}}$ **değeri nedir?**

A) $\dfrac{1}{6}$ B) $\dfrac{1}{5}$ C) $\dfrac{1}{4}$ D) $\dfrac{1}{3}$ E) $\dfrac{1}{2}$

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+3^{\frac{1}{x}}}{7-2^{\frac{1}{x}}}=\frac{2+3^{\frac{1}{\infty}}}{7-2^{\frac{1}{\infty}}}=\frac{2+3^0}{7-2^0}=\frac{2+1}{7-1}$$

$=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$ bulunur.

YANIT "E"

18. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+2}}{x+1}$ **değeri nedir?**

A) $\dfrac{2}{3}$ B) $\dfrac{3}{4}$ C) $\dfrac{4}{5}$ D) $\dfrac{5}{6}$ E) 1

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+2}}{x+1}=\frac{\sqrt[3]{-1}+\sqrt[3]{1}}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+2}}{x+1}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+2})\,.\,\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{(x.(x+2))}+\sqrt[3]{(x+2)^2}\right)}{(x+1)\,.\,(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x.(x+2)}+\sqrt[3]{(x+2)^2})}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+x+2}{(x+1)\,.\,(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x.(x+2)}+\sqrt[3]{(x+2)^2})}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{2\,(x+1)}{(x+1)\,.\,(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x.(x+2)}+\sqrt[3]{(x+2)^2})}$$

$$=\frac{2}{\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{-1.1}+\sqrt[3]{1}}=\frac{2}{1+1+1}=\frac{2}{3}$$

bulunur.

YANIT "A"

19. $\lim_{x \to 1} \dfrac{(x^3 - x^2 - x + 1)^3}{(x^2 - 4x + 3)^6}$ **değeri nedir?**

A) $\frac{1}{64}$ B) $\frac{1}{32}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{4}$

ÇÖZÜM

$\lim_{x \to 1} \dfrac{(x^3 - x^2 - x + 1)^3}{(x^2 - 4x + 3)^6} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^3 - x^2 - x + 1)^3}{(x^2 - 4x + 3)^6} = \lim_{x \to 1} \frac{[x^2(x-1) - (x-1)]^3}{[(x-1).(x-3)]^6}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{[(x-1).(x^2-1)]^3}{(x-1)^6.(x-3)^6} = \lim_{x \to 1} \frac{[(x-1).(x-1)(x+1)]^3}{(x-1)^6.(x-3)^6}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^6.(x+1)^3}{(x-1)^6.(x-3)^6} = \frac{2^3}{(-2)^6} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$$

bulunur.

YANIT "D"

20. $\lim_{x \to 3} \dfrac{4 - \sqrt{5x+1}}{3 - \sqrt{2x+3}}$ **değeri nedir?**

A) $\frac{17}{8}$ B) $\frac{15}{8}$ C) $\frac{11}{8}$ D) 1 E) $\frac{7}{8}$

ÇÖZÜM

$\lim_{x \to 3} \dfrac{4 - \sqrt{5x+1}}{3 - \sqrt{2x+3}} = \dfrac{4 - \sqrt{16}}{3 - \sqrt{9}} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to 3} \frac{4 - \sqrt{5x+1}}{3 - \sqrt{2x+3}} = \lim_{x \to 3} \frac{(4 - \sqrt{5x+1}).(4 + \sqrt{5x+1}).(3 + \sqrt{2x+3})}{(3 - \sqrt{2x+3}).(3 + \sqrt{2x+3}).(4 + \sqrt{5x+1})}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(16 - 5x - 1).(3 + \sqrt{2x+3})}{(9 - 2x - 3).(4 + \sqrt{5x+1})}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{5(3-x).(3 + \sqrt{2x+3})}{2(3-x)(4 + \sqrt{5x+1})}$$

$$= \frac{5.(3 + \sqrt{9})}{2.(4 + \sqrt{16})} = \frac{5.(3+3)}{2.(4+4)} = \frac{5.6}{2.8} = \frac{15}{8}$$

bulunur.

YANIT "B"

21. $\lim_{x \to \frac{\pi}{8}} \dfrac{8x - \pi}{\sin 2x - \cos 2x}$ **değeri nedir?**

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{2}$

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{8}} \frac{8x - \pi}{\sin 2x - \cos 2x} = \frac{\pi - \pi}{\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4}} = \frac{0}{0}$$

belirsizliği vardır.

$\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ yazarak

$\sin 2x - \cos 2x$ ifadesine dönüşüm formülü uygulayalım.

$$\sin 2x - \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \cos 2x$$

$$= -2\sin \frac{\frac{\pi}{2} - 2x + 2x}{2} . \sin \frac{\frac{\pi}{2} - 2x - 2x}{2}$$

$$= -2\sin \frac{\pi}{4} . \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \text{ olur.}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{8}} \frac{8x - \pi}{\sin 2x - \cos 2x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{8}} \frac{8x - \pi}{-2\sin\frac{\pi}{4} . \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{8}} \frac{1}{-2\sin\frac{\pi}{4}} \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{8}} \frac{4\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)}$$

$$= -\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4}} . 4.(-1) = \frac{-1.(-4)}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

bulunur.

YANIT "C"

22. $\lim_{x \to 0} \dfrac{5x^2}{1 - \cos 2x}$ **değeri nedir?**

A) $\frac{7}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 0

ÇÖZÜM

$\lim_{x \to 0} \dfrac{5x^2}{1 - \cos 2x} = \dfrac{5.0}{1 - \cos 0} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ yazılırsa,

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{1-\cos 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{1-(1-2\sin^2 x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{5}{2}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$$

$$= \frac{5}{2}\cdot 1^2 = \frac{5}{2} \text{ bulunur.}$$

YANIT "B"

23. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2-5x+7}{7x^2+8x+1}$ **değeri nedir?**

A) $-\frac{5}{8}$ B) $\frac{3}{7}$ C) 1 D) 7 E) ∞

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2-5x+7}{7x^2+8x+1} = \dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

Pay ve paydanın dereceleri eşit olduğundan, limit en yüksek dereceli terimlerin katsayıları oranına eşittir.

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2-5x+7}{7x^2+8x+1} = \dfrac{3}{7}$ bulunur.

YANIT "B"

24. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2-1}-2x}$ **değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 1 B) 0 C) – 1 D) – 2 E) – 3

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2-1}-2x} = \dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizlığı vardır.

$$\lim_{x\to \infty} \frac{2x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2-1}-2x}$$

$$= \lim_{x\to \infty} \frac{2x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}-2x}$$

$$= \lim_{x\to \infty} \frac{2x+x\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-2x}$$

$$= \lim_{x\to \infty} \frac{x\left(2+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-2\right)} = \frac{2+\sqrt{1}}{\sqrt{1}-2} = -3$$

bulunur.

YANIT "E"

25. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x+\sqrt{9x^2-2x+1}}{7x-1}$ **değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 0 B) $\frac{1}{7}$ C) $\frac{6}{7}$ D) 1 E) 7

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x+\sqrt{9x^2-2x+1}}{7x-1} = \dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x+\sqrt{9x^2-2x+1}}{7x-1} = \frac{3-\sqrt{9}}{7}$$

$= \dfrac{3-3}{7} = 0$ bulunur.

YANIT "A"

26. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x-2+\sqrt{16x^2+4x-1}}{9x-3}$ **limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) ∞

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x-2+\sqrt{16x^2+4x-1}}{9x-3} = \dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to \infty} \frac{5x-2+\sqrt{16x^2+4x-1}}{9x-3} = \frac{5+\sqrt{16}}{9}$$

$= \dfrac{5+4}{9} = 1$ bulunur.

YANIT "C"

27. $\lim\limits_{x\to -2} \left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{7x+2}{x^3+8}\right)$ **limitinin değeri nedir?**

A) 1 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{24}$

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to -2} \left(\frac{1}{x+2}+\frac{7x+2}{x^3+8}\right) = \frac{1}{2-2}+\frac{-12}{-8+8}$$

$= \infty - \infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to -2} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{7x+2}{x^3+8} \right) =$$

$$= \lim_{x \to -2} \left[\underset{(x^2-2x+4)}{\frac{1}{x+2}} + \underset{(1)}{\frac{7x+2}{(x+2)(x^2-2x+4)}} \right]$$

$$= \lim_{x \to -2} \left(\frac{x^2-2x+4+7x+2}{(x+2).(x^2-2x+4)} \right)$$

$$= \lim_{x \to -2} \left(\frac{x^2+5x+6}{(x+2).(x^2-2x+4)} \right) = \frac{0}{0}$$

belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to -2} \left[\frac{(x+3)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} \right] = \frac{-2+3}{4+4+4}$$

$= \frac{1}{12}$ bulunur.

YANIT "D"

28. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2x-3} \right)$ **değeri nedir?**

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) ∞

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2x-3} \right) = \infty - \infty$$

belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2x-3})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+2x-3})}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+2x-3}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1-x^2-2x+3}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+2x-3}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} = \frac{-2x+4}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})} + \sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2})}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} = \frac{-2x+4}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} = \frac{x\left(-2+\frac{4}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)}$$

$= \frac{-2}{-\sqrt{1}-\sqrt{1}} = 1$ bulunur.

YANIT "C"

29. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) . \tan 3x$ **değeri nedir?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{3}$

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) . \tan 3x$$

$= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) . \tan \frac{3\pi}{2} = 0.\infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) . \tan 3x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cot 3x} = \frac{0}{0}$$

belirsizliği oluşur.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\tan\left(\frac{3\pi}{2} - 3x \right)}$$

$= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\tan\left[3\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right]} = \frac{1}{3}$ bulunur.

YANIT "A"

30. $\lim\limits_{x \to \infty} 4x . \sin \frac{7}{x}$ **değeri nedir?**

A) 14 B) 21 C) 28 D) $\frac{1}{14}$ E) $\frac{1}{28}$

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to \infty} 4x . \sin \frac{7}{x} = \infty.0 = 0 . \infty$$

belirsizliği vardır.

$\frac{7}{x} = t$ olsun. $x \to \infty$ için $t \to 0$ olur.

$$\lim_{x \to \infty} 4x . \sin \frac{7}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{7}{x}}{\frac{1}{4x}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{7}{x}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{x} \cdot \frac{1}{7}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{7}{x}}{\frac{1}{28} \cdot \frac{7}{x}}$$

$= \lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{\frac{1}{28} . t} = \frac{1}{\frac{1}{28}} = 28$ bulunur.

YANIT "C"

31. $\lim\limits_{x\to 0} = \dfrac{e^{2x}-1}{\tan x}$ **değeri nedir?**

A) 1 B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) 3 E) ∞

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\tan x} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x} \cdot \dfrac{x}{\tan x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)(e^x+1)}{x} \cdot \dfrac{x}{\tan x}$ olur.

$e^x - 1 = t \Rightarrow e^x = t+1 \Rightarrow x = \ln(t+1)$ dir.

$x \to 0 \Rightarrow t \to 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\ln(t+1)}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{\ln(t+1)}{t}\right)^{-1}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t} . \ln(t+1)\right)^{-1}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \left(\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}\right)^{-1} = \left(\ln \lim\limits_{t\to 0} (t+1)^{\frac{1}{t}}\right)^{-1}$

$= \ln \lim\limits_{t\to 0} \left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{t}}\right]^{-1} = (\ln e)^{-1} = 1$ olur.

Yani

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ dir.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1).(e^x+1)}{x} \cdot \dfrac{x}{\tan x}$

$= 1 . (e^0+1) . 1 = 1.2.1 = 2$ bulunur.

YANIT "B"

32. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{2^x-1}$ **değeri nedir?**

A) $\log_2 e$ B) ln2 C) $\log_3 e$
D) ln4 E) 1

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{2^x-1} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{2^x-1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} \cdot \dfrac{x}{2^x-1}$

olsun.

$2^x - 1 = t \Rightarrow 2^x = t+1 \Rightarrow x = \dfrac{\ln(t+1)}{\ln 2}$ olur.

$x \to 0 \Rightarrow t \to 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2^x-1} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(t+1)}{t.\ln 2}$

$= \dfrac{1}{\ln 2} \cdot \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(t+1)}{t}$

$= \dfrac{1}{\ln 2} \lim\limits_{t\to 0} \ln(t+1)^{\frac{1}{t}}$

$= \dfrac{1}{\ln 2} . \ln e = \dfrac{1}{\ln 2}$ bulunur.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$

bulunur.

O halde

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{2^x-1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} . \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2^x-1}$

$= 1 . \dfrac{1}{\ln 2} = \dfrac{1}{\ln 2} = \log_2 e$ bulunur.

YANIT "A"

33. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$ **değeri nedir?**

A) e^2 B) e^3 C) e^5 D) e^6 E) ∞

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x} = e^{2.3} = e^6$ bulunur.

($\lim\limits_{n\to \infty} \left(1+\dfrac{p}{n}\right)^{k.n} = e^{p.k}$ olduğunu hatırlayınız.)

YANIT "D"

34. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$ **değeri nedir?**

A) e^{-2} B) e^{-1} C) e D) e^2 E) 1

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{1}{x}}$$

yazılır.

$x \to \infty \Rightarrow x^2 \to \infty$ dır.

$$\lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1$$

bulunur.

YANIT "E"

35. $\lim\limits_{x \to e} \frac{e - x}{1 - \ln x}$ **değeri nedir?**

A) $\frac{1}{e^2}$ B) $\frac{1}{e}$ C) e D) e^2 E) ∞

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to e} \frac{e - x}{1 - \ln x} = \frac{e - e}{1 - \ln e} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği}$$

vardır.

$$\lim_{x \to e} \frac{e - x}{1 - \ln x} = \lim_{x \to e} \frac{e - x}{\ln e - \ln x} \text{ yazalım.}$$

$$\lim_{x \to e} \frac{x - e}{\ln x - \ln e} = \lim_{x \to e} \frac{x - e}{\ln\left(\frac{x}{e}\right)} \text{ olar.}$$

$\frac{x}{e} = t + 1 \Rightarrow x = et + e$ dir.

$x \to e \Rightarrow t \to 0$ dır.

$$\lim_{x \to e} \frac{x - e}{\ln\left(\frac{x}{e}\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{et + e - e}{\ln(t + 1)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{et}{\ln(t + 1)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{e}{\frac{\ln(t + 1)}{t}} = \lim_{t \to 0} e . \frac{1}{\ln(t + 1)^{\frac{1}{t}}}$$

$$= e . \frac{1}{\ln e} = e . 1 = e \text{ bulunur.}$$

YANIT "C"

36. $f(x) = \begin{cases} 2 & , \ x \leq 1 \text{ ise} \\ mx + n & , \ 1 < x < 4 \text{ ise} \\ 9 & , \ x \geq 4 \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı f fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için sürekli ise, m – n kaçtır?

A) $-\frac{1}{3}$ B) 1 C) 2 D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{8}{3}$

ÇÖZÜM

f fonksiyonun kritik noktaları 1 ve 4 dür.

O halde

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2 = 2$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (mx + n) = m + n$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 2 = m + n$ olmalıdır.

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} (mx + n) = 4m + n$

$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} 9 = 9$

$\lim\limits_{x \to 4} f(x) = f(4) = 9 = 4m + n$ olmalıdır.

$$\begin{array}{r} m + n = 2 \\ - \quad 4m + n = 9 \\ \hline -3m = -7 \end{array}$$

$m = \frac{7}{3}$ ve $n = -\frac{1}{3}$ bulunur.

$m - n = \frac{7}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}$ bulunur.

YANIT "E"

37. $f(x) = \begin{cases} [\![x - 1]\!] & , \ x < -2 \text{ ise} \\ a & , \ x = -2 \text{ ise} \\ b + \text{sgn}(x + 1) & , \ x > -2 \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı f fonksiyonu x = –2 de sürekli ise, a + b kaçtır?

A) –7 B) – 6 C) – 5 D) – 4 E) – 3

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2)$ olmalıdır.

$f(-2) = a$

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} [\![x - 1]\!] = -4$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} [b + \text{sgn}(x + 1)] = b - 1$

O halde; $a = -4 = b - 1$ olmalıdır.

Buradan $a = -4$ ve

$b = -3$ bulunur. $a + b = -7$ dir.

YANIT "A"

LİMİT VE SÜREKLİLİK

TEST 1

1. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2 - 3}$ **değeri nedir?**

A) −5 B) −3 C) 0 D) 3 E) 5

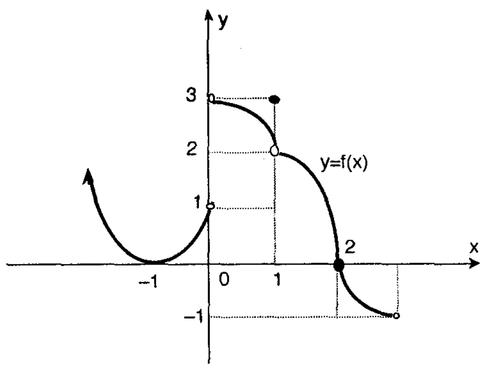
2. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & , \ x < -1 \quad \text{ise} \\ x^2 + 3 & , \ -1 \le x < 2 \quad \text{ise} \\ x & , \ x \ge 2 \quad \text{ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı f(x) fonksiyonu için

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) + \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ **toplamı nedir?**

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

3.



Şekilde grafiği verilen f(x) fonksiyonunun −1,0,1,2 apsisli noktaları için var olan **limitler toplamı kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

4. $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{\llbracket 3x - \llbracket x+2 \rrbracket + 1 \rrbracket}{2x - 1}$ **değeri nedir?**

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

5. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\llbracket x \rrbracket^2 - 1}{x - 2}$ **değeri nedir?**

A) −1 B) 0 C) 1 D) $-\infty$ E) $+\infty$

6. $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{\llbracket x \rrbracket^2 - 10}{x - 3}$ **değeri nedir?**

A) −1 B) 0 C) 1 D) $-\infty$ E) $+\infty$

7. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\llbracket x^2 \rrbracket - 4}{x - 2}$ **değeri nedir?**

A) −1 B) 0 C) 1 D) $+\infty$ E) $-\infty$

8. $\lim\limits_{x \to -2^+} \left(\dfrac{|x^2 - 4|}{x + 2} + \llbracket 2x - 3 \rrbracket \right)$ **değeri nedir?**

A) −4 B) −3 C) −2 D) −1 E) 0

9. $\lim\limits_{x \to 2^+} \left(\llbracket 3x \rrbracket + \operatorname{Sgn}(x^2 - 4) + \dfrac{|x - 2|}{x - 2} \right)$ **değeri nedir?**

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

10. $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\llbracket x - \llbracket x + \llbracket x \rrbracket \rrbracket \rrbracket \right)$ **değeri nedir?**

A) −3 B) −2 C) −1 D) 0 E) 1

11. $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} \left(\llbracket \tfrac{1}{x} \rrbracket + 2x + 3 \right)$ **değeri nedir?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

12. $\lim\limits_{x \to 0} \left| \dfrac{x}{|x|} + \dfrac{|x|}{x} \right|$ **değeri nedir?**

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) Limit yoktur.

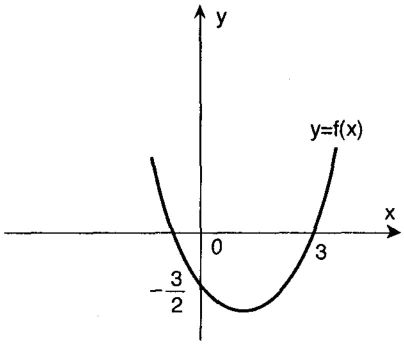
13. $\lim\limits_{x \to \pi^+} \dfrac{m + \cos x}{\llbracket \cos x \rrbracket} = 4$ ise **m kaçtır?**

A) −4 B) −3 C) 0 D) 3 E) 4

14. $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \dfrac{4 + \operatorname{sgn}(\sin x)}{\llbracket \cos x \rrbracket}$ **değeri nedir?**

A) −5 B) −3 C) 0 D) 3 E) 5

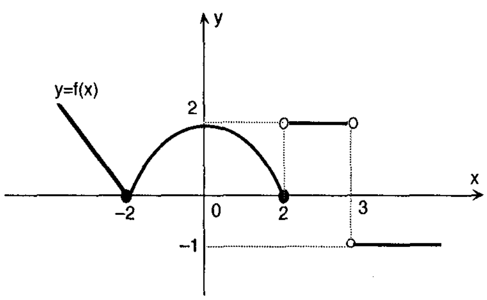
15.



Grafiği yukarıda verilen f(x) fonksiyonu için $\lim\limits_{x\to 0} [f(x)\ .\ \text{Sgn}\ f(x)]$ **değeri nedir?**

A) $-\frac{3}{2}$ B) -1 C) 0 D) 1 E) $\frac{3}{2}$

16.



Yukarıda grafiği verilen f(x) fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0$

B) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -1$

C) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$

D) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 0$

E) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 0$

17. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = 10$

B) $\lim\limits_{x\to 2} [\![x]\!] = \text{Yok}$

C) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

D) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1}{x^2-7x+12} = +\infty$

E) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left([\![x]\!] + \frac{|x|}{x} - \text{sgn}(x-1)\right) = 0$

18. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin\frac{\pi x}{4} + \tan\frac{\pi}{2x}}{x^2-2}$ limitinin değeri **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

19. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$ **değeri nedir?**

A) $-\frac{2}{\pi}$ B) $-\frac{1}{\pi}$ C) 0 D) $\frac{-4}{\pi}$ E) $\frac{2}{\pi}$

20. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\frac{1}{2}-\cos x}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin x}$ **değeri nedir?**

A) $-\sqrt{3}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) 0

D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\sqrt{3}$

21. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$ **değeri nedir?**

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) 1 E) $\sqrt{2}$

22. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x}$ **değeri nedir?**

A) -1 B) $-\frac{2}{3}$ C) 0 D) $\frac{2}{3}$ E) 1

23. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin^2 x - \sin x.\cos x}{\cos 2x}$ **ifadesinin eşiti nedir?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ C) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

D) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ E) $\frac{1}{4}$

24. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 2\sin\left(\frac{x-2}{2}\right) - 4}{x-2}$ **ifadesinin eşiti nedir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\tan x - x}{\sin x}$ **ifadesinin eşiti nedir?**

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) -1 E) 2

LİMİT VE SÜREKLİLİK

TEST 2

1. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x^2-10x+9}{\sqrt{x}-3}$ **değeri nedir?**

A) 8 B) 16 C) 24 D) 32 E) 48

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2}{x^2+2x-3}$ **değeri nedir?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 20

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x}-1}{3-2\sqrt{2x}}$ **değeri nedir?**

A) $7+2\sqrt{2}$ B) $7-2\sqrt{2}$
C) $9-\sqrt{2}$ D) $1+\sqrt{2}$
E) 0

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+m}-2}{x-1}$ **değeri bir reel sayı ise m kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5. $b \in R$ olmak üzere

$\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-a\sqrt{x}}{x^2-9x} = b$ ise **b kaçtır?**

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{18}$ D) $\frac{1}{24}$ E) $\frac{1}{27}$

6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4} = 3$ ise **a + b kaçtır?**

A) – 12 B) – 8 C) – 4 D) –3 E) 1

7. $\lim\limits_{a\to x} \dfrac{x^2-\sqrt{ax^3}}{a-x}$ **değeri nedir?**

A) $-\frac{x}{2}$ B) $-x^4$ C) $-x^3$ D) $-x^2$ E) $-x$

8. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ **değeri nedir?**

A) $\frac{1}{6}$ B) 1 C) 6 D) 12 E) $6\sqrt{2}$

9. $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ olmak üzere,

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ **limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

10. $a \in R$ olmak üzere,

$f(x) = x^3 + ax^2 + 2x$ için,

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ **limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $3a^2+2$ B) $4a^2+2$ C) $5a^2+2$
D) $6a^2+2$ E) $8a^2+2$

11. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sin\frac{\pi x}{2} + \tan\frac{\pi x}{4}}{3-\cos \pi x}$ **limiti neye eşittir?**

A) 0 B) – 1 C) 1 D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{3}{4}$

12. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x}$ **limiti neye eşittir?**

A) 0 B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $-\frac{5}{6}$ E) $-\frac{3}{4}$

ZAFER YAYINLARI

13. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+4x+3}{|x+1|}, & x<-1 \\ 3^{x+1}+a, & x>-1 \end{cases}$ biçiminde

tanımlanan fonksiyonun $x = -1$ de limiti varsa **a nın değeri kaçtır?**

A) 3 B) 1 C) – 1 D) – 3 E) – 5

14. $f(x) = \begin{cases} x+3, & x<-2 \\ x^2+[\![x]\!], & -2<x<1 \\ 2x+\text{sgn}(x-6), & x \geq 1 \end{cases}$

biçiminde tanımlanan f(x) fonksiyonunun x in $-3, -2, -\frac{1}{2}$, 1,2,3,4 **değerlerinden kaç tanesi için limiti vardır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

15. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{[\![x]\!]+x^2}{\text{sgn}(2x-x^2)}$ limitinin değeri **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) – 6 B) – 5 C) –4 D) –3 E) –2

16. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{\text{sgn}(3x+6)}$ **limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) – 1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

17. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-\sqrt{x+a}}{x-1} = c$ ise

$\frac{c}{a}$ **nın değeri kaçtır?**

A) 3 B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{9}{4}$ E) $\frac{15}{4}$

18. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^3+x^2-5x+3)^2}{(x^2-1)^3(x^2+2x-3)}$ **limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 4 B) 2 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\sqrt[3]{\sin x}}$ **limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 6

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^5(2x)}{x^2\tan^3(4x)}$ **limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) 2 E) 4

21. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(3^{-\frac{4}{x}}+4^{x+1}+4\right)$ **limitinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 0 B) 4 C) 5 D) 7 E) 9

22. $\lim\limits_{x\to 4} \left(\dfrac{1}{x^2-7x+12}-\dfrac{1}{x-4}\right)$ **limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) – 1 B) – 2 C) 0 D) 1 E) 2

23. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{4x+\sqrt{x^2+1}}{3x+4^x}$ **limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 1 B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{3}{7}$ E) 0

24. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(x+1)^3+(x+2)^3+\ldots+(x+10)^3}{5x^3+7^{-2x}}$

limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 10

25. $A = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+4x-\frac{3}{2}}-\sqrt{x^2-8x+3}\right)$

$B = \lim\limits_{x\to \infty} \left(\log_3\sqrt{81x^2+7x}-\log_3\sqrt{x^2+5x+13}\right)$

ise **B – A kaçtır?**

A) – 8 B) – 4 C) 6 D) 8 E) 10

ZAFER YAYINLARI

LİMİT VE SÜREKLİLİK

TEST 3

1. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$ **limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 0 B) 1 C) 3 D) 6 E) 9

2. $f(x) = \begin{cases} [\![x+2]\!] & ; x < 0 \text{ ise} \\ x+1 & ; 0 \le x < 1 \text{ ise} \\ 3x+5 & ; x \ge 1 \text{ ise} \end{cases}$

olarak verildiğine göre,

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) + \lim\limits_{x \to 2} f(x)$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 10 B) 11 C) 12 D) 15 E) 12

3. $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^+} \left([\![\cos x]\!] + \operatorname{sgn}(\cot x)\right) = A$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x} = B \; ; \; \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = C$

ise, **$A + B^C$ kaçtır?**

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2

4. $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{[\![2x - [\![x+3]\!]\,]\!]}{x-3} + \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7^x - 7^{-x}}{7^x + 7^{-x}}$

aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 1 B) 0 C) – 1 D) – ∞ E) ∞

5. $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{[\![x]\!]^2 - 16}{x-4} + \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + 2\sin x}{|x| + \sqrt{x^2-4}}$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) 4 E) 0

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\left(\frac{7}{x^3} + \frac{8}{x^2} + \frac{2}{x} - 2\right)^3 + 8}{\left(\frac{7}{x^3} + \frac{8}{x^2} + \frac{2}{x} - 2\right)^2 - 4}$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) – 4 B) – 3 C) – 2 D) 0 E) 2

7. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[3]{\dfrac{(\sqrt{x}-3)(5-\sqrt{x})}{8x-17}} + \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3}{2}$ B) – 1 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) $-\frac{1}{2}$

8. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^5 + 4x^4 - ax^3 + 2x^2 - 1}{x+1} = b, \; b \in R$

ise, **a + b kaçtır?**

A) – 7 B) – 4 C) – 3 D) – 1 E) 4

ZAFER YAYINLARI

9. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{3+7^{\frac{1}{x}}} + \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(|x|+2x)\,[\![x]\!]}{x}$

aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-\frac{2}{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(e^{-x} + \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{\operatorname{sgn} x}{x}\right)$ **değeri nedir?**

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{1}{1-\sin x} - \dfrac{2}{\cos^2 x}\right)$ **değeri nedir?**

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

12. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\tan(x-1)}{x^2-1}$ **değeri nedir?**

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

13. $\lim\limits_{x\to -\infty} (x + \sqrt{x^2-6x+1})$ **değeri nedir?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

14. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2} - x)$ **değeri nedir?**

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

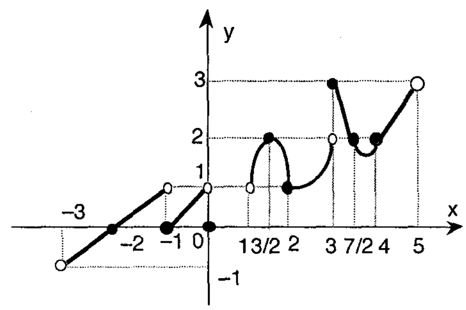
15. $f: R \to R;\ f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-(m+3)\cdot x + m^2}$

fonksiyonun sürekli bir fonksiyon olabilmesi için **(m) ne olmalıdır?**

A) $-1 < m < 3$ B) $m < -1$ C) $m > 3$

D) $R - [-1, 3]$ E) $R - \{-1, 3\}$

16.



Grafiği yukarıda verilen fonksiyonun, sürekli olduğu apsisi tamsayı olan noktalardaki, ordinatları toplamı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

17. $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x > 2 \text{ ise} \\ 2x+a, & x \le 2 \text{ ise} \end{cases}$

f(x) fonksiyonunun R de sürekli olması için, **a ne olmalıdır?**

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{3x}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ k, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

f(x) fonksiyonu x = 0 da sürekli ise **k neye eşittir?**

A) $-\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{6}$ C) 0 D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{3}$

19. a, b ∈ R olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{9x^2-1}{3x-1}, & x > 0 \text{ ise} \\ ax + b, & x \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu x = 0 da sürekli ise, **b neye eşittir?**

A) −2 B) −1 C) 1 D) 2 E) 3

20. $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 4, & 1 < x \text{ ise} \\ 7, & x = 1 \text{ ise} \\ 5x + b, & x < 1 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonu

∀x∈R için sürekli olduğuna göre, **a + b neye eşit-tir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

21. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4} + \sqrt{x^2-6x+5}$ fonksiyonu

kaç tane tamsayı için süreksizdir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

22. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x-2}$ ve $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ fonksiyonları için, **(fog) (x) fonksiyonunu süreksiz yapan kaç x değeri vardır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

23. $f(x) = \begin{cases} 5-3x, & x > 2 \text{ ise} \\ \text{sgn}\,(a^2-a-6), & x = 2 \text{ ise} \\ -\dfrac{1}{2}x, & x < 2 \text{ ise} \end{cases}$

Biçiminde bir f(x) fonksiyonu tanımlanıyor. f(x) fonksiyonunun x = 2 de sürekli olabilmesi için, **a nın alabileceği tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 7

24. $f(x) = \begin{cases} 3-2x, & x > 2 \text{ ise} \\ \text{sgn}\,(a^2-4a-5), & x = 2 \text{ ise} \\ -3x+5, & x < 2 \text{ ise} \end{cases}$

f(x) fonksiyonun x = 2 de sürekli olması için, **a nın alabileceği değerlerin kümesi nedir?**

A) (−5,1) B) [−5,1] C) [1,5]

D) (−1,5) E) R − (−5,1)

25. $f(x) = \begin{cases} 4x-7, & x > 3 \text{ ise} \\ [\![a-2]\!], & x = 3 \text{ ise} \\ x+2, & x < 3 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu tanımlanıyor. f(x) fonksiyonunun x = 3 de sürekli olması için, **a hangi aralıkta olmalıdır?**

A) [5,6] B) [6,7] C) [7,8)

D) (6,7) E) (7,8)

LİMİT VE SÜREKLİLİK

TEST 4

1. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{x}-2}{|x-4|}$ **değeri nedir?**

A) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ B) 1 C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D) $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2-x^3-3}{3x^2-5x+1}$ **değeri nedir?**

A) $-\dfrac{2}{3}$ B) $-\dfrac{1}{3}$ C) 0 D) $-\infty$ E) $+\infty$

3. $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{|x-1|}{1-x} + \text{sgn}\,(x+2) + [\![2x+1]\!]\right)$

değeri nedir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{3-3\sqrt{x}}$ **değeri nedir?**

A) $-\dfrac{1}{3}$ B) $-\dfrac{1}{6}$ C) 0 D) $\dfrac{1}{6}$ E) $\dfrac{1}{3}$

5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x+\sqrt{9x^2-3x+1}}{5x+\sqrt{x^2-x-4}}$ **değeri nedir?**

A) $\dfrac{4}{5}$ B) $\dfrac{7}{6}$ C) 1 D) $\dfrac{13}{6}$ E) 9

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\log_3\sqrt{9x^2-x-1}-\log_3\sqrt{x^2+4x+3}\right)$

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x^{3n}}+3x+5}{2x-7}\right) = b,\ b\in R$ **eşitliğini gerçekleyen n değerlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(2, \infty)$ B) $(\dfrac{3}{2}, 2]$ C) $(1, \dfrac{3}{2}]$

D) $(\dfrac{2}{3}, 1]$ E) $(-\infty, \dfrac{2}{3}]$

8. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2mx+m^2-4}{x^2-4} = -1$ ise

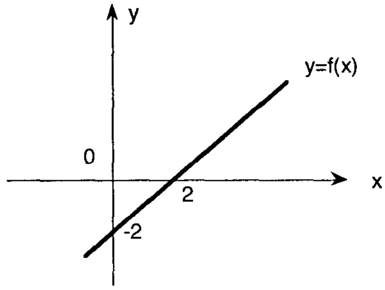
m kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\arcsin(x+3)}{x^2+3x}$ **değeri nedir?**

A) $-\dfrac{1}{3}$ B) 0 C) $\dfrac{1}{4}$ D) $\dfrac{1}{3}$ E) ∞

10.



Şekildeki grafik y = f (x) fonksiyonuna aittir.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{f^{-1}(x)}$ **nedir?**

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

11. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^2} + .. + \dfrac{x-1}{x^2}\right)$

değeri nedir?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

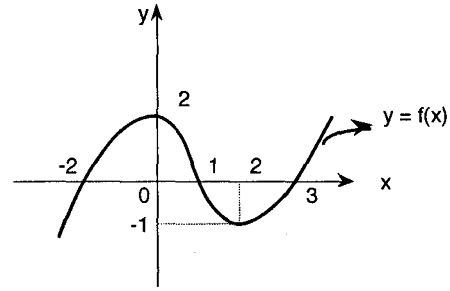
12. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5^x - 5^{-x}}{5^x + 5^{-x}}$ **değeri nedir?**

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

13. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x+5)^5 . (4x-1)^2}{(6x+1)^7}$ **değeri nedir?**

A) $\frac{1}{36}$ B) $\frac{1}{72}$ C) $\frac{1}{107}$ D) $\frac{1}{44}$ E) $\frac{1}{216}$

14.



Şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$\lim\limits_{x \to 2} \left([\![f(x)]\!] . \text{Sgn}\, f(x) + x \right)$ **değeri nedir?**

A) -3 B) -2 C) 0 D) 2 E) 3

15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 4x - \cos 2x}{\sin^2 3x}$ **değeri nedir?**

A) -1 B) $-\frac{2}{3}$ C) 0 D) $\frac{2}{3}$ E) 1

16. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 + 2x}{x-1} - mx + n\right) = 5$ ise

n kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

17. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{-2x}$ **değeri nedir?**

A) $\frac{1}{e^6}$ B) $\frac{1}{e^5}$ C) 0 D) e^5 E) e^6

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|4x-4|}{x-1}, & x > 1 \text{ ise} \\ a, & x = 1 \text{ ise} \\ 5x + b, & x < 1 \text{ ise} \end{cases}$

f(x) fonksiyonu x = 1 de sürekli ise, **a + b kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

19. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{[\![x-2]\!]+1}$ **fonksiyonu hangi alt aralıkta süreksizdir?**

A) $[-1, 0)$ B) $[0,1)$ C) $[1,2)$
D) $[2,3)$ E) $[3,4)$

20. $f(x) = \dfrac{x+1}{[\![x]\!] + \operatorname{sgn}(x-1)}$ **fonksiyonunun sürekli olduğu küme aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\mathbb{R} - \{1\}$ B) $(-\infty, 1]$ C) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$
D) $\mathbb{Z}$ E) $\mathbb{R}$

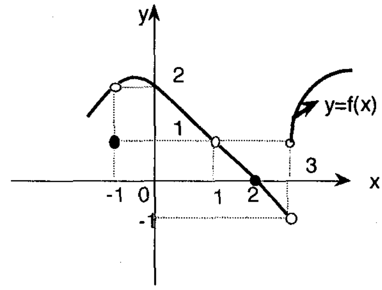
21. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2000 \cdot [\![x]\!] - 3}{[\![2000x]\!] + 3}$ **değeri nedir?**

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

22. $f(x) = \dfrac{\sin \frac{\pi}{3}}{[\![2 - \log_2 \frac{1}{x}]\!]}$ **fonksiyonunun süreksiz olduğu küme aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $[\frac{1}{2}, 2)$ B) $(\frac{1}{2}, 2]$ C) $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$
D) $[\frac{1}{4}, 2)$ E) $[\frac{1}{4}, 4)$

23.



Şekilde, y = f(x) in grafiği verilmiştir. **aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?**

A) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$ B) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$
C) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) =$ yoktur. D) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -1$
E) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$

24. a < 0 olmak üzere;

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{9a^2 - x^2} + 3a}{x^2 - ax - x + 1}$ **değeri nedir?**

A) −2 B) −1 C) 0 D) −a E) a

25. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 5x - \cos x}{\sin 3x - \sin x}$ **değeri nedir?**

A) −2 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 2

LİMİT VE SÜREKLİLİK

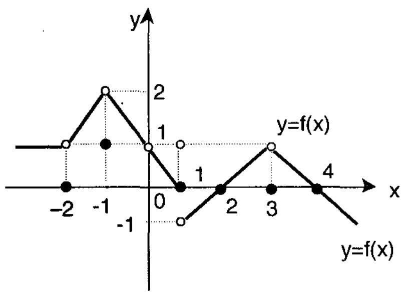
TEST 5

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x}{\cos^2 x} + \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\cos x - 1}{\sin^2 x} + \dfrac{\sin x}{\sin 2x} \right)$

ifadesinin eşiti nedir?

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{3}{2}$

2.



Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır?</u>

A) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 1$

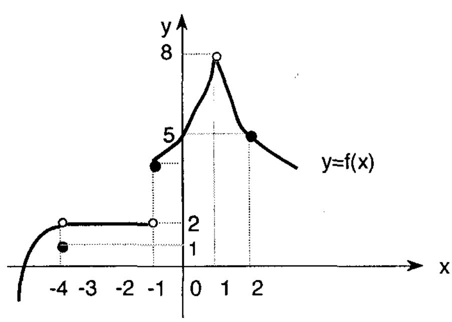
B) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} f(x)$

C) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2$

D) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$

E) $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} \operatorname{sgn}(f(x)) = -1$

3.



Şekilde, y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir. x in –4, –1,1 ve 2 değerleri için, **f(x) in var olan limitleri toplamı kaçtır?**

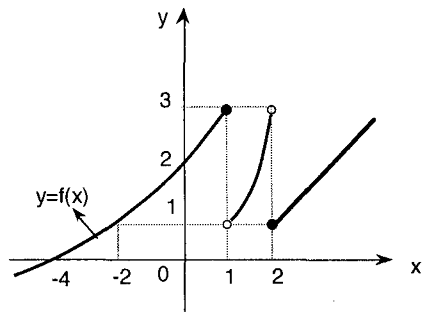
A) 5 B) 10 C) 15 D) 17 E) 19

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{4x^2 + ax - 1} + bx + 3\right) = 5$

olduğuna göre, **a – b değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 12 B) 10 C) 8 D) 6 E) 4

5.



Şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$

B) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

C) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2$

D) $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = 0$

E) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 2$

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{6x^2 + x}{2x - 1} + ax \right)$ ifadesinin sonlu bir limiti var ise, **bu limit aşağıdakilerden hangisidir?**

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2

7. $\lim\limits_{x \to \infty} x \tan \dfrac{6}{x}$ limitinin değeri **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 6 B) 5 C) 4 D) 2 E) 0

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{6x-1}$ limitinin değeri **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) e^{-6} B) e^{-5} C) e^{-4} D) e^{-2} E) e^{2}

9. $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+e^{2x})^{\frac{4}{x}}$ limitinin değeri, **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 12 B) 8 C) e^{8} D) e^{12} E) e^{6}

10. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(2x)}{4x}, & x<0\\ x^2+a, & x\geq 0\end{cases}$ biçiminde tanımlı olan f(x) fonksiyonu, $\forall x\in R$ için sürekli ise **a ne olmalıdır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

11. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2-9}, & x\leq 2\\ x+\operatorname{sgn}(x-4), & x>2\end{cases}$

biçiminde tanımlı f(x) fonksiyonu, **x in kaç farklı reel değeri için süreksizdir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2-2}, & x\leq -1 \text{ için}\\ x^2, & x>-1 \text{ için}\end{cases}$ biçiminde tanımlı olan f(x) fonksiyonu, **x in kaç farklı değeri için süreksizdir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{x+6}}{x-3}, & x\neq 3\\ a+2, & x=3\end{cases}$ fonksiyonu

x = 3 de sürekli ise **a nın değeri kaçtır?**

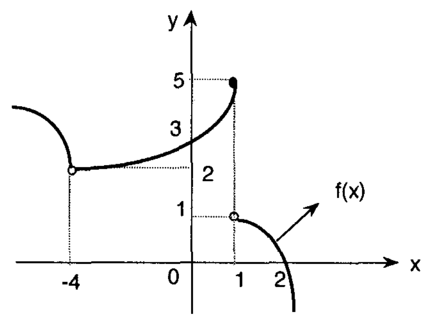
A) $\frac{7}{6}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $-\frac{1}{6}$ D) $-\frac{5}{6}$ E) $-\frac{7}{6}$

14. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{6}{x^2-9}, & x<-2 \text{ ise}\\ x+[\![x]\!], & -2<x<2 \text{ ise}\\ x^2+\operatorname{sgn}(x-7), & 2\leq x \text{ ise}\end{cases}$

biçiminde tanımlı f(x) fonksiyonunu süreksiz yapan kaç tane x reel sayısı vardır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

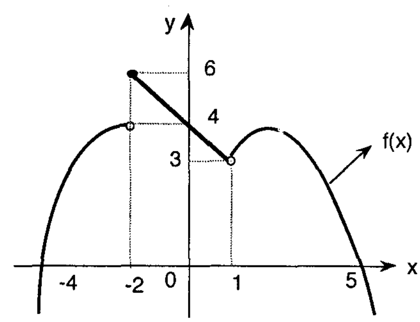
15.



Şekilde f(x) fonksiyonunun grafiği çizilmiştir. f(x)'in x = –4, x = 0, x = 1, x = 2 değerlerinden bazıları için, **var olan limitlerin toplamı kaçtır?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

16.



f(x) fonksiyonunun grafiği çizilmiştir. f(x), x = – 4, x = –2, x = 0, x = 1, x = 4 apsisli noktalarının **kaç tanesinde süreklidir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17. f(x) doğrusal bir fonksiyon olmak üzere; $f(2x+3)-f(2x)=6$ ise

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{f^{-1}(x)}$ **değeri nedir?**

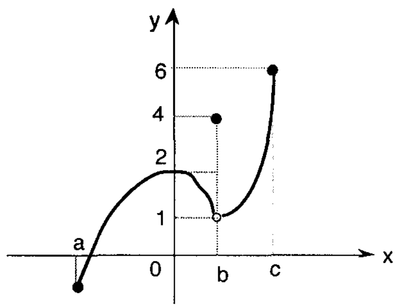
A) – 4 B) – 2 C) 0 D) 2 E) 4

18. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$ **değeri nedir?**

A) $-\sqrt{2}$ B) -1 C) 0

D) 1 E) $\sqrt{2}$

19.



Şekilde [a,c] → R ye tanımlı fonksiyonun grafiği verilmiştir. **Aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır?</u>**

A) $\lim\limits_{x\to b} f(x) = 1$

B) $f(a) < f(b)$

C) f(x) , x = 0 da süreklidir.

D) f'in en büyük değeri 6 dır.

E) f, x = b de süreklidir.

20. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1-1999^{[\![2x]\!]}}{1998\,.\,[\![-x]\!]}$ **değeri nedir?**

A) $\dfrac{1001}{1111}$ B) 1000 C) $\dfrac{1988}{1999}$

D) $\dfrac{1999}{1998}$ E) 2000

21. x >0 olmak üzere;

$\lim\limits_{a\to\infty} \left[\ln(ax^2+1) - \ln(a+2)\right] = 4$ ise

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x\,.\sqrt[3]{x\sqrt{x\,.\sqrt[3]{x\,.\sqrt{x\dots}}}}}\right)$

değeri nedir?

A) $e^{-\frac{8}{3}}$ B) $e^{-\frac{4}{5}}$ C) e

D) $e^{\frac{4}{3}}$ E) $e^{\frac{8}{5}}$

22. $\lim\limits_{x\to 1^+} \left[\operatorname{Arc\,sin}\left(\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}}{2}\right)\right]$

değeri nedir?

A) $\dfrac{\pi}{6}$ B) $\dfrac{\pi}{4}$ C) $\dfrac{\pi}{3}$ D) $\dfrac{\pi}{2}$ E) π

23. $f : [-2\pi, 2\pi] \to R$,

f(x) = sgn (sinx) **fonksiyonu kaç noktada süreksizdir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

24. **Aşağıdaki fonksiyonlardan kaç tanesi x = 0 noktasında süreksizdir?**

I. $f(x) = 2x + |x|$

II. $f(x) = \dfrac{3x}{|x|}$

III. $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$

IV. $f(x) = [\![x]\!] - \operatorname{sgn}(x+1)$

V. $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 4x)$

VI. $f(x) = \dfrac{[\![x]\!] - 1}{\cos x}$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

25. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{[\![-x]\!]^{[\![-x]\!]}}{[\![x]\!]^{[\![x]\!]}}$ **değeri nedir?**

A) $-\dfrac{1}{36}$ B) $-\dfrac{1}{48}$ C) $-\dfrac{1}{72}$

D) $\dfrac{-1}{108}$ E) $-\dfrac{1}{144}$

LİMİT VE SÜREKLİLİK

TEST 6

1. $\lim_{x\to 1} \frac{(x^2-3x+2)^4}{(2x^3+x-3)^3}$ **değeri nedir?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{\ln(x+4)}$ **ifadesi neye eşittir?**

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

3. $\lim_{x\to 2^+} \frac{x[\![x]\!] - 2\,\mathrm{Sgn}(x-2)}{x}$

aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

4. $\lim_{x\to 2^+} \frac{|4-x^2|}{x[\![x]\!]-4}$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) –2 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 2 E) 4

5. $\lim_{x\to -2} \frac{e^{2x}-1}{e^{x}+1}$ **ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) e B) 2e C) $\frac{1-e}{e}$ D) $\frac{2}{e}$ E) $\frac{1-e^2}{e^2}$

6. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right)$ **ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) –2

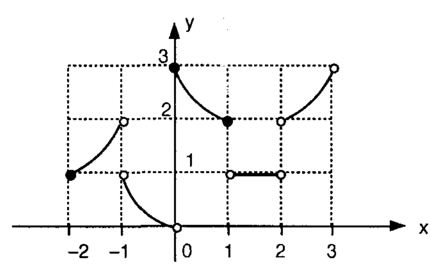
7. $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left([\![\mathrm{Sinx}]\!] + \frac{\left|x-\frac{\pi}{2}\right|}{x-\frac{\pi}{2}} \right)$

aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) –4 C) –3 D) –2 E) –1

ZAFER YAYINLARI

8.



f fonksiyonun grafiği verilmiştir. Buna göre,

$\lim_{x\to -1^+} f(x) + \lim_{x\to 2^+} f(x) + \lim_{x\to 3^-} f(x)$

aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

9. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{Cos}3x+\mathrm{Cos}x}{\mathrm{Cos}3x-\mathrm{Cos}x}$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) 2

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5^x - 5^{-x}}{5^x + 2.5^{-x}}$ **limitinin sonucu nedir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0 E) –1

11. $m > 3$ olmak üzere

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{m-x}-3}{x-3} = n$ olduğuna göre

n kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{4}$ D) $-\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{4}$

12. $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{2+\sqrt[3]{x}}{x+8}$ **ifadesi neye eşittir?**

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{10}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{18}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}$ x Cotx **limitinin sonucu nedir?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

14. $\lim\limits_{y\to x} \dfrac{\tan(2y-2x)}{8y^2-8x^2}$ **ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 2x B) $\frac{1}{8x}$ C) $\frac{1}{16x}$ D) 2 E) $\frac{1}{4x}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x-1} + ax - b\right) = -2$ ise **a.b kaçtır?**

A) –2 B) –3 C) 1 D) 0 E) 2

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{2x-1}$ **değeri nedir?**

A) e^2 B) e^3 C) e^4 D) e^{-2} E) e^5

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(2 + x.\text{Sin}\dfrac{2}{x}\right)$ **değeri neye eşittir?**

A) 2 B) –2 B) 3 D) 4 E) –3

18. $a \in R$ olmak üzere

$\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{a}{2-x} - \dfrac{12}{4-x^2}\right)$ değeri **bir gerçel sayıya eşit olduğuna göre bu gerçel sayı nedir?**

A) –1 B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $-\frac{3}{4}$

19. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\log\sqrt{x^2-2x} - \log\sqrt{x^2-3x+1}\right)$

değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

20. $f(x) = \begin{cases} a[|x|]+1 & x>1 \text{ ise} \\ b+2 & x=1 \text{ ise} \\ Sgn(x^2-1) & x<1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

f fonksiyonun x = 1 de sürekli olması için (a, b) ikilisi ne olmalıdır?

A) (–2, –3) B) (0, 1) C) (1, 2)
D) (–1, –2) E) (1, 1)

21. f : R → R ,

$f(x) = \begin{cases} -3Sinx & x \le -\frac{\pi}{2} \\ aSinx+b & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ Cosx-2b & \frac{\pi}{2} \le x \end{cases}$

veriliyor. **f fonksiyonu R de sürekli olduğuna göre a + b kaçtır?**

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) 2

22. $f(x-3) = \frac{2x-5}{x^2-3x+a}$ ve f(x) fonksiyonu $\forall x \in R$ için **sürekli ise a hangi koşulu sağlamalıdır?**

A) $a > \frac{9}{4}$ B) $a < \frac{1}{2}$ C) $a > \frac{3}{2}$
D) $a > \frac{1}{2}$ E) $a > 2$

23. $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi}\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) & x \ne 0 \text{ ise} \\ a\pi & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

biçimde tanımlı f fonksiyonunun x = 0 da sürekli olması için **a kaç olmalıdır?**

A) $2/\pi^2$ B) 2π C) $\frac{\pi}{2}$
D) $\frac{\pi}{3}$ E) $-\pi$

24. $f(x) = \begin{cases} Sgn(x^3-x) & x \le 0 \\ [|2x-1|] & 0<x<2 \\ \frac{1}{x^2-1} & x \ge 2 \end{cases}$

olmak üzere **f(x) fonksiyonu x in kaç değeri için süreksizdir?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

25. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-b}{x-2} & x \ne 2 \text{ ise} \\ ax+1 & x=2 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor. **f fonksiyonunun x = 2 de sürekli olması için $\frac{a}{2b}$ oranı ne olmalıdır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

26. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$ **limitinin eşiti nedir?**

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) $\frac{1}{2}$

27. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Cos(Sinx)-1}{Cos(Sin^2x)}$ **limiti neye eşittir?**

A) –2 B) –1 C) 1 D) 0 E) 2

TÜREV

BÖLÜM 3

TÜREV KAVRAMI

y = f(x) biçiminde tanımlanan herhangi bir fonksiyonda; x bağımsız değişken, y ise bağımlı değişken olarak adlandırılır.

Bağımsız değişkendeki artma veya azalma, bağımlı değişkeni de etkiler.

y = f(x) için, x değişkeninde Δx kadar değişme (artma veya azalma) olduğunda y bağımlı değişkenindeki değişme $\Delta y \Rightarrow \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ olur.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oranına **değişimler oranı** denir. Bu belirlemelere göre f fonksiyonunun, x deki türevini tanımlarız.

BİR FONKSİYONUN TÜREVİ

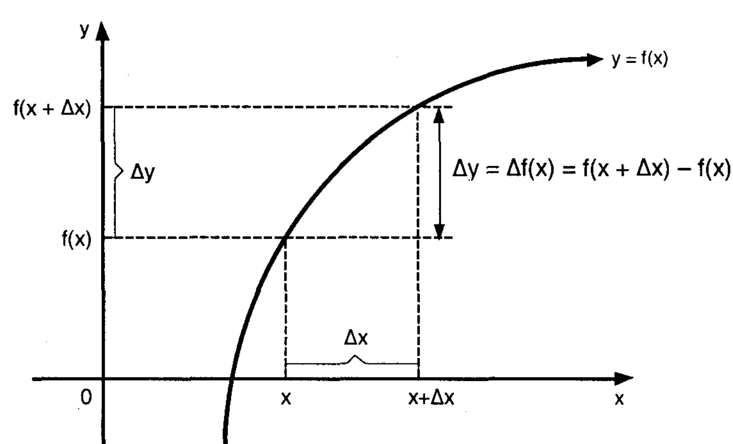
TANIM: $(a,b) \to R$, $f(x) = y$ olsun.

x teki Δx değişimine karşılık y de Δy değişimi oluyorsa;

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = A$, $A \in R$ ise, bu limite f fonksiyonunun x deki türevi denir ve $y' = y'_x, \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, \frac{d}{dx}f(x)$, $D_x f(x)$ simgelerinden biri ile gösterilir.

$\forall x \in (a,b)$ için bu limit varsa f, (a,b) de türevlenebilir veya diferansiyellenebilir denir f' anlatımına da f nin türev fonksiyonu denir.

Aşağıdaki şekilde x bağımsız değişkenindeki Δx artmasına karşılık y bağımlı değişkenininde Δy kadar artacağını görüyoruz. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) > 0$ olduğunu söyleyebiliriz.



UYARI:

1. $A \subset R$ ve $f: A \to B$, $x_0 \in A$ olmak üzere,

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A$ ise $f'(x_0) = A$ şeklinde belirtilir ve **f fonksiyonunun $x = x_0$ daki türevi A dır** denir.

2. Yukarıdaki tanımda $x = x_0 + h$ alınırsa $h = x - x_0$ olur. $x \to x_0$ için $h \to 0$ olacağından;

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = A = f'(x_0)$ dır.

3. Fonksiyonların türevlerini alırken uyarı 1 veya 2 deki tanımlara göre türev alacağız.

ÖRNEK $f(x) = 6x^2 + 7$ fonksiyonu veriliyor. **$f'(x)$ nedir?**

ÇÖZÜM

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ türev tanımına göre, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\left[6(x+h)^2+7\right]-(6x^2+7)}{h}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{6x^2+12xh+6h^2+7-6x^2-7}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6h^2+12xh}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(6h+12x)}{h}$$

$= \lim\limits_{h \to 0} (6h+12x) = 12x$ bulunur.

UYARI: $y = f(x) = 6x^2 + 7 \Rightarrow f'(x) = 12x$ olduğunu aşağıdakilerden biri ile gösteririz.

1. $y' = 12x$
2. $\dfrac{dy}{dx} = 12x$
3. $\dfrac{d\,f(x)}{dx} = 12x$
4. $\dfrac{d}{dx}(6x^2+7) = 12x$
5. $D_x\left(6x^2+7\right) = 12x$

ÖRNEK $f: R \to R$ $f(x) = 3x^2 + 2x$ fonksiyonunun **$x = 1$ deki türevi kaçtır?**

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(3x^2+2x)-(3.1^2+2.1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2+2x-5}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(3x+5)}{x-1}$$

$= \lim\limits_{x \to 1} (3x+5) \Rightarrow f'(1) = 3.1 + 5 = 8$ dir.

ÖRNEK $f: R^+ \to R^+$, $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun **$x = a$ daki türevini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} = \lim_{x \to a} \frac{x-a}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \text{ dır.}$$

ÖRNEK f: R→R $f(x) = 5x^3 + 1$ fonksiyonu için $\frac{dy}{dx} = 15x^2$ **olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tanıma göre, $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\left[5(x+h)^3+1\right]-\left(5x^3+1\right)}{h}$ ise

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{5\left[(x+h)^3 - x^3\right]}{h} \text{ olur.}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5\left\{\left[(x+h)-x\right]\left[(x+h)^2+(x+h).x+x^2\right]\right\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 5\left[(x+h)^2+(x+h).x+x^2\right] = 5(x^2+x^2+x^2) = 15x^2 \text{ dir.}$$

ÖRNEK f:R → R, $y = f(x) = \frac{3x^2}{2} + 1$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre, **f′(x) nedir?**

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left[\frac{3}{2}(x+h)^2+1\right]-\left(\frac{3}{2}x^2+1\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{2}\left[(x+h)^2-x^2\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{2}(2xh+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{2}.h(2x+h)}{h} = \frac{3}{2}.2x = 3x \text{ dir.}$$

ÖRNEK f:R→R $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun **x = a daki türevini bulunuz.**

ÇÖZÜM $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$ olur.

$\sin A - \sin B = 2.\cos\frac{A+B}{2} \cdot \sin\frac{A-B}{2}$ dir. Buna göre,

$$= \lim_{x\to a} \frac{2\cos\frac{x+a}{2} \cdot \sin\frac{x-a}{2}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\cos\frac{x+a}{2} \cdot \sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$$

$$= \lim_{x\to a} \cos\frac{x+a}{2} \cdot \underbrace{\lim_{x\to a} \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}}_{1} = \lim_{x\to a} \cos\frac{x+a}{2}(1)$$

$= \cos a$ bulunur. Buna göre, $\boxed{f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x}$ dir.

ÖRNEK f: R→R $f(x) = \cos x$ fonksiyonu veriliyor. **f′(x) nedir?**

ÇÖZÜM $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ türev tanımına göre, türev alırken;

$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2} \cdot \sin\frac{A-B}{2}$ eşitliğini kullanacağız.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\left(\frac{x+h+x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot \sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= -2\lim_{h\to 0} \sin\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}}_{\frac{1}{2}} = -2.\sin x \cdot \frac{1}{2} = -\sin x$$ olur. Buna göre, $\boxed{f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x}$ dir.

SAĞDAN TÜREV, SOLDAN TÜREV

TANIM: $A \subset R$, $f: A \to R$, $f(x) = y$ fonksiyonu verilsin. $a \in A$ olmak üzere,

1. $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ **limiti varsa, bu limite f nin x = a daki sağdan türevi denir.** **$f'(a^+)$ ile gösterilir.**
2. $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ **limiti varsa, bu limite f nin x = a daki soldan türevi denir.** **$f'(a^-)$ ile gösterilir.**
3. **$f'(a^+) = f'(a^-)$ ise, f fonksiyonu x = a da türevlidir denir.**
4. **$f'(a^+) \neq f'(a^-)$ ise veya x = a daki sağdan veya soldan türevlerden biri yok ise f nin x = a da türevi yoktur denir.**

ÖRNEK

$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ x + 2 & x \geq 2 \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.

Fonksiyonun x = 2 deki soldan ve sağdan türevlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to 2^+} x + 2 = \lim\limits_{x \to 2^-} x^2 = f(2) = 4$ olduğundan f, x= 2 de süreklidir.

Soldan türev: $f'(2^-) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 4$

Sağdan türev: $f'(2^+) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{(x+2) - (2+2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-2}{x-2} = 1$

$f'(2^-) \neq f'(2^+)$ olduğundan x = 2 de türev yoktur.

ÖRNEK

$f: R \to [0, \infty)$ $f(x) = |x-3|$ fonksiyonunun **x = 3 de türevinin olmadığını gösteriniz.**

ÇÖZÜM

$f'(3^+) = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{|x-3| - |3-3|}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{|x-3|}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x-3}{x-3} = 1$

$f'(3^-) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{|x-3| - |3-3|}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{|x-3|}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{-(x-3)}{x-3} = -1$ olur.

$f'(3^+) \neq f'(3^-)$ olduğundan x = 3 de türev yoktur.

ÖRNEK

$f: R \to R$ $f(x) = \begin{cases} ax^3 + 1 & x \geq 1 & \text{ise} \\ 2x + 3 & x < 1 & \text{ise} \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.

f nin x = 1 de türevli olması için **a** **kaç olmalıdır?**

ÇÖZÜM

$f'(1^+) = f'(1^-)$ olmalıdır.

$f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{(ax^3 + 1) - (a.1^3 + 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{a(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} a(1 + 1 + 1) = 3a$

$f(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{(2x + 3) - (2.1 + 3)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x + 3 - 5}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2(x-1)}{x - 1} = 2$

$f(1^+) = f(1^-) \Rightarrow 3a = 2 \Rightarrow a = \dfrac{2}{3}$ olmalıdır.

TÜREV VE SÜREKLİLİK

TEOREM: **$A \subset R$ olmak üzere;**

$f: A \to R$, $y = f(x)$ fonksiyonu $x_0 \in A$ için türevli ise $x = x_0$ da süreklidir.

İSPAT: Fonksiyonun sürekli olduğunu ispatlamak için, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ olduğunu göstermek yeter.

$f(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ eşitliği doğrudur.

Her iki tarafın $x \to x_0$ için limitini alalım.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) + \lim\limits_{x \to x_0} f(x_0)$ yazılır.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f'(x).0 + f(x_0) = f(x_0)$ dır.

UYARI:

1. Teoremin karşıtı doğru değildir.

   Bir fonksiyon $x = x_0$ da sürekli ise türevli olmayabilir.

2. Bir fonksiyon, süreksiz olduğu noktalarda türevsizdir.

3. Bir fonksiyonun, sürekli olduğu halde türevli olmadığı noktalar, fonksiyonun grafiğinin kırılma noktalarıdır.

ÖRNEK

$f: R \to R$ $f(x) = \begin{cases} 4x & , x < 2 \text{ ise} \\ 12 - 2x & , x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$ verılıyor.

f fonksiyonu, **$x = 2$ de sürekli olduğu halde türevli olmadığını gösteriniz.**

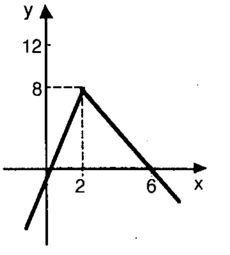
ÇÖZÜM

f fonksiyonu, $x = 2$ de sürekli ise, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$ olmalıdır.

$12 - 2 . 2 = 4 . 2 = 12 - 2 \;\; 2$

$8 = 8 = 8$ olduğundan süreklidir.

Şimdi grafiğini çizerek $x = 2$ de sürekli olduğunu görelim.



Şimdi de fonksiyonun $x = 2$ deki sağdan ve soldan türevlerini bulalım.

Soldan türev:

$$f'(2^-) = \lim_{x \to 2^-} \frac{4x - 4.2}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{4(x - 2)}{x - 2} = 4$$

Sağdan türev:

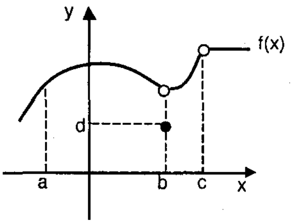
$$f'(2^+) = \lim_{x \to 2^+} \frac{(12 - 2x) - (12 - 2.2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-2(x - 2)}{x - 2} = -2$$

Görülüyor ki soldan türev, sağdan türeve eşit değildir. Bu sonuçlara göre fonksiyon $x = 2$ de sürekli olduğu halde bu noktada türevi yoktur.

$x = 2$ apsisli nokta, fonksiyonun grafiğinin kırılma noktası olduğuna dikkat ediniz.

ÖRNEK

Grafiği verilen f: R → R, f fonksiyonunun **x = a, x = b, x = c deki türevlerini inceleyiniz.**



ÇÖZÜM

f fonksiyonu:

x = a da tanımlı ve süreklidir. x = a, fonksiyonun kritik bir noktası değildir. Soldan ve sağdan türevleri aynıdır. Bu yüzden x = a da türevlidir.

x = b de tanımlıdır, (f(b) = d), fakat sürekli değildir. O halde, bu noktada türevsizdir.

x = c de tanımsızdır. Bu yüzden hem süreksiz hem de türevsizdir.

Buna göre, f fonksiyonu x = a da türevli, x = b ve x = c de türevsizdir.

ÖRNEK

$$f(x)=\begin{cases} x^2+7 & x<2 \text{ ise} \\ 6 & x=2 \text{ ise} \\ 2x+3 & x>2 \text{ ise}\end{cases}$$

biçiminde tanımlanan **f fonksiyonu x = 2 de türevli midir?**

ÇÖZÜM

Önce f nin x = 2 de sürekli olup olmadığını araştıralım.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2) \text{ midir?}$$

$2 \,.\, 2 + 3 \neq 2^2 + 7 \neq 6$ olduğundan sürekli değildir. x = 2 de türevi yoktur.

ÖRNEK

$$f{:}\,R\to R,\ f(x)=\begin{cases} 2x+b & x<1 \text{ ise} \\ ax^2+1 & x\geq 1 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonun x = 1 de türevli olması için **a + b kaç olmalıdır?**

ÇÖZÜM

x = 1 de türevli olması için fonksiyon x = 1 apsisli noktada sürekli olmalıdır.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1) \text{ olmalıdır.}$$

$a + 1 = 2 + b = a + 1 \Rightarrow a = b + 1$

Fonksiyonun x = 1 deki sağdan ve soldan türevlerini inceleyelim.

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{(ax^2+1)-(a+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax^2-a}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{a(x-1)(x+1)}{x-1}=2a$$

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{(2x+b)-(2+b)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$$

$$=f'(1^+)=f'(1^-)\Rightarrow 2a=2\Leftrightarrow a=1$$

$a = b + 1, \quad 1 = b + 1 \Rightarrow b = 0$

Buna göre; a + b = 1 + 0 = 1 bulunur.

AŞAĞIDAKİ LİMİTLERİ BULUNUZ.

SORULAR			YANITLAR
1)	$f(x)=x^3$ ise	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-8}{x-2}$	12
2)	$f(x)=x\sqrt{x}$ ise	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{3x-3a}$	$\dfrac{\sqrt{a}}{2}$
3)	$f(x)=\sqrt[3]{x}+5$ ise	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
4)	$f(x)=\sqrt{2+\sqrt{2x}}$ ise	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2}{x-2}$	$\dfrac{1}{8}$
5)	$f(x)=x^2\lvert x\rvert$ ise	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-8}{x-2}$	12
6)	$f(x)=x^3+4x^2$ ise	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{11x-11}$	1
7)	$f(x+1)=x^3+3x^2+3x$ ise	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$	48
8)	$f(x)=x^{1995}$ ise	$\dfrac{1}{1995}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{1-x}$	–1
9)	$f(x)=x^3$ ise	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$	36
10)	$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{4}x^4$ ise	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+1)-\frac{7}{12}}{2h}$	1
11)	$f(x)=2x^3+3x^2$ ise	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+1)-5}{12\cdot h}$	1
12)	$f(x-2)=x^3-6x^2+12x-8$ ise	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-8}{x-2}$	12
13)	$f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ ise	$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{f(x)-4}{x-8}$	$\dfrac{1}{3}$
14)	$f(x)=\begin{cases}3x^2+1 & ; & x\ge 1\\ 2x-3 & ; & x<1\end{cases}$ ise	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-13}{x-2}$	12
15)	$f(x)=\begin{cases}2x^3-x+1 & ; & x\ge 2\\ 3x^2-1 & ; & x<2\end{cases}$ ise	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}$	6
16)	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x}-4x+1 & ; & x>9\\ x^2+1 & ; & x\le 9\end{cases}$ ise	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-5}{x-2}$	4
17)	$f(x)=x^{325}$ ise	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{650x-650}$	$\dfrac{1}{2}$
18)	$f(x)=x^3\lvert x\rvert$ ise	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{4x-4}$	1
19)	$f(x)=2x^3-3x^2+x+1$ ise	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-7}{13x-26}$	1
20)	$f(x)=\sqrt[4]{x}+2$ ise	$\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{f(x)-4}{x-16}$	$\dfrac{1}{32}$

TEMEL TÜREV KURALLARI

SABİT FONKSİYONUN TÜREVİ

TEOREM: $f : R \to R$, $f(x) = a$ ise $f'(x) = 0$ dır.

İSPAT: $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a-a}{h} = 0$$

ÖRNEK

FONKSİYON	TÜREVİ
$y = 5$	$y' = 0$
$y = \sqrt{7}$	$y' = 0$
$y = \frac{\sqrt{3}}{4}$	$y' = 0$

KUVVET FONKSİYONUNUN TÜREVİ

TEOREM: $f: R \to R$, $f(x) = x^n$ $n \in Z^+$ ise $f'(x) = n.x^{n-1}$ dir.

İSPAT: $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)-x]\left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}\right]}{\cancel{h}}$$

$$= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1}}_{n \text{ tane terim}} = n \cdot x^{n-1}$$

böylece $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n.x^{n-1}$ olduğu görülür.

UYARI: $n \neq 0$ olmak üzere, $y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}$ dir.

ÖRNEK

FONKSİYON	TÜREVİ
$y = x^5$	$y' = 5x^4$
$y = x^{-12}$	$y' = -12x^{-13}$
$y = x^{\frac{2}{3}}$	$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$
$y = x^{-\frac{1}{3}}$	$y' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$

İKİ FONKSİYONUN TOPLAMININ TÜREVİ

TEOREM: **f: R→ R, g: R→ R, $x \in R$ için türevlenen iki fonksiyon ve**

$T(x) = f(x) \pm g(x) \Rightarrow T'(x) = f'(x) \pm g'(x)$ tir.

İSPAT:

$$T'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{T(x+h) - T(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h)+g(x+h)] - [f(x)+g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)$$

$$= \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{f'(x)} + \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{g'(x)} \text{ elde edilir.}$$

Böylece, $T'(x) = f'(x) + g'(x)$ olduğu görülür.

ÖRNEK

FONKSİYON	TÜREVİ
$y = x^5 + x^2$	$y' = 5x^4 + 2x$
$y = x^2 + x$	$y' = 2x + 1$
$y = x^{10} - x^{12}$	$y' = 10x^9 - 12x^{11}$

UYARI: $T(x) = f(x) \pm g(x) \pm h(x) \pm \ldots \pm k(x) \Rightarrow T'(x) = f'(x) \pm g'(x) \pm h'(x) \pm \ldots \pm k'(x)$ dir.

BİR SAYI İLE BİR FONKSİYONUN ÇARPIMININ TÜREVİ

TEOREM: **f: R → R türevlenebilen bir fonksiyon $a \in R$ ise $y = a.f(x) \Rightarrow y' = a.f'(x)$**

İSPAT:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{a.f(x+h) - a.f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a[f(x+h) - f(x)]}{h}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} a. \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{f'(x)} = a.f'(x) \text{ olur.}$$

ÖRNEK

FONKSİYON	TÜREVİ
$y = ax^n,\ n \neq 0$	$y' = anx^{n-1}$
$y = 5x^2$	$y' = 10x$
$y = 3x^2 + 5x^3$	$y' = 6x + 15x^2$

UYARI: $a, b \in R$ $y = af(x) + bg(x) \Rightarrow y' = af'(x) + bg'(x)$

ÖRNEK $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x + 1$ fonksiyonunun **$x = 2$ deki türevi kaçtır?**

ÇÖZÜM $f'(x) = x^2 + x - 12$

$f'(2) = 2^2 + 2 - 12 \Rightarrow f'(2) = -6$ dır.

İKİ FONKSİYONUN ÇARPIMININ TÜREVİ

TEOREM: x için türevlenebilen y = f(x), y = g(x) fonksiyonları verilsin.

Ç(x) = f(x).g(x) ⇒ Ç′(x) = f′(x).g(x) + g′(x).f(x) dir.

İSPAT: $$Ç(x) = \lim_{h\to 0}\frac{Ç(x+h)-Ç(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+n)-f(x).g(x)}{h}$$

f(x + h) . g(x + h) – f(x) . g(x) ifadesinden g(x + h).f(x) ifadesini önce çıkaralım, sonra ekleyelim. Bu durumda;

$$Ç(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot f(x) \text{ elde edilir.}$$

Çarpımının limiti limitlerin çarpımına eşit olduğundan;

$$Ç(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} g(x+h)+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} f(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x), \qquad \lim_{h\to 0} g(x+h)=g(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x), \qquad \lim_{h\to 0} f(x)=f(x) \text{ dir.}$$

Buna göre;

Ç′(x) = f′(x) . g(x) + g′(x) . f(x) dir.

ÖRNEK

FONKSİYON	TÜREVİ
$y = (x^3 + 7x)(x^2 + 1)$	$y' = (3x^2 + 7)(x^2 + 1) + 2x(x^3 + 7x)$
$y = 5x^4(x^{12} + 2x)$	$y' = 20x^3(x^{12} + 2x) + (12x^{11} + 2).5x^4$
$y = (x^3 + 5x^2)(10x + 7)$	$y' = (3x^2 + 10x)(10x + 7) + 10(x^3 + 5x^2)$

BÖLÜMÜN TÜREVİ

TEOREM: f : A → R, g: A→R türevlenebilen iki fonksiyon ve g(x) ≠ 0

$$\mathbf{B(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow B'(x)=\frac{f'(x).g(x)-g'(x).f(x)}{g^2(x)}} \textbf{ dir.}$$

İSPAT: $$B'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{B(x+h)-B(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x)-g(x+h).f(x)}{h.g(x+h).g(x)}$$ paydan f(x).g(x) ifadesini önce çıkaralım sonra ekleyelim.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x)-f(x).g(x)+f(x).g(x)-g(x+h).f(x)}{h.g(x+h).g(x)}$$

İlk iki terimi g(x) son iki terimi –f(x) parantezine alırsak;

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)-f(x)].g(x)-[g(x+h)-g(x)].f(x)}{h.g(x+h).g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)-f(x)].g(x)}{h.g(x+h).g(x)} - \lim_{h\to 0} \frac{[g(x+h)-g(x)].f(x)}{h.g(x+h).g(x)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$$

$\lim\limits_{h\to 0} g(x) = g(x) \quad \lim\limits_{h\to 0} f(x) = f(x) \quad \lim\limits_{h\to 0} g(x+h).g(x) = g^2(x)$ dir.

bu ifadeler yerine yazıldığında,

$B'(x) = \dfrac{f'(x).g(x)-g'(x).f(x)}{g^2(x)}$ elde edilir.

ÖRNEK

FONKSİYON	**TÜREVİ**
$y = \dfrac{x^3}{x-1}$	$y' = \dfrac{3x^2(x-1)-1(x^3)}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}$
$y = \dfrac{1}{x^2+x-2}$	$y' = \dfrac{0.(x^2+x-2)-(2x+1)(1)}{(x^2+x-2)^2} = \dfrac{-2x-1}{(x^2+x-2)^2}$
$y = \dfrac{2x+7}{5x-8}$	$y' = \dfrac{2(5x-8)-5(2x+7)}{(5x-8)^2} = \dfrac{-51}{(5x-8)^2}$

UYARI: $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

ÖRNEK

$y = f(x) = \dfrac{2x+1}{5x-4}$ fonksiyonunun **x = 1 deki türevi kaçtır?**

ÇÖZÜM

$f'(x) = \dfrac{2.(-4)-5.1}{(5x-4)^2} = \dfrac{-13}{(5x-4)^2}$ (uyarıya göre türev aldık)

$f'(1) = \dfrac{-13}{(5.1-4)^2} = -13$ bulunur.

UYARI: $a \in R$ olmak üzere; $f(x) = \dfrac{a}{x^n} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = y' = \dfrac{-a.n}{x^{n+1}}$ dir.

ÖRNEK $y=\dfrac{\sqrt{2}}{x^4}$ ise **y′ nedir?**

ÇÖZÜM $y'=\dfrac{-4\sqrt{2}}{x^{4+1}}=y'=\dfrac{-4\sqrt{2}}{x^5}$ dür.

ÖRNEK $|X|<1$ için

$f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}\cdots$ ise $\mathbf{f'\left(\frac{1}{3}\right)}$ **kaçtır?**

ÇÖZÜM $1+x+x^2+\cdots x^{n-1}=\sum\limits_{k=1}^{n}x^{k-1}=\dfrac{1-x^n}{1-x}$ dir.

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^n}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}$ olur. $\left(|x|<1 \text{ olduğundan}\right)$

$f(x)=\dfrac{1}{1-x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{1}{\dfrac{4}{9}}=\dfrac{9}{4}$ olur.

ÖRNEK $|2x|<1$ için

$f(x)=2x+4x^2+8x^3+\cdots$ ise $\mathbf{f'\left(\frac{1}{4}\right)}$ **kaçtır?**

ÇÖZÜM $f(x)=2x\left(1+2x+(2x)^2+(2x)^3+\cdots\right)$

$f(x)=2x\cdot\dfrac{1}{1-2x}=\dfrac{2x}{1-2x}$ olur.

$f'(x)=\dfrac{2\cdot(1-2x)+2\cdot 2x}{(1-2x)^2}=\dfrac{2}{(1-2x)^2}$

$f'\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{2}{\left(1-2\cdot\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{2}{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{4}}\Rightarrow f'\left(\dfrac{1}{4}\right)=8$ bulunur.

UYARI: $|r|<1$ ise $\sum\limits_{k=0}^{\infty}r^k=\dfrac{1}{1-r}$ dir.

ÖRNEK $|x|<1$ ve $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\dfrac{1}{1-x}$ ise

$1+2\left(\dfrac{3}{5}\right)+3\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\cdots+n\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}+\cdots$ **toplamı kaçtır?**

ÇÖZÜM $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\dfrac{1}{1-x}$ eşitliğin her iki yanının x e göre türevini alalım.

$0+1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ olur.

$1+2\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)+3\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\cdots+n\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}+\cdots=\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{5}\right)^2}=\dfrac{25}{4}$ bulunur.

AŞAĞIDAKİ CEBİRSEL FONKSİYONLARIN TÜREVİNİ BULUNUZ.

	SORULAR	YANITLAR
1)	$y = 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2x + 4$	$y' = 12x^3 - 15x^2 + 12x - 2$
2)	$y = 3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$	$y' = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$
3)	$y = (x-1)(x+1)^2(x-2)^3$	$y' = (x+1)(x-2)^2 . (6x^2 - 7x - 1)$
4)	$y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$	$y' = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}}$
5)	$y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^4}$	$y' = -\frac{(x+1)^2(x+7)}{(x-1)^5}$
6)	$y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^5$	$y' = \frac{5x^4}{(1+x)^6}$
7)	$y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$	$y' = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$
8)	$y = \left(\frac{x^3-1}{2x^3+1}\right)^4$	$y' = \frac{36x^2(x^3-1)^3}{(2x^3+1)^5}$
9)	$y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$	$y' = \frac{-x^2-x+1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$
10)	$y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$	$y' = \frac{1}{4\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$
11)	$y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$y' = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$
12)	$y = (x-1)\sqrt{x^2-2x+2}$	$y' = \frac{2x^2-4x+3}{\sqrt{x^2-2x+2}}$
13)	$y = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$	$y' = -\frac{x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{2}{3}}}{x^2}$
14)	$y = \frac{3x^2-1}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}$	$y' = \frac{2x(x-3)}{\sqrt[3]{(x^3-5)^5}}$
15)	$y = x^2\sqrt{1+x^2}$	$y' = \frac{3x^3+2x}{\sqrt{1+x^2}}$
16)	$y' = \frac{-2}{x} + x$	$y' = \frac{2}{x^2} + 1$
17)	$y = \left(x^3 - \frac{1}{x} + 2\right)^2$	$y' = 2\left(x^3 - \frac{1}{x} + 2\right) \cdot \left(3x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$

PARÇALI TANIMLI FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & , \quad x<a \quad \text{ise} \\ h(x) & , \quad a\le x<b \quad \text{ise} \\ k(x) & , \quad x\ge b \quad \text{ise} \end{cases}$$

veya benzeri biçimde tanımlanan fonksiyonlara **parçalı tanımlı fonksiyonlar** denir.

f fonksiyonu için $x = a$, $x = b$ kritik noktalardır.

UYARI: $$f(x)=\begin{cases} g(x) & , \quad x<a \quad \text{ise} \\ h(x) & , \quad a\le x<b \quad \text{ise} \\ k(x) & , \quad x\ge b \quad \text{ise} \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} g'(x) & , \quad x<a \quad \text{ise} \\ h'(x) & , \quad a\le x<b \quad \text{ise} \\ k'(x) & , \quad x\ge b \quad \text{ise} \end{cases} \text{ dir.}$$

$x = a$, $x = b$ gibi kritik noktalarda türev alırken önce bu noktalarda fonksiyonunun sürekli olup olmadığına bakılır. Fonksiyon sürekli, sağdan ve soldan türevleri eşit ise türev vardır. Bunun dışındaki durumlarda türev yoktur.

ÖRNEK

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x & , \quad x<1 \quad \text{ise} \\ 3x^2 & , \quad x\ge 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan f için **x = 1 de türevini varsa bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & , \quad x<1 \quad \text{ise} \\ 6x & , \quad x\ge 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

$x = 1$ apsisli nokta fonksiyonun kritik noktası olduğundan fonksiyon öncelikle sürekli olmalıdır.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$ olmalıdır.

$1^2 + 2.1 = 3.1^2 = 3.1^2 = 3$ olduğundan $x = 1$ de f süreklidir.

$f'(1^+) = f'(1^-)$ olmalı

$2 . 1 + 2 = 6.1$

$4 \neq 6$ olduğundan $x = 1$ de fonksiyonun türevi yoktur.

MUTLAK DEĞER FONKSİYONUNUN TÜREVİ

KURAL: $$f(x)=|g(x)| \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} g'(x) & ; \quad g(x)>0 \quad \text{ise} \\ -g'(x) & ; \quad g(x)<0 \quad \text{ise} \end{cases}$$

$g(x) = 0$ denkleminin kökleri için türev alırken soldan ve sağdan türevlerine bakılır.

$x = a$, $g(x) = 0$ denkleminin bir kökü ise

$f'(a^+) = f'(a^-)$ iken $x = a$ da türev vardır.

$f'(a^+) \neq f'(a^-)$ iken $x = a$ da türev yoktur.

ÖRNEK

f: R →R, $f(x)=\left|x^3-2x^2+x\right|$ fonksiyonunun **x = 1 ve x = 0 daki türevlerini bulunuz.**

ÇÖZÜM

x = 1 için türevini araştıralım.

$g(x) = x^3 - 2x^2 + x$ olsun. $g(x) = x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2$ dır.

g(1) = 0 dır. x = 1, g(x) = 0 denkleminin 2 katlı bir köküdür. Fonksiyonun bu noktada işaret değiştirmediğini bir de işaret tablosunu yaparak görelim.

x	$-\infty$	0		1	
g(x)	−	0	+	0	+

Sağdan türev;

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\left|x^3-2x^2+x\right|-\left|1-2+1\right|}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\left|x(x-1)^2\right|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x(x-1)^2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}x(x-1)=0 \text{ olur.}$$

Soldan türev;

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\left|x(x-1)^2\right|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x(x-1)^2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}x(x-1)=0$$

$$f'(1^-)=f'(1^+)=0 \text{ dır.}$$

f fonksiyonunun x = 1 için türevi vardır. f′(1) = 0 dır.

x = 0, g(x) = 0 denkleminin bir köküdür. 0 ın herhangi bir ($\varepsilon>0$) komşuluğunda fonksiyon işaret değiştirmektedir. Sağdan ve soldan türevlerini alalım.

Sağdan türev; $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left|x(x-1)^2\right|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(x-1)^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)^2=1$dir.

Soldan türev; $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\left|x(x-1)^2\right|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x(x-1)^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-(x-1)^2\right)=-1$dir.

Soldan türev, sağdan türevden farklıdır. Türev yoktur.

ÖRNEK

f: R → R, $f(x)=x.\left|x^2\right|+5x$ fonksiyonu veriliyor, **f′(0) kaçtır?**

ÇÖZÜM

$g(x) = x^2$ olsun. x = 0 için g(x) = 0 ve x ≠ 0 için g(x) > 0 dır. 0, g(x) in iki katlı bir kökü olduğundan işaret değiştirmez.

f(x) i parçalı tanımlarsak;

$$f(x)=\begin{cases}x.x^2+5x=x^3+5x & ; \ x\neq 0 \text{ ise}\\ 0 & ; \ x=0 \text{ ise olur.}\end{cases}$$

Buna göre türev alırsak;

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+5 & ; \ x\neq 0 \text{ ise}\\ 0 & ; \ x=0 \text{ ise}\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}f'(0^-)=3.0^2+5=5\\ f'(0^+)=3.0^2+5=5\end{aligned}\right\}\Rightarrow f'(0)=5 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK f: R →R, $f(x)=\left|x^3-2x^2+x\right|$ fonksiyonunun **x = 1 ve x = 0 daki türevlerini bulunuz.**

ÇÖZÜM x = 1 için türevini araştıralım.

$g(x) = x^3 - 2x^2 + x$ olsun. $g(x) = x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2$ dır.

$g(1) = 0$ dır. x = 1, g(x) = 0 denkleminin 2 katlı bir köküdür. Fonksiyonun bu noktada işaret değiştirmediğini bir de işaret tablosunu yaparak görelim.

x	$-\infty$	0		1	
g(x)	−	0	+	0	+

Sağdan türev;

$$f'(1^+)=\lim_{x\to1^+}\frac{\left|x^3-2x^2+x\right|-\left|1-2+1\right|}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\left|x(x-1)^2\right|}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x(x-1)^2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}x(x-1)=0 \text{ olur.}$$

Soldan türev;

$$f'(1^-)=\lim_{x\to1^-}\frac{\left|x(x-1)^2\right|}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x(x-1)^2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}x(x-1)=0$$

$f'(1^-)=f'(1^+)=0$ dır.

f fonksiyonunun x = 1 için türevi vardır. f′(1) = 0 dır.

x = 0, g(x) = 0 denkleminin bir köküdür. 0 ın herhangi bir (ε>0) komşuluğunda fonksiyon işaret değiştirmektedir. Sağdan ve soldan türevlerini alalım.

Sağdan türev; $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left|x(x-1)^2\right|}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x(x-1)^2}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}(x-1)^2=1$dir.

Soldan türev; $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\left|x(x-1)^2\right|}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x(x-1)^2}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\left(-(x-1)^2\right)=-1$dir.

Soldan türev, sağdan türevden farklıdır. Türev yoktur.

ÖRNEK f: R → R, $f(x)=x.\left|x^2\right|+5x$ fonksiyonu veriliyor, **f′(0) kaçtır?**

ÇÖZÜM $g(x) = x^2$ olsun. x = 0 için g(x) = 0 ve x ≠ 0 için g(x) > 0 dır. 0, g(x) in iki katlı bir kökü olduğundan işaret değiştirmez.

f(x) i parçalı tanımlarsak;

$$f(x)=\begin{cases}x.x^2+5x=x^3+5x & ;\ x\neq0 \text{ ise}\\ 0 & ;\ x=0 \text{ ise olur.}\end{cases}$$

Buna göre türev alırsak;

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+5 & ;\ x\neq0 \text{ ise}\\ 0 & ;\ x=0 \text{ ise}\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}f'(0^-)=3.0^2+5=5\\ f'(0^+)=3.0^2+5=5\end{aligned}\right\}\Rightarrow f'(0)=5 \text{ bulunur.}$$

SİGNUM(İŞARET) FONKSİYONUNUN TÜREVİ

$$f(x)=\text{Sgn}[g(x)]=\begin{cases}1 & ; \quad g(x)>0 \quad \text{ise}\\ 0 & ; \quad g(x)=0 \quad \text{ise}\\ -1 & ; \quad g(x)<0 \quad \text{ise}\end{cases}$$

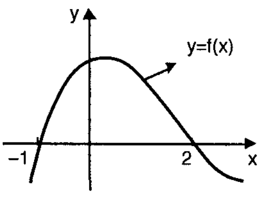
biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun parçalı tanımlı oluşundan dolayı türevi alınırken verilen noktanın kritik nokta olup olmadığına bakılır. g(x) = 0 denkleminin kökleri kritik noktalarıdır. Bu noktalarda fonksiyon genellikle süreksizdir ve türev yoktur.

$g(x) \neq 0$ iken $f(x) = \mp 1$ dir. O halde $f'(x) = 0$ olur.

UYARI: $f(x)=\text{Sgn}(g(x)) \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}0 & ; \quad g(x)\neq 0 \quad \text{ise}\\ \text{yok} & ; \quad g(x)=0 \quad \text{ise}\end{cases}$

ÖRNEK

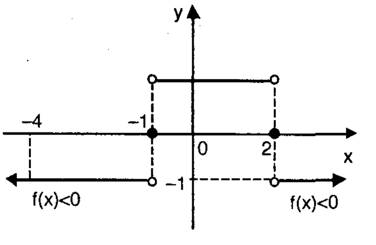
Grafiği verilen $R \to R$, f fonksiyonu için $y = \text{Sgn}(f(x))$ grafiğini çizerek fonksiyonun $x=-4$, $x=-1$, $x=0$, $x=2$ apsisli noktalarında varsa türevlerini bulunuz.



ÇÖZÜM

Grafikte, $y = \text{Sgn}(f(x))$ fonksiyonunun $x=-1$ ve $x=2$ de süreksiz olduğu görülüyor. Bu iki noktada fonksiyonun türevi yoktur.

Yine grafikte $\left.\begin{matrix} x=-4 & \text{için} & y=-1\\ x=0 & \text{için} & y=1\end{matrix}\right\}$ olduğu görülmektedir.



Fonksiyonun bu noktalarda türevi vardır ve sıfırdır.

ÖRNEK

$f(x) = x^2.\text{Sgn}(x-3)$ fonksiyonunun türevli olduğu aralığı bulunuz.

ÇÖZÜM

Fonksiyonu parçalı tanımlayalım.

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & , \quad x<3 \quad \text{ise}\\ 0 & , \quad x=3 \quad \text{ise}\\ x^2 & , \quad x>3 \quad \text{ise}\end{cases}$$

olur. f fonksiyonu x = 3 de sürekli olmadığından bu noktada türevi yoktur.

Buna göre, $f'(x)=\begin{cases}-2x & , \quad x<3 \quad \text{ise}\\ 2x & , \quad x>3 \quad \text{ise}\end{cases}$ olur.

Türevsiz olduğu tek nokta x = 3 tür. Sonuç olarak fonksiyon R–{3} te türevlidir.

ÖRNEK $f(x) = x^3$ Sgn(x + 2) fonksiyonunun **x = –1 için türevi kaçtır?**

ÇÖZÜM Fonksiyon x = –2 dışındaki tüm noktalarda sürekli ve türevlidir. x = –1 de türevlidir.

$$f(x) = x^3.\text{Sgn}(x+2) \Rightarrow f'(x) = (x^3)'.\text{Sgn}(x+2) + \underbrace{(\text{Sgn}(x+2))'}_{0}.x^3$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2.\text{Sgn}(x+2) + 0$$

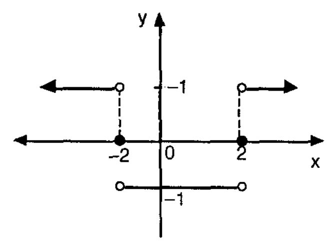
$$\Rightarrow f'(-1) = 3.(-1)^2.\text{Sgn}(-1+2)$$

$$\Rightarrow f'(-1) = 3 \quad \text{tür.}$$

ÖRNEK $y = f(x) = \text{Sgn}(x^2 - 4)$ fonksiyonu veriliyor. **Fonksiyonun x = –1, x = 2, x = 3 deki türevlerini (varsa) bulunuz.**

ÇÖZÜM Fonksiyonun grafiği yanda çizilmiştir. Bu grafikten x = –2, x = 2 de fonksiyonun süreksiz olduğu görülmektedir. Bu nedenle x = –1, x = 3 de fonksiyon süreklidir.

f'(–1) = 0 ve f'(3) = 0 dır. f'(2) yoktur. Çünkü x = 2 de fonksiyon süreksizdir.



ÖRNEK f: R→{–1, 0, 1}, $f(x) = \text{Sgn}\left[x^2.(x-1)\right]$ fonksiyonun **türevsiz olduğu noktaların apsislerinin toplamı kaçtır?**

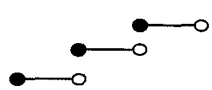
ÇÖZÜM
$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{array}\right\} \text{fonksiyonun süreksiz aynı zamanda türevsiz olduğu değerlerdir.}$$

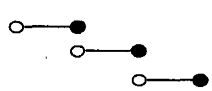
Türevsiz olduğu noktaların apsisleri toplamı 0 + 1 = 1 dir.

TAM DEĞER FONKSİYONUNUN TÜREVİ

Önce tam değer fonksiyonunun grafiğinin genel özelliğini hatırlayalım.

y = ⟦g(x)⟧ in grafiği g(x) in artan ya da azalan olmasına göre değişir.

g(x) artan fonksiyon } ⇒ grafik  şeklinde,

g(x) azalan fonksiyon } ⇒ grafik  şeklindedir.

Görülüyor ki fonksiyon tanımlı olduğu kümede süreksiz olabiliyor. Süreksiz olduğu bu noktalar fonksiyonun türevsiz olduğu noktalardır.

y = ⟦g(x)⟧ için bu noktalarda g(x) ∈ Z dir.

UYARI: g(x), R de türevli bir fonksiyon olmak üzere,

$$f(x) = [\![g(x)]\!] \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \text{yok} & , \ g(x) \in Z \ \text{ise} \\ 0 & , \ g(x) \notin Z \ \text{ise} \end{cases}$$

Bazı durumlarda g(x) ∈ Z için fonksiyon süreklidir. Bu durumda türev vardır ve sıfırdır.

ÖRNEK

$f:[2,4) \to R$, $f(x) = [\![2x-2]\!]$ fonksiyonunun **türevsiz olduğu noktaların apsislerinin toplamı kaçtır?**

ÇÖZÜM

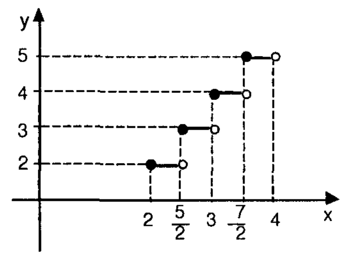
$[2,4)$ aralığında önce fonksiyonun grafiğini çizelim.

$x \in \left[2, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow y = 2$

$x \in \left[\frac{5}{2}, 3\right) \Rightarrow y = 3$

$x \in \left[3, \frac{7}{2}\right) \Rightarrow y = 4$

$x \in \left[\frac{7}{2}, 4\right) \Rightarrow y = 5$



grafikten görüldüğü gibi

$x = 2,\ x = \frac{5}{2},\ x = 3,\ x = \frac{7}{2}$ apsisli noktalarda fonksiyon süreksiz ve dolayısı ile türevsizdir.

Apsisler toplamı $= 2 + \frac{5}{2} + 3 + \frac{7}{2} = 11$

ÖRNEK

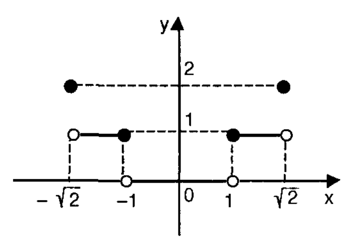
$f\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \to R$, $f(x) = [\![x^2]\!]$fonksiyonunun **türevsiz olduğu kaç nokta vardır?**

ÇÖZÜM

Grafiği yorumlarsak,

$-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}$ apsisli noktalarda fonksiyon süreksiz ve türevsizdir.

$f(x) = [\![x^2]\!]$ için $f(0) = 0$ dır. $0 \in Z$ olduğu halde $x = 0$ da süreklidir, türevlidir ve $f'(0) = 0$ dır.



UYARI:

1. Bazı kaynaklarda bulunan $y = [\![f(x)]\!]$ için $f(a) \in Z$ ise **f fonksiyonu x = a da türevsizdir** yargısının her zaman doğru olmadığını yukarıdaki örnek bize açıkça göstermektedir.

   Okuyucuya önerimiz; **bir noktada fonksiyonun süreksizliğini görmeden o noktada türevsizdir** yargısına varmamasıdır.

2. $f(x) = ax + b$ gibi bir doğrusal fonksiyon olmak üzere;

   $y = [\![f(x)]\!]$ için $f(a) \in Z \Rightarrow f'(a)$ yoktur.

   $f(a) \notin Z \Rightarrow f'(a) = 0$ dır.

ÖRNEK $f: R \to R$, $f(x) = 5x^3[\![x]\!]$ fonksiyonu veriliyor. $f'\left(-\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{5}{3}\right)$ **toplamı kaçtır?**

ÇÖZÜM $-\frac{1}{2}$ ve $\frac{5}{3}$ tam değerin içini tamsayı yapmadığından fonksiyonun bu noktada türevleri vardır.

$f'(x) = 15x^2 . [\![x]\!] + [\![x]\!]' . 5x^3$ olur. $\left([\![x]\!]'=0 \text{ olduğundan}\right)$

$f'(x) = 15x^2 . [\![x]\!]$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{4}\cdot(-1) \quad \text{ve} \quad f'\left(\frac{5}{3}\right)=15.\left(\frac{5}{3}\right)^2\cdot 1=\frac{125}{3}$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{4}$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{5}{3}\right)=-\frac{15}{4}+\frac{125}{3}=\frac{455}{12} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $f(x) = [\![\frac{2x+1}{19}]\!]$ fonksiyonunun $x = 9$ **daki türevini (varsa) bulunuz.**

ÇÖZÜM $\frac{2x+1}{19}$ kesri $x=9$ için $\frac{19}{19}=1 \in Z$ olduğundan fonksiyon bu noktada süreksiz ve türevsizdir.

ÖRNEK $f:[0,10] \to R$, $f(x) = x^2 + [\![\frac{x}{5}]\!] + Sgn(x^2 - 4)$ fonksiyonunun türevsiz olduğu **kaç tane nokta vardır?**

ÇÖZÜM $[\![\frac{x}{5}]\!]$ ifadesi $x = 0$, $x = 5$, $x = 10$ için süreksiz ve türevsizdir.

$Sgn(x^2-4)$ ifadesi $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$, $x = -2$ de süreksiz ve türevsizdir. $x = -2$ tanım aralığında olmadığından f fonksiyonunun türevsiz olduğu nokta sayısı 4 tür.

ÖRNEK $f: R \to R$ $f(x)=|x^2-1|+[\![x]\!]x - Sgn(5x + 1)$ fonksiyonu veriliyor. $f'\left(\frac{5}{2}\right)$ **kaçtır?**

ÇÖZÜM $x=\frac{5}{2}$ $f(x)$ in bir kritik noktası değildir.

$x^2 - 1 = g(x)$ alınırsa; $g\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{25}{4}-1=\frac{21}{4}>0$, $[\![\frac{5}{2}]\!]=2$, $sgn\left(5\cdot\frac{5}{2}+1\right)=1$ olur.

Buna göre, $f(x) = x^2 - 1 + 2x - 1 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x - 2 \Rightarrow f'(x) = 2x + 2$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{5}{2}\right)=7 \text{ olur.}$$

ÖRNEK $f:R-\{2\} \to R, f(x)=\frac{x+1}{x-2}+|x^3-16x^2|+Sgn(x+3)$ fonksiyonu veriliyor. **f(x) in türevinin olmadığı noktaların apsislerinin toplamı kaçtır?**

ÇÖZÜM f, $x = 2$ de tanımsızdır ve türevsizdir.

$x^3 - 16x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x - 16) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 16$ dır.

$x = 0$ da, $(x^3 - 16x^2)$ işaret değiştirmediğinden f', $x = 0$ da türevli

$x^3 - 16x^2$, $x = 16$ da işaret değiştirdiğinden, sağdan ve soldan türevler farklıdır ve bu noktada türev yoktur.

$Sgn(x + 3)$, $x = -3$ te süreksiz ve türevsizdir.

Türevsiz olduğu noktaların apsisleri toplamı: $2 + 16 + (-3) = 15$ dir.

BİLEŞKE FONKSİYONUN TÜREVİ (TÜREVDE ZİNCİR KURALI)

TEOREM: **$A \subset R$ ve $B \subset R$ olmak üzere; $f: A \to B$, $g: B \to R$ fonksiyonları verilsin. f fonksiyonu $a \in A$ da, g fonksiyonu $f(a) \in B$ de türevlenebiliyor ise gof fonksiyonu da $x = a$ da türevlenebilir ve**

$$\boxed{(gof)'(a) = f'(a).g'(f(a))}$$ **dır.**

İSPAT: Türev tanımını kullanarak,

$$(gof)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(gof)(x) - (gof)(a)}{x - a} \text{ yazılır.}$$

Limiti alınacak ifadeyi $(f(x) - f(a))$ ile çarpıp bölersek;

$$= \lim_{x\to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ yazılabilir.}$$

f fonksiyonu $x = a$ da türevli olduğundan süreklidir.

Bu nedenle, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ dır.

$\lim\limits_{f(x)\to f(a)} \dfrac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} = g'(f(a))$ ve $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ bu değerler yerine yazılarak,

$(gof)'(a) = g'(f(a)).f'(a)$ olduğu görülür.

ÖRNEK

$f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = 4x^2 + 1$ ise

a) $(fog)'(x)$ nedir? **b)** $(fog)'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ nedir?

ÇÖZÜM

a) $(fog)'(x) = g'(x).f'(g(x))$ bileşke fonksiyonunun türevi kuralından

$= g'(x) \,.\, f'(4x^2 + 1)$, $f(x) = x^3 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

$= 8x.3(4x^2 + 1)^2$

$= 24x(4x^2 + 1)^2$

b) $(fog)'\left(\dfrac{1}{2}\right) = g'\left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot f'\left(g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$

$= 4.f'(2) = 4.12 = 48$ olur.

$g(x) = 4x^2 + 1 \begin{cases} g(\frac{1}{2}) = 2 \\ g'(\frac{1}{2}) = 8.\frac{1}{2} = 4 \end{cases}$

ÖRNEK $f(2x-1)=\frac{1}{3}x^3+x^2+10$ ise **f′(3) nedir?**

ÇÖZÜM Eşitliğin her iki tarafının türevini alalım.

$(2x-1)'\,f'(2x-1)=x^2+2x$

$2f'(2x-1)=x^2+2x$ olur. $2x-1=3 \Rightarrow x=2$, değerini x yerine yazarsak,

$2f'(3)=4+4 \Rightarrow 2f'(3)=8 \Rightarrow f'(3)=4$ bulunur.

ÖRNEK $f(2x+1)\,.\,g(x^2+1)=3x$, $g(2)=3$ ve $f'(3)=2$ ise **g′(2) kaçtır?**

ÇÖZÜM $f(2x+1)\,.\,g(x^2+1)=3x$ eşitliğinde $x=1$ alınırsa,

$f(3)\,.\,g(2)=3$

$f(3)\,.\,3=3 \Rightarrow f(3)=1$ olur.

Verilen eşitliğin her iki yanının x e göre türevi alınırsa,

$2.f'(2x+1)\,.\,g(x^2+1)+2x\,.\,g'(x^2+1)\,.\,f(2x+1)=3$ olur.

$x=1$ için $2.f'(3)\,.\,g(2)+2.g'(2)\,.\,f(3)=3$ verilenler yerine yazılırsa

$2\,.\,2\,.\,3+2\,.\,g'(2)\,.\,1=3$

$12+2\,.\,g'(2)=3$

$2\,.\,g'(2)=-9 \Rightarrow g'(2)=-\frac{9}{2}$ olur.

ÖRNEK $f(x^2)=4.g(5-4x)$ ve $g'(3)=\frac{1}{8}$ ise $f'\left(\frac{1}{4}\right)$ **kaçtır?**

ÇÖZÜM Her iki tarafın türevini, bileşke fonksiyonun türevine göre alalım.

$(x^2)'\,f'(x^2)=4\,.\,(5-4x)'\,g'(5-4x) \Rightarrow 2x.f'(x^2)=-16.g'(5-4x)$

x yerine $\frac{1}{2}$ yazarsak

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot f'\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=-16.g'(3)$$

$$f'\left(\frac{1}{4}\right)=-2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK Yandaki tabloda verilenlere göre, $(fog)'(-2)$ **kaçtır?**

x	f(x)	f′(x)	g(x)	g′(x)
–2	7	0	1	3
1	3	5	–1	7

ÇÖZÜM Bileşke fonksiyonunun türevi kuralına $x=-2$ uygulanırsa,

Tabloya göre;

$g'(-2)=3$

$g(-2)=1$

$f'(1)=5$ tir.

$$(fog)'(-2)=g'(-2).f'(g(-2))$$
$$=3.f'(1)$$
$$=3.5$$
$$=15 \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$\forall$ x, y $\in$ R için,

f : R $\to$ R, f(x + y) = f(x) + f(y) + 2.xy ile tanımlı $\forall$x $\in$ R için türevlenebilen f fonksiyonu veriliyor.

f′(0) = 6 olduğuna göre **f(x) in x türünden eşitini bulunuz.**

ÇÖZÜM

Eşitliğin her iki yanının x e göre türevini alalım.

$\frac{d}{dx}[f(x+y)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}(f(y)) + \frac{d}{dx}(2xy)$ bileşke fonksiyonunun türevine göre,

$f'(x+y) = f'(x) + 0 + 2y \Rightarrow f'(x+y) = f'(x) + 2y$ olur.

x = 0 için; $f'(y) = f'(0) + 2y$ olur.

$f'(y) = 2y + 6$ olur.

$f(y) = y^2 + 6y + k \Leftrightarrow f'(y) = 2y + 6$

Şimdi de k yı belirleyelim. k sabit terimdir, bu nedenle f(0) = k dır.

f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy eşitliğinde, x = 0, y = 0 alınırsa;

f(0) = f(0) + f(0) + 0

f(0) = 0 = k olur.

Buna göre, $f(y) = y^2 + 6y + 0$

$f(x) = x^2 + 6x$ bulunur.

UYARI: **1.** y = y(u), u = u(z), z = z(t) eşitlikleri R den R ye üç fonksiyon olmak üzere;

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \text{ dir.}$$

2. $y = (f(x))^m, m \in Q$ ise $\frac{dy}{dx} = m.\, f(x)^{m-1}.\, f'(x)$ dir.

ÖRNEK

$y = t^2 - 4t,\ t = \sqrt{2x+1}$ ise $t = \sqrt{2}$ için $\frac{dy}{dx}$ **nedir?**

ÇÖZÜM

$t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow t = \sqrt{2}$ için $\sqrt{2} = \sqrt{2x+1} \Rightarrow 2x+1 = 2$

$x = \frac{1}{2}$ dir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2t - 4,\quad \frac{dt}{dx} = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = (2t-4) \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}} = \frac{2t-4}{\sqrt{2x+1}} \text{ olur.}$$

$t = \sqrt{2}$ ve $x = \frac{1}{2}$ için

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{2}-4}{\sqrt{2 \cdot \frac{1}{2} + 1}} = \frac{2\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2\sqrt{2}-4)}{\sqrt{2}(\sqrt{2})} = \frac{4-4\sqrt{2}}{2} = 2 - 2\sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$z=5u^2,\ u=\sqrt{y^2+1},\ y=-x \Rightarrow \dfrac{dz}{dx}$ **nedir?**

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{array}{ll} z=5u^2 & \Rightarrow \dfrac{dz}{du}=10u \\[2ex] u=\sqrt{y^2+1} & \Rightarrow \dfrac{du}{dy}=\dfrac{2y}{2\sqrt{y^2+1}} \\[2ex] y=-x & \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=-1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dz}{du}\cdot\dfrac{du}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx} \\[2ex] \dfrac{dz}{dx}=10u\cdot\dfrac{y}{\sqrt{y^2+1}}\cdot(-1) \quad \text{(y=–x değeri yerine yazılırsa)} \\[2ex] \dfrac{dz}{dx}=-10y=10x \quad \text{bulunur.} \end{array}$$

ÖRNEK

$y=\sqrt{x},\ x=u^2+3,\ u=t^2$ ise $\dfrac{dy}{dt}$ nin $t=1$ için **değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ \dfrac{dx}{du}=2u,\ \dfrac{du}{dt}=2t$ dir.

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{du}\cdot\dfrac{du}{dt}$ dir. Bilinen değerler yerine yazılırsa,

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 2u\cdot 2t$ olur.

$u=t^2 \Rightarrow t=1$ için $u=1$

$x=u^2+3 \Rightarrow u=1$ için $x=4$ olur.

$t=1,\ u=1,\ x=4$ için $\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}\cdot 2\cdot 1\cdot 2=1$ bulunur.

ÖRNEK

$y=\left(\dfrac{2x-3}{5x-4}\right)^{10}$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ **in $x=1$ için değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$y=(f(x))^m \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=m.f(x)^{m-1}.f'(x)$ türevde zincir kuralına göre,

$\dfrac{dy}{dx}=10\left(\dfrac{2x-3}{5x-4}\right)^9\cdot\left(\dfrac{2x-3}{5x-4}\right)'$ olur. $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ kuralını uygularsak.

$\dfrac{dy}{dx}=10\left(\dfrac{2x-3}{5x-4}\right)^9\cdot\dfrac{-8+15}{(5x-4)^2}$ bulunur.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}(1)&=10\left(\frac{2-3}{5-4}\right)^9\cdot\frac{7}{(5-4)^2}\\ &=10(-1).7\\ &=-70 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$y=\sqrt{\dfrac{x^2+7}{10-x^2}}$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ in **$x=3$ için değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$y=\left(\dfrac{x^2+7}{10+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2+7}{10-x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{x^2+7}{10-x^2}\right)'$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2+7}{10-x^2}}}\cdot\dfrac{2x(10-x^2)+2x(x^2+7)}{(10-x^2)^2}$ olur.

$x=3$ için; $\quad \dfrac{dy}{dx}(3)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{6.1+6.16}{1}=\dfrac{102}{8}=\dfrac{51}{4}$ bulunur.

KÖKLÜ FONKSİYONLARIN TÜREVİ

1. $y = \sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}}}$

2. **Özel olarak;**

a) $y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ b) $y = \sqrt[3]{f(x)} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{3\sqrt[3]{f(x)^2}}$

ÖRNEK $y = f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$ ise $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$ **kaçtır?**

ÇÖZÜM $f'(x) = \dfrac{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{1}{x}}} = \dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{2\sqrt{\dfrac{1}{x}}}$ $\left(y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\right.$ uygulandı.$\left.\right)$

$f'\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{-16}{2 \cdot 2} = -\dfrac{16}{4} = -4$ bulunur.

ÖRNEK $y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1}$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ in **$x = 0$ için değeri nedir?**

ÇÖZÜM $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x-4}{2\sqrt{3x^2-4x+1}}$, $x = 0$ için $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-4}{2} = -2$ olur.

ÖRNEK $y = f(x) = (x - x^3) \,.\, \sqrt{1 + x^2}$ fonksiyonu için **$f'(1)$ kaçtır?**

ÇÖZÜM $f'(x) = (1 - 3x^2).\sqrt{1+x^2} + \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (x - x^3)$

$f'(1) = -2.\sqrt{2} + 0 = -2\sqrt{2}$

ÖRNEK $y = f(x) = \sqrt{8 - x^2} \cdot x$ ise **$f'(2)$ kaçtır?**

ÇÖZÜM $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}} \cdot x + 1.\sqrt{8-x^2}$

$f'(2) = \dfrac{-2.2}{2.2} \cdot 2 + 2 \Rightarrow f'(2) = -2 + 2 = 0$ olur.

ÖRNEK $f: R-\{0\} \to R$ $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}$ tanımlanıyor. **$f'(1)$ kaçtır?**

ÇÖZÜM $f'(x) = \dfrac{\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)'}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2}} = \dfrac{\dfrac{-1}{x^2}}{3\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2}} \Rightarrow f'(1) = \dfrac{-1}{3 \cdot \sqrt[3]{4}}$

ÖRNEK $f: R \to [0, \infty)$ $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ tanımlanıyor. **$f'(8)$ kaçtır?**

ÇÖZÜM $f'(x) = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2)^2}} = \dfrac{2x}{3x\sqrt[3]{x}} \Rightarrow f'(8) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{8}} = \dfrac{1}{3}$ bulunur.

AŞAĞIDAKİ FONKSİYONLARIN KARŞILARINDA BELİRTİLEN NOKTALARDA TÜREVLERİ VARSA BULUNUZ.

SORULAR			YANITLAR
1)	$f(x) = \|x+1\| + [\![\frac{x}{3}]\!] + \text{sgn}(x^2+4)$	$x = \frac{1}{2}$	1
2)	$f(x) = x\,[\![3x^2-1]\!] + 3x + \text{sgn}(x+3)$	$x = \frac{3}{4}$	3
3)	$f(x) = 2\text{sgn}(-x+1) + 5x^2$	$x = 2$	20
4)	$f(x) = x^2\,[\![x^2]\!]$	$x = 0$	0
5)	$f(x) = \|x+4\| + \|x^3+2x^2+x\|$	$x = 1$	9
6)	$f(x) = \frac{\|x+2\|}{x+2}$	$x = 4$	0
7)	$f(x) = x^3\|5\text{sgn}(-x^2+3)\|$	$x = \sqrt{5}$	75
8)	$f(x) = \text{sgn}(x^2-3x+2) + x^3[\![x]\!]$	$x = 1$	Yok
9)	$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x<1 \\ 2-x & x>1 \end{cases}$	$x = 3$	–1
10)	$f(x) = \begin{cases} 5x^2 & , x<0 \text{ ise} \\ -5x^2 & , x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$	$x = 0$	0
11)	$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-2} & x<1 \\ x.\ \cos x & x \geq 1 \end{cases}$	$x = 5$	cos5 – 5.sin5
12)	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-2} + [\![\frac{x^3}{5}]\!]$	$x = 2$	Yok
13)	$f(x) = \frac{x}{x-1} + x^3\text{sgn}(x^3)$	$x = 2$	11
14)	$f(x) = x^2.\|x+1\| + x^3 + x$	$x = \frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$
15)	$f(x) = [\![\frac{x}{2}]\!] + x^2$	$x = \frac{1}{2}$	1
16)	$f(x) = = x^2[\![3x]\!]$	$x = \frac{1}{3}$	Yok
17)	$f(x) = x^2\|x^2-4x-5\|$	$x = 2$	36
18)	$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$	$x = 1$	Yok
19)	$f(x) = \begin{cases} 2x^3+1 & ; x \geq 2 \\ 3x^2-x & ; x<2 \end{cases}$	$x = 3$	54
20)	$f(x) = \begin{cases} 2x^2+x-1 & ; x \geq 1 \\ x-2 & ; x<1 \end{cases}$	$x = 4$	17

AŞAĞIDAKİ FONKSİYONLARIN HERBİRİNDE BİLEŞKE FONKSİYONUNUN TÜREVİ KURALINA GÖRE $\frac{dy}{dx}$ İ BULUNUZ.

SORULAR	YANITLAR
1) $y=\frac{u-1}{u+1}$, $u=\sqrt{x}$	$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$
2) $y=5u^2$, $u=\sqrt{t^2+1}$, $t=-x$	$\frac{dy}{dx}=10x$
3) $y=\sqrt[3]{u}$, $u=t^5$, $t=\frac{x}{x+1}$	$\frac{dy}{dx}=\frac{5}{3(x+1)^2}\sqrt[3]{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}$
4) $y=\sqrt{t}$, $t=x+\sqrt{x+\sqrt{x}}$	$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left(1+\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)$
5) $y=t^3+4$, $t=x^2+2x$	$\frac{dy}{dx}=6x^2(x+2)^2\cdot(x+1)$
6) $y=\sqrt{1+t}$, $t=\sqrt{x}$	$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$
7) $y=t^3-3t+5$, $t=\frac{1}{2}x+3$	$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{8}x^2+\frac{9}{2}x+12$
8) $y=2t^3-6t$, $t=2x$	$\frac{dy}{dx}=48x^2-12$
9) $y=\left(x\sqrt{x}+3\right)^{12}$	$\frac{dy}{dx}=12\left(x\sqrt{x}+3\right)^{11}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\sqrt{x}\right)$
10) $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4$	$\frac{dy}{dx}=-8\frac{(x+1)^3}{(x-1)^5}$
11) $y=2t^2+1$ $x=t-1$	$\frac{dy}{dx}=4(x+1)$
12) $y=2t^2+1$ $x=3t-1$	$\frac{dy}{dx}=\frac{4(x+1)}{9}$
13) $y=\ln t$ $x=e^t$	$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\cdot\ln x}$
14) $y=(x^2+x)^5$	$\frac{dy}{dx}=5\left(x^2+x\right)^4\cdot(2x+1)$
15) $y=\sin t$ $t=\cos x$	$\frac{dy}{dx}=\cos(\cos x)\cdot(-\sin x)$

TEK, ÇİFT FONKSİYONLAR VE TÜREVLERİ

TANIM: **f: A→B f(x) = y fonksiyonu verilsin.**

a) **∀x ∈ A için f(–x) = f(x) ise f çift fonksiyondur.**

b) **∀x ∈ A için f(–x) = –f(x) ise f tek fonksiyondur denir.**

ÖRNEK

$f : R \to R$ bir fonksiyon ve $H(x) = \frac{1}{3}[f(x) + f(-x)]$

$G(x) = \frac{1}{3}[f(x) - f(-x)]$ tanımlı,

$R \to R$ ye H ve G fonksiyonları veriliyor.

ÖRNEK

a) H fonksiyonunun çift fonksiyon olduğunu

b) H fonksiyonunun türevinin tek fonksiyon olduğunu,

c) G fonksiyonunun tek fonksiyon olduğunu,

d) G fonksiyonunun türevinin çift fonksiyon olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

a) $H(-x) = H(x) \Rightarrow$ H çift fonksiyondur.

$$H(-x) = \frac{1}{3}[f(-x) + f(-(-x))]$$

$$= \frac{1}{3}[f(-x) + f(x)] = H(x)$$ olduğundan H çift fonksiyondur.

b) $$H'(x) = \frac{1}{3}[f'(x) - f'(-x)]$$

$H'(-x) = \frac{1}{3}[-f'(-x) + f'(x)]$ olur.

$H'(-x) = -H'(x)$ olduğundan H'(türev fonksiyonu) tektir.

c) $G(x) = -G(x)$ ise G tek fonksiyondur.

$$G(x) = \frac{1}{3}[f(x) - f(-x)] \Rightarrow G(-x) = \frac{1}{3}[f(-x) - f(-(-x))]$$

$G(-x) = \frac{1}{3}[f(-x) - f(x)]$ dir.

$G(-x) = -G(x)$ olduğundan G tek fonksiyondur.

d) $G'(-x) = G'(x)$ ise G' çift fonksiyondur.

$G'(x) = \frac{1}{3}[f'(x) + f'(-x)] = \frac{1}{3}[f'(-x) + f'(x)]$ olur.

$G'(-x) = G'(x)$ olduğundan G' çift fonksiyondur.

UYARI: **1)** $y = f(x)$ tek fonksiyon ise $y' = f'(x)$ çift fonksiyon,

2) $y = f(x)$ çift foksiyon ise $y' = f'(x)$ tek fonksiyondur.

ÖRNEK $f(x) = y = \cos 2x$ in çift fonksiyon ve türevinin tek fonksiyon olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM $f(x) = \cos 2x$ ise $f(-x) = \cos(-2x)$ dir.

$\forall x \in R$ için $\cos(-2x) = \cos 2x$ olduğundan f çifttir.

$f(x) = \cos 2x$ ise $f'(x) = -2\sin 2x$ dir.

$f'(-x) = -2\sin(-2x) = 2\sin 2x$ olduğundan

$f'(-x) = -f'(x)$ olur. Bu da

f' fonksiyonunun tek fonksiyon olduğunu gösterir.

ÖRNEK $f(x) = y = x^3$ ün tek ve türevinin çift fonksiyon olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM $f(x) = x^3 \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 = -x^3$ olur. $f(-x) = -f(x)$ olduğundan f tek,

$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$ olur. $f'(-x) = 3.(-x)^2 = 3x^2$ dir.

$f'(-x) = f'(x)$ olduğundan f' çift fonksiyondur.

PERİYODİK FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

$f(x) = f(x + T)$ ise f periyodiktir ve periyot T dir.

ÖRNEK $f(x) = f(x + T)$ ile tanımlı fonksiyonun türevinin de periyodik olduğunu gösteriniz.

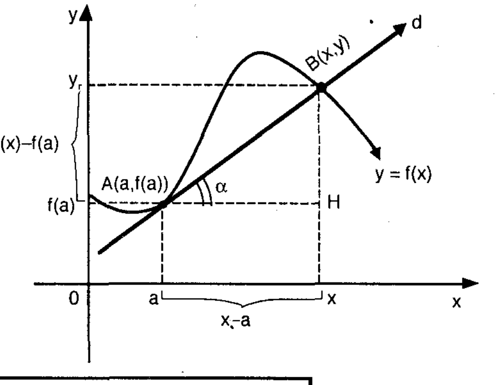
ÇÖZÜM $f(x) = f(x + T) \Rightarrow f'(x) = (x + T)'.f'(x + T)$

$\Rightarrow f'(x) = 1.f'(x + T)$

$\Rightarrow f'(x) = f'(x + T)$ olur. Bu örnekten

UYARI: Fonksiyon periyodik ve periyodu T ise türev fonksıyonu da periyodik ve periyodu T dir.

TÜREVİN GEOMETRİK ANLAMI



Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile A ve B den geçen d doğrusu verilmiştir.

d doğrusunun eğimi:

$$m = \tan\alpha = \frac{|BH|}{|AH|} = \frac{y - f(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$x \to a$ yaklaştıkça B noktası A noktasına yaklaşır. B yi A ya yaklaştırma işini sürdürürsek limit durumunda d doğrusu $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine A noktasında teğet olur.

Bu durumda;

$y = f(x)$ eğrisine üzerinde $A(a, f(a))$ noktasından çizilen teğetin eğimi m ise,

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \text{ dır.}$$

$y = f(x)$ fonksiyonunun üzerindeki bir nokta $A(x_0, y_0)$ ise bu noktadan çizilen teğetin denklemi

$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$ olur.

ÖRNEK $y = x^2 + 3x$ fonksiyonunun $x = 1$ **apsisli noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?**

ÇÖZÜM $y' = 2x + 3$ $\quad y'(1) = m_T = 2.1+3=5$ $\quad m_T = 5$ olur.

ÖRNEK $y = x^3 - 2x + 1$ fonksiyonuna üzerinde $x = 2$ apsisli noktadan çizilen teğetin denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM $y' = 3x^2 - 2$ $\quad y'(2) = m = 3.2^2 - 2 = 10$ $\quad y(2) = 2^3 - 2.2 + 1 = 5$ teğetinin çizildiği nokta $(\underset{x_1}{2}, \underset{y_1}{5})$ ve $m = 10$ değerleri $y - y_1 = m(x - x_1)$ de yerine yazılırsa teğetin denklemi:

$y - 5 = 10(x - 2)$

$y = 10x - 20 + 5 \Rightarrow y = 10x - 15$ olur.

ÖRNEK $y = x^2$ fonksiyonunun hangi noktasında çizilen teğetin eğimi $y = \frac{1}{2}x + 1$ doğrusuna diktir.

ÇÖZÜM $y = x^2$ *üzerindeki noktalar* (x, x^2) *dir. Herhangi bir* $A = (x, x^2)$ *noktasından çizilen teğetin* eğimi m_1 ise $m_1 = y'(x) = 2x$, $y = \frac{1}{2}x + 1$ doğrusunun eğimi $m_2 \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$

teğet $y = \frac{1}{2}x + 1$ doğrusuna dik olacağından $\quad m_1.m_2 = -1$ dir.

$$2x \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$x = -1$$

O halde, $A = (x, x^2) \rightarrow A = (-1, 1)$ olur.

ÖRNEK $y = a(x^2 - x)^3$ fonksiyonunun $x = 3$ apsisli noktasındaki teğeti, $-30x + y + 1 = 0$ doğrusuna paralel ise **a kaçtır?**

ÇÖZÜM

$y' = a.3.(x^2 - x)^2(2x - 1)$ $\qquad m_1 = y'(3) = 540a$ teğetin eğimi olsun.

$y'(3) = 3a.(9 - 3)^2(6 - 1)$ $\qquad -30x + y + 1$ doğrusunun eğimi

$y'(3) = 3.a.36.5$ $\qquad m_2 = -\frac{a}{b} \rightarrow m_2 = 30$

$y'(3) = 540a$ $\qquad$ doğrular paralel olduğunda $m_1 = m_2 \Rightarrow 540.a = 30$

$\Rightarrow a = \frac{1}{18}$ bulunur.

y = f(x) EĞRİSİNİN BİR NOKTADAKİ TEĞET, NORMAL, TEĞET ALTI VE NORMAL ALTI UZUNLUKLARI

TANIM: $y = f(x)$ eğrisinin üzerinde alınan bir noktadan çizilen teğete değme noktasında dik olan doğruya fonksiyonun bu noktadaki normali denir.

Normal çizildiği noktada teğete dik olduğundan $y = f(x)$ eğrisine dik kabul edilir.

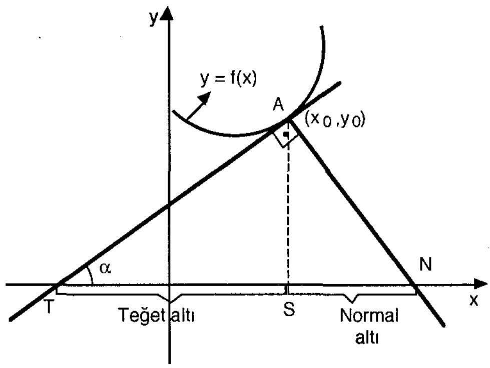
m_T = teğetin eğimi

m_N = normalin eğimi olmak üzere,

$m_T \cdot m_N = -1$

$m_N = -\frac{1}{m_T}$ ve $m_T = f'(x_0)$

$$\boxed{m_N = -\frac{1}{f'(x_0)}}$$ olur.



$y = f(x)$ eğrisine üzerindeki $A(x_0, y_0)$ noktasından çizilen normalin denklemi:

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$$ dir.

$|AT| = x$ = Teğet uzunluğu

$|AN| = y$ = normal uzunluğu

$|TS| = t_A$ = Teğet altı uzunluğu= [[AT] nin x ekseni üzerindekı dik izdüşümüdür.]

ATS ve ATN dik üçgenlerinden

$\widehat{ATS}$ den, $\sin\alpha = \dfrac{|f(x_0)|}{x} \Rightarrow x = \dfrac{|f(x_0)|}{\sin\alpha}$ ve $\tan\alpha = \dfrac{|f(x_0)|}{t_A} \Rightarrow t_A = \dfrac{f(x_0)}{\tan\alpha}$

$\widehat{ATN}$ den, $\cos\alpha = \dfrac{|f(x_0)|}{y} \Rightarrow y = \left|\dfrac{f(x_0)}{\cos\alpha}\right|$ ve $t_A = \left|\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|$

$$\tan\alpha = \frac{n_A}{|f(x_0)|} \Rightarrow n_A = |\tan\alpha|.|f(x_0)|$$

$$\Rightarrow n_A = |f'(x_0)|.|f(x_0)| \text{ bulunur.}$$

$$\Rightarrow n_A = |f'(x_0).f(x_0)|$$

ÖRNEK

$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 1$ denklemi ile verilen eğrinin üzerindeki $A(1, -1)$ noktasından çizilen

a) Teğetin denklemini,

b) Normalin denklemini,

c) Teğet altı uzunluğunu,

d) Normal altı uzunluğunu,

e) Teğet parçasının uzunluğunu

f) Normal parçasının uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$f'(x) = 6x^2 - 4x$

$m_T = f'(1) = 2 \quad m_N = -\dfrac{1}{2}$

a) Teğetin denklemi;

$y + 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 3$

b) Normalin denklemi;

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

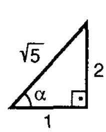
c) Teğet altı uzunluğu

Teğet altı uzunluğu $= t_A$ alınırsa, $t_A = \left|\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| \Rightarrow t_A = \left|\dfrac{f(1)}{f'(1)}\right| = \left|\dfrac{-1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$

d) Normal altı uzunluğu n_A alınırsa, $n_A = |f(x_0).f'(x_0)| = N_A = |f(1).f'(1)| = |(-1).2| = 2$

e) Teğet parçasının uzunluğu x alınırsa ,

$$x = \left|\frac{f(x_0)}{\sin\alpha}\right| = \left|\frac{-1}{\frac{2}{\sqrt{5}}}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$



$\left(\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \quad \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

f) Normal parçasının uzunluğu y alınırsa,

$$y = \left|\frac{f(x_0)}{\cos\alpha}\right| = \left|\frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{5}}}\right| = \sqrt{5} \text{ bulunur.}$$

SAĞDAN VE SOLDAN TÜREVİN GEOMETRİK ANLAMI

$y = f(x) = \begin{cases} g(x) \ , & x < a \ \text{ise} \\ h(x) \ , & x \geq a \ \text{ise} \end{cases}$ biçiminde verilen $y = f(x)$ eğrisi $x = a$ da sürekli olduğu halde türevsiz olabileceğini görmüştük.

*Burada kritik nokta $x = a$ dır. Fonksiyonun $x = a$ da türevli olması için $x = a$ ya sağdan veya soldan yaklaştı*ğımızda a komşuluğundaki türevlerinin eşit olması gerekir.

Geometrik olarak ise, a ya sağdan yaklaşarak çizdiğimiz teğet ile a ya soldan yaklaşarak çizdiğimiz teğetlerin çakışık olması fonksiyonun bu noktada tek bir teğetin bulunduğunu bu yüzden sağ ve sol türevlerin eşit olmasını gerektirir.

UYARI: $y = f(x)$ fonksiyonuna $x = a$ da;

a) bir ve yalnız bir tane teğet çizilebiliyorsa, $x = a$ da soldan türev sağdan türeve eşittir.

b) birden çok teğet çizilebiliyorsa, $x = a$ da fonksiyonun fürevi yoktur.

İKİ EĞRİ ARASINDAKİ AÇI

$y = f(x)$, $y = g(x)$ denklemleri ile verilen kesişen iki eğri arasındaki açı, kesişme noktasından çizilen teğetlerin oluşturduğu açılardan herhangi biridir. Bu açılardan biri α ve doğrularının eğimleri m_1 ve m_2 ise $\tan\alpha = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}$

kesişme noktası $A(x, y)$ ise $\boxed{\tan\alpha = \dfrac{f'(x) - g'(x)}{1 + f'(x).g'(x)}}$ dir.

ÖRNEK $f: R^+ \to R^+$, $f(x) = x^2$, $g: R^+ \to R^+$, $g(x) = x^3$ fonksiyonları veriliyor. İki eğri arasındaki açı α ise **$\cos^2\alpha$ kaçtır?**

ÇÖZÜM $f(x) = g(x)$ denklemini çözerek kesim noktalarını bulalım.

fonksiyonlar R^+ tanımlı olduğundan kesim noktasının apsisi $x = 1$ olur.

$x^2 = x^3$ $\qquad f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x, \qquad m_1 = f'(1) = 2$

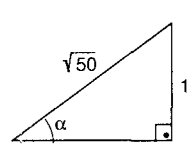
$x^2 - x^3 = 0$ $\qquad g(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x \qquad m_2 = g'(1) = 3$

$x^2(x - 1) = 0$

$x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$ bulunur.

İki eğri arasındaki açılardan biri α ise

$$\tan\alpha = \frac{f'(1) - g'(1)}{1 + f'(1).g'(1)} = \frac{2-3}{1+2\cdot3} = -\frac{1}{7} \text{ olur.}$$



$$\cos\alpha = \frac{\pm 7}{\sqrt{50}} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{49}{50} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $R \to R,\ f(x) = \begin{cases} x^2+1 &, x<1 \text{ ise} \\ -x+3 &, x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$ biçiminde verilen **f nin x = 1 e sağdan ve soldan yaklaştığımızda elde edilen teğetlerin çakışık olup olmadığını araştırınız.**

ÇÖZÜM Soldan ve sağdan türevlerin eşit olup olmadığını araştıralım.

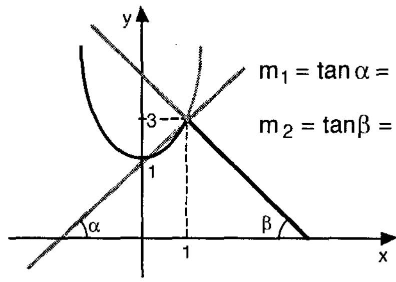
$$f'(x) = \begin{cases} 2x &, x<1 \text{ ise} \\ -1 &, x>1 \text{ ise} \end{cases}$$

Sağdan türev, $f'(1^+) = -1$ dir. Bu bize $x = 1$ sağdan yaklaşarak çizdiğimiz teğetin eğiminin -1 olduğunu anlatır.

Soldan türev, $f'(1^-) = 2.1 = 2$ ise $x = 1$ e soldan yaklaşarak çizdiğimiz teğetin eğiminin 2 olduğunu anlatır.

Sonuç olarak; sağdan ve soldan teğetlerinin farklı olması fonksiyonun bu noktada türevsiz olduğunu gösterir.

Bunu bir de grafik çizerek görelim.



Not: Türevin uygulamaları konusunda türevin geometrik anlamı konusuna tekrar dönülecektir.

TÜREVİN FİZİKSEL ANLAMI

KONUM ZAMAN FONKSİYONU

TANIM: S = yol, t = zaman olmak üzere, hareketli bir cismin yeri zamana göre değişir.

Bu durumda; bağımsız değişken: t (zaman)

bağımlı değişken: S(yol) ve

S nin bir fonksiyonu olarak, S = f(t) şeklinde yazılan fonksiyona bir hareketlinin konum–zaman fonksiyonu denir.

HIZ–ORTALAMA HIZ, ANİ HIZ

$S = f(t)$ denklemi verilsin.

Hız = $\boxed{\vartheta = \frac{S}{t} \Rightarrow \vartheta = \frac{f(t)}{t}}$ dır.

hareketlinin t_1 anında aldığı yol $= S_1 = f(t_1)$

hareketlinin t_2 anında aldığı yol $= S_2 = f(t_2)$

$t_1 < t_2$ ise,

Ortalama Hız = $\boxed{\vartheta_{ort} = \frac{dS}{dt} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}}$ dir.

$\frac{dS}{dt}$ yolun zamana göre değişimini limit değeri yani yolun zamana göre türevidir diyebiliriz.

$t = t_0$ anındaki hız $= \vartheta'(t_0)$ dır. Buna **bir anlık hız** veya **ani hız** da denir.

UYARI: $S = f(t)$ için $\frac{dS}{dt} = f'(t)$ **S nin t ye göre I. türevidir.**

$\frac{d^2S}{dt^2} = f''(t)$ **S nin t ye göre II. türevidir.**

BİR HAREKETLİNİN İVMESİ

Bir hareketlinin hızının zamana göre türevine **hareketin ivmesi** denir.

$$\boxed{\textbf{İvme} = \alpha = \frac{d\vartheta}{dt}}$$

ayrıca $\vartheta = \frac{dS}{dt}$ olduğundan;

$$\boxed{\textbf{ivme} = a = \frac{d^2S}{dt^2}}$$ olur.

Kısaca:	Yolun zamana göre I. türevi hızdır.
	Yolun zamana göre II. türevi ivmedir denilebilir.

UYARI: $S = f(t)$ bir hareketlinin konum–zaman fonksiyonu ve $t = t_0$ anında:

ivme = a, Hız = ϑ olsun.

1. Eğer, $a > 0$ ise ϑ(cebirsel olarak) artar.
2. Eğer, $a < 0$ ise ϑ (cebirsel olarak) azalır.
3. Eğer, $a > 0$ ve $\vartheta = 0$ ise S nin minimumu vardır.
4. Eğer, $a < 0$ ve $\vartheta = 0$ ise S nin maksimumu vardır.

ÖRNEK

Bir doğru boyunca $S = \frac{t^3}{2} - 2t$ bağıntısına uyarak hareket eden bir hareketlinin 4. saniye sonundaki hızını ve ivmesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Hız = $\vartheta_{(t)} = = \frac{dS}{dt} = \frac{3t^2}{2} - 2$

4. saniyedeki hızı: $\vartheta_{(4)} = \frac{3.4^2}{2} - 2 \Rightarrow \vartheta_{(4)} = 22\,m/s$

İvme = $\frac{d^2S}{dt^2} = \frac{d\vartheta}{dt} = 3t$ den $t = 4$ için ivme = 3.4 = 12 bulunur.

ÖRNEK

Bir A noktasının bir doğru boyunca yaptığı hareketlerin konum–zaman fonksiyonu:

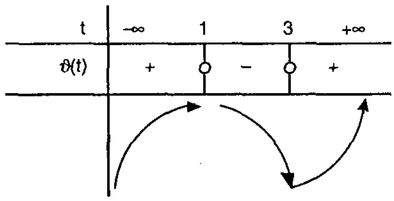
$S = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$ tür.

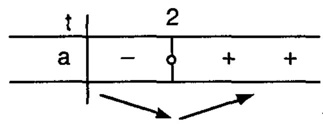
a = ivme, S = yol, ϑ = hız, t = zaman olmak üzere,

1. $\vartheta = 0$ iken S ve a yı bulunuz.
2. $a = 0$ iken ϑ yi bulunuz.
3. Hareketlinin yönü değiştiğinde t kaçtır?

ÇÖZÜM t noktasındaki, Hız $= \vartheta = \dfrac{dS}{dt} = 3t^2 - 12t + 9t = 3(t-1)(t-3)$

$$\text{İvme} = a = \frac{d^2S}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} = 6t - 12 = 6(t-2) \text{ dir.}$$





1. $\vartheta = 3(t-1)(t-3) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ ve $t = 3$ iken $\vartheta = 0$ dır.

2. $a = 0$ ise $6(t-2) = 0,\ t = 2$

$t = 2$ ise $\vartheta_{(2)} = 3(2-1).(2-3) = -3$ tür.

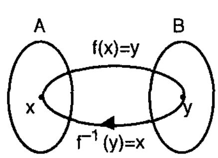
3. Hareketlinin yönü $\vartheta = 0,\ a \neq 0$ için değişir.

$t = 1$ ve $t = 3$	için	$\vartheta = 0$ idi.
$t = 1$	için	$a = 6.(1-2) = -6 \neq 0$
$t = 3$	için	$a = 6(3-2) = 6 \neq 0$
$t = 1$ ve $t = 3$	için	$a \neq 0$ olduğunda bu anlarda hareketin yönü değişir.

TERS FONKSİYONUN TÜREVİ

$A \subset R$ ve $B \subset R$ olmak üzere; $f : A \to B$ ye $1-1$ örten $f(x) = y$ bir fonksiyon ise

$f^{-1} : B \to A$ ya 1–1 ve örten $f^{-1}(y) = x$

Bu durumu  şemasıyla gösteririz.

$I(x) = \left(f^{-1} o f\right)(x) \Rightarrow f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ (bir fonksiyon ile tersinin bileşkesi birim fonksiyondur.)

$f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ eşitliğinin her iki tarafının x e göre türevini alırsak.

$$\frac{d}{dx}\left[f^{-1}f(x)\right] = \frac{dx}{dx}$$

$f'(x).\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right) = 1$ olur. Buradan;

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{f'(x)}}$$ olur.

ÖRNEK $f: R^+ \to R^+$, $f(x) = \sqrt{27x}$ fonksiyonu veriliyor $\left(f^{-1}\right)'(9)$ **sayısı kaçtır?**

ÇÖZÜM–1 Önce fonksiyonun tersini, sonra tersinin türevini alalım.

$y = \sqrt{27x}$ de, x yerine y, y yerine x yazarsaк

$x = \sqrt{27y}$, $x^2 = 27y \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x^2}{27}$ dir.

$$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{27} \cdot 2x = \frac{2x}{27}$$

$$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(9) = \frac{2 \cdot 9}{27} = \frac{2}{3} \text{ olur.}$$

ÇÖZÜM–2 $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ kuralını uygulayarak çözelim.

$y = f(x) = \sqrt{27x} = 9 \Rightarrow \left[\left(f^{-1}\right)(9) \Rightarrow y = 9\right.$ olduğuna dikkat ediniz.$\left.\right]$

$27x = 81$

$x = 3$ olur.

O halde; $\left(f^{-1}\right)'(9) = \dfrac{1}{f'(3)}$ dir.

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\left(\sqrt{27x}\right)'} = \frac{1}{\dfrac{27}{2\sqrt{27x}}} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(9) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{\dfrac{27}{2\sqrt{27.3}}} = \frac{1}{\dfrac{27}{18}} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $f: (1, \infty) \to R^+$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ fonksiyonu veriliyor. $\left(f^{-1}\right)'(3)$ **kaçtır?**

ÇÖZÜM–1 $(1, \infty)$ aralığında fonksiyon 1–1 dir. Tersi vardır.

$y = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow x = \sqrt{y^2 - 1}$

$x^2 + 1 = y^2 \Rightarrow y = \mp\sqrt{x^2 + 1}$ olur. $f(1, +\infty)$ aralığında tanımlı olduğundan;

$f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ dır.

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ olur.}$$

ÇÖZÜM–2 $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ kuralını kullanarak çözelim.

$\left(f^{-1}\right)'(3)$ ifadesinde $y = 3$ tür.

$y = \sqrt{x^2 - 1} = 3 \Rightarrow x^2 - 1 = 9$

$x = \mp\sqrt{10}$ olur. $x = -\sqrt{10}$ tanım kümesinde olmadığından;

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{f'\left(\sqrt{10}\right)} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2 - 1}}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

ÖRNEK $f: R \to R$, $f(x) = 2x^3 + x - 1$ ise $\left(f^{-1}\right)'(2)$ **kaçtır?**

ÇÖZÜM $2 = 2x^3 + x - 1 \Rightarrow x = 1,\quad f'(x) = 6x^2 + 1$

$$\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6.1^2 + 1} = \frac{1}{7} \text{ olur.}$$

ÖRNEK $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ fonksiyonu veriliyor

$\left[f^{-1}\right]'(3)$ **değeri varsa nedir?**

ÇÖZÜM $x^3 - 3x^2 + 3x + 2 = 3 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

$(x - 1)^3 = 0$

$x = 1$ dir.

$\left[f^{-1}\right]'(3) = \dfrac{1}{f'(1)}$ dir.

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 \Rightarrow f'(1) = 0$ olur.

$\left[f^{-1}\right]'(3) = \dfrac{1}{0} = \infty$ bulunur.

O halde $x = 3$ de f^{-1} fonksiyonu türevsizdir.

UYARI: $f(x)$ fonksiyonu için $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun türevli olması için $f(x)$, 1–1 ve örten olmalıdır.

Yukarıdaki örnekte verilen $f(x)$ fonksiyonu $x = 1$ de 1–1 ve örten olmadığı için

$\left[f^{-1}\right]'(3)$ yoktur.

ÇÖZÜMLÜ TEST – 1

1. $f(x) = x^3 + 2x - 1$ olmak üzere;

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{1 - x}$ **in değeri nedir?**

A) –5 B) –3 C) 3 D) 5 E) 6

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{1 - x} = -\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -f'(1) \text{ dir.}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \Rightarrow f'(1) = 3 + 2 = 5$$

Buna göre;

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{1 - x} = -f'(1) = -5 \text{ dir.}$$

YANIT "A"

2. $f(x) = \dfrac{x^2 + kx}{2x + 1}$ fonksiyonunun $x = -1$ deki türevi $y = 4x - 3$ doğrusunun eğimine eşit ise **k kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

ÇÖZÜM

$y = 4x - 3$ doğrusunun eğimi $m = 4$ tür.

$$f'(x) = \frac{(2x + k)\cdot(2x + 1) - 2\cdot(x^2 + kx)}{(2x + 1)^2}$$

$$f'(-1) = \frac{(2\cdot(-1) + k)\cdot(2\cdot(-1) + 1) - 2\cdot((-1)^2 + k(-1))}{[2\cdot(-1) + 1]^2}$$

$$= \frac{(-2 + k)\cdot(-1) - 2\cdot(1 - k)}{(-1)^2} = 4$$

$$2 - k - 2 + 2k = 4 \Rightarrow k = 4 \text{ tür.}$$

YANIT "C"

3. $f(x) = (x^2 - 3x + 3)^3$ ise $(\mathbf{fof'})(1)$ **in değeri kaçtır?**

A) –1 B) 1 C) 15^3 D) 21^3 E) 27^3

ÇÖZÜM

$$f'(x) = 3\cdot(2x - 3)\cdot(x^2 - 3x + 3)^2$$

$$f'(1) = 3\cdot(-1)\cdot(1 - 3 + 3)^2 = -3$$

$$(fof')(1) = f(-3) = (9 - 3(-3) + 3)^3 = 21^3$$

YANIT "D"

4. $f(x) = (x^2 + 1)^3 \cdot (\sqrt{x} + x)^2$ fonksiyonunun **x = 1 deki türevinin değeri kaçtır?**

A) 36 B) 48 C) 72 D) 144 E) 168

ÇÖZÜM

$$f'(x) = 3\cdot 2x(x^2 + 1)^2\cdot(\sqrt{x} + x)^2 + 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right)(\sqrt{x} + x)\cdot(x^2 + 1)^3$$

$$f'(1) = 3\cdot 2^2\cdot 2^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2} + 1\right)\cdot 2\cdot 2^3 = 96 + 48 = 144$$

YANIT "D"

5. $f(x) = x^3 - 2x$ fonksiyonu veriliyor.

$3.f(x) - x\,f'(x) = 12$ ise **x kaçtır?**

A) 3 B) 2 C) –1 D) –2 E) –3

ÇÖZÜM

$$3.f(x) - x.f'(x) = 12$$

$$3.(x^3 - 2x) - x.(3x^2 - 2) = 12$$

$$-6x + 2x = -4x = 12 \Rightarrow x = -3 \text{ tür.}$$

YANIT "E"

6. $f(x^3-5x)=x^8+x^4-1$ fonksiyonu veriliyor.

f(x) fonksiyonunun **x = –4 deki türevinin değeri kaçtır?**

A) –12 B) –6 C) –5 D) –4 E) –2

ÇÖZÜM

$$f(x^3-5x)=x^8+x^4-1$$

$$(3x^2-5)\cdot f'(x^3-5x)=8x^7+4x^3$$

$$x=1 \text{ ise } (3-5)\cdot f'(1-5)=8+4$$

$$-2f'(-4)=12 \Rightarrow f'(-4)=-6 \text{ dır.}$$

YANIT "B"

7. $f(x)=\sqrt[3]{6x+1}$ fonksiyonu veriliyor.

f′(x) in f(x) cinsinden ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $6\cdot[f(x)]^{-2}$ B) $4\cdot[f(x)]^{-2}$ C) $3\cdot[f(x)]^{-2}$

D) $2[f(x)]^{-2}$ E) $[f(x)]^{-2}$

ÇÖZÜM

$$f'(x)=\frac{6}{3\cdot\sqrt[3]{(6x+1)^2}}=\frac{2}{\left(\sqrt[3]{6x+1}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{[f(x)]^2}=2\cdot[f(x)]^{-2} \text{ dir.}$$

YANIT "D"

8. $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x}}$ ise **f′(x) aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $-\frac{1}{4\sqrt{x-\sqrt{x}}}$ B) $-\frac{1}{4\sqrt{1-\sqrt{x}}}$

C) $-\frac{1}{4\sqrt{\sqrt{x}-x}}$ D) $-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-\sqrt{x}}}$

E) $-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}$

ÇÖZÜM

$$f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{1-\sqrt{x}}}$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-x\sqrt{x}}} \text{ dir.}$$

YANIT "C"

9. $y=f(x)$ ve $\frac{1}{xy}-\frac{x}{y}=x^3-\frac{1}{x}$ ise **f′(2) nin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{16}{225}$ B) $\frac{4}{25}$ C) $\frac{19}{225}$ D) $\frac{23}{15}$ E) $\frac{26}{15}$

ÇÖZÜM

$$\frac{1}{xy}-\frac{x}{y}=x^3-\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{y}\left(\frac{1}{x}-x\right)=\frac{x^4-1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\cdot\left(\frac{1-x^2}{x}\right)=\frac{x^4-1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}=\frac{x^4-1}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow y=-\frac{1}{x^2+1}$$

$$y'=f'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(2)=\frac{4}{25} \text{ tir.}$$

YANIT "B"

10. $f: R\to R$, $f(x)=x^3-3x^2+18x-14$ fonksiyonu veriliyor.

$f^{-1}(x)$ fonksiyonunun x = 2 deki türevinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{15}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{18}$ E) $\frac{1}{20}$

ÇÖZÜM

$f : R \to R$ ye f(x) 1–1 ve örten fonksiyondur.

$f(1) = 1 - 3 + 18 - 14 = 2$ olduğundan $f^{-1}(2) = 1$ dir.

Buna göre,

$$\left.\frac{df^{-1}(x)}{d(x)}\right]_{x=2} = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(1)} \text{ dir.}$$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 18 \Rightarrow f'(1) = 3 - 6 + 18 = 15$ dir.

$$\left.\frac{df^{-1}(x)}{d(x)}\right]_{x=2} = \frac{1}{15} \text{ dir.}$$

YANIT "B"

11. $f: R - \{1\} \to R - \{2\}$

$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ olduğuna göre $(f^{-1})'(3)$ **kaçtır?**

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x-2} \Rightarrow$$

$$\frac{df'(x)}{dx} = \frac{x-2-(x-1)}{(x-2)} = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

Buna göre,

$$(f^{-1})'(3) = \frac{-1}{(3-2)^2} = -1 \text{ dir.}$$

YANIT "A"

12. $f: [1, \infty) \to [-6, \infty)$

$f(x) = x^2 - 2x - 5$ biçiminde tanımlanan

f(x) fonksiyonu için $(f^{-1})'(-2)$ **değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

ÇÖZÜM–1

$f(x) = x^2 - 2x - 5$ fonksiyonu için $f(3) = -2$ olduğundan $f^{-1}(-2) = 3$ dür.

Buna göre,

$$(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-2))} = \frac{1}{f'(3)} \text{ tür.}$$

$f(x) = x^2 - 2x - 5 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$ ve

$f'(3) = 2.3 - 2 = 4$ tür.

O halde,

$$(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{4} \text{ tür.}$$

ÇÖZÜM–2

$$y = x^2 - 2x - 5 \Rightarrow x = y^2 - 2y - 5$$
$$\Rightarrow (y-1)^2 = x + 6$$
$$\Rightarrow y = 1 \mp \sqrt{x+6}$$

$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+6} \Rightarrow \frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+6}}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{df^{-1}(x)}{dx}\right]_{x=-2} = \frac{1}{2\sqrt{-2+6}} = \frac{1}{4} \text{ dür.}$$

YANIT"C"

13. f ve g reel sayılarda türevli iki fonksiyonda $g'(2) = 3$, $g(2) = -4$, $f'(-4) = 8$ ise $(fog)'(2)$ **kaçtır?**

A) –32 B) –12 C) 16 D) 20 E) 24

ÇÖZÜM

$(fog)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ dir.

$$(fog)'(2) = f'(g(2)) \cdot g'(2)$$
$$= 3 \cdot f'(g(2)) = 3 \cdot f'(-4) = 3 \cdot 8 = 24$$

YANIT "E"

14. $f(x) = 12 \cdot \sqrt[3]{x} + x - 30$; $g(x) = (x^3 - 5x + 4)^4$ biçiminde tanımlı f(x) ve g(x) fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, $(gof)'(8)$ kaçtır?

A) –84 B) –48 C) 96 D) 224 E) 448

ÇÖZÜM

$(gof)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ dir.

$(gof)'(8) = g'(f(8)) \cdot f'(8)$

$$f'(x) = \frac{12}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} + 1 \Rightarrow f'(8) = \frac{12}{3 \cdot \sqrt[3]{8^2}} + 1 = 2$$

$$g'(x) = 4 \cdot (3x^2 - 5) \cdot (x^3 - 5x + 4)^3$$

$$g'(f(8)) = g'(2) = 4 \cdot (3 \cdot 2^2 - 5) \cdot (2^3 - 5 \cdot 2 + 4)^3$$

$$g'(2) = 224$$

(gof)'(8)= 224 . 2= 448 bulunur.

YANIT "E"

15. $f: R \to R$, $f(x) = \text{sgn}(x^2 - 5x + 6)$ fonksiyonunun $(-2,4]$ aralığında **kaç tamsayı için türevi sıfırdır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ ve $x_2 = 3$ değerleri fonksiyonu sıfır yaptığından bu noktalarda f(x) in türevi yoktur.

$(-2,4]$ aralığında $x_1 = 2$ ve $x_2 = 3$ ün dışında $-1, 0, 1, 4$ tamsayıları için f(x) in türevi vardır ve sıfırdır.

YANIT "D"

16. Bir cismin hareket denklemi $f(t) = 3t^2 + 2t + 1$ dir. **Cismin 4. saniyedeki hızı nedir.**

A) 16 B) 18 C) 22 D) 24 E) 26

ÇÖZÜM

$\vartheta(t) = f'(t) = 6t + 2$ olduğundan,

$\vartheta(4) = f'(4) = 6.4 + 2 = 26$ dır.

YANIT "E"

17. $f(x) = |x^9|$ fonksiyonunun **x = 0 noktasında en son kaçıncı türevi vardır?**

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) ∞

ÇÖZÜM

$$f(x) = \begin{cases} x^9 & ; \ x \geq 0 \ \text{ise} \\ -x^9 & ; \ x < 0 \ \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde yazarsak, f(x) in x = 0 noktasında en son 8. türevi vardır.

YANIT "C"

18. $f(x) = x^{[\![2x+\frac{1}{3}]\!]}$ fonksiyonuna **x = 2 noktasından çizilen normalin eğimi nedir?**

A) –32 B) $-\frac{1}{32}$ C) 0

D) $\frac{1}{32}$ E) 32

ÇÖZÜM

$f(2) = 2^{[\![2\cdot 2+\frac{1}{3}]\!]} = 2^{[\![\frac{13}{3}]\!]} = 2^4 = 16$ olduğundan

fonksiyon üzerindeki nokta (2, 16) dır.

$$f'(x) = [\![2x + \frac{1}{3}]\!] \cdot x^{[\![2x+\frac{1}{3}]\!]-1}$$

$$f'(2) = [\![4 + \frac{1}{3}]\!] \cdot 2^{[\![4+\frac{1}{3}]\!]-1} = 4 \cdot 2^3 = 32$$

olduğundan (2, 16) noktasındaki teğetinin eğimi

$m_t = f'(2) = 32$ ve normalin eğimi ise

$m_n = -\frac{1}{32}$ dir.

YANIT "B"

19. $f: R \to R$,

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - x + 5| & ; \ x \leq 0 \ \text{ise} \\ \text{sgn}(\ln x) & ; \ 0 < x \leq 1 \ \text{ise} \\ x + [\![x]\!] & ; \ x > 1 \ \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı f(x) fonksiyonu veriliyor.

$f'(-2) + f'\left(\frac{1}{3}\right) + f'\left(\frac{3}{2}\right)$ **toplamı kaçtır?**

A) –4 B) –3 C) –2 D) –1 E) 0

ÇÖZÜM

$x \leq 0$ ise;

$$\left(|x^2 - x + 5|\right)' = (2x - 1)$$

$$f'(-2) = (-4 - 1)$$

$f'(-2) = -5$ olur.

$0 < x \leq 1$ ise,

$$\ln x \leq 0 \Rightarrow \text{sgn}(\ln x) = -1 \Rightarrow \text{sgn}\left(\ln \frac{1}{3}\right) = -1$$

olduğundan $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ dır.

$x \notin Z$ ise $[\![x]\!]$ fonksiyonunun türevi sıfırdır.

O halde,

$(x + [\![x]\!])' = 1 \Rightarrow f'\left(\frac{3}{2}\right) = 1$ dir.

$$f'(-2) + f'\left(\frac{1}{3}\right) + f'\left(\frac{3}{2}\right) = -5 + 0 + 1$$

$= -4$ bulunur.

YANIT "A"

20. $f(x) = x^2 . [\![x^2]\!]$ fonksiyonu **aşağıdaki noktalardan hangisinde <u>türevsizdir?</u>**

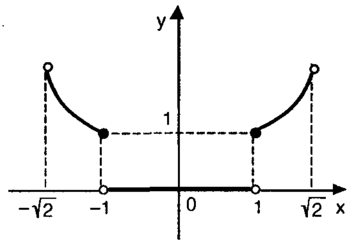
A) -1 B) $-\frac{1}{3}$ C) 0 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

ÇÖZÜM

$-1 < x < 1 \Rightarrow f(x) = x^2 . [\![x^2]\!] = 0.x^2 = 0$ dır.

$-\sqrt{2} < x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x^2 < 2 \Rightarrow f(x) = x^2$

$1 \leq x < \sqrt{2} \Rightarrow f(x) = x^2 . [\![x^2]\!] = 1.x^2 = x^2$



Grafikte de görüldüğü gibi

$f(x)$; $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}$ noktalarında türevli, ancak -1 de sürekli olmadığından türevsizdir.

YANIT "A"

21. $f : R \to R$,

$f(x) = |x^2 - 5x + 6| + \mathrm{sgn}(x - 4) + [\![x + 2]\!]$

fonksiyonunun türevsiz olduğu noktaların kümesi **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\{2, 3, 4\}$ B) $\{-2, 2, 3, 4\}$

C) $Z - \{2, 3, 4\}$ D) $R - \{2, 3, 4\}$

E) Z

ÇÖZÜM

$x = 2$ veya $x = 3$ ise

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow |x^2 - 5x + 6|$ türevsiz,

$x = 4$ ise $\mathrm{sgn}(x - 4)$ türevsiz.

$x \in Z$ ise $(x + 2) \in Z \Rightarrow [\![x + 2]\!]$ türevsizdir.

O halde $f(x)$ in türevsiz olduğu noktalar kümesi,

$Z \cup \{2,3\} \cup \{4\} = Z$ dir.

YANIT "E"

22. $f: R \to R$, $f(x)$ fonksiyonu için

$f(x+2) = \dfrac{x+3}{x^2+2}$ veriliyor.

$f(x)$ fonksiyonunun $x = 3$ deki teğeti $ax + by + c = 0$ doğrusuna paralel ise $\frac{b}{a}$ **kaçtır?**

A) $-\frac{5}{9}$ B) $\frac{5}{9}$ C) 1 D) $\frac{9}{5}$ E) $\frac{20}{3}$

ÇÖZÜM

$x = 3$ deki teğetinin eğimi $f'(3)$ tür.

$$f(x+2) = \frac{x+3}{x^2+2}$$

$$f'(x+2) = \frac{1(x^2+2) - 2x(x+3)}{(x^2+2)^2}$$

$x = 1$ için; $f'(3) = \dfrac{3-8}{9} = \dfrac{-5}{9}$ olur.

f nin $x = 3$ deki teğeti $ax + by + c = 0$ doğrusuna paralel ise eğimleri eşit olmalıdır.

$m_T = -\frac{5}{9}$ ve doğrunun eğimi $m_f = -\frac{a}{b}$

olduğundan;

$-\frac{a}{b} = -\frac{5}{9} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{9}{5}$ olur.

YANIT "D"

23. $f: R \to R$, $f(x) = |9 - x^2|$ fonksiyonu veriliyor.

f nin x = 1 deki normalinin eğimi kaçtır?

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{8}{3}$

ÇÖZÜM

$-3 < x < 3$ için $f'(x) = -2x$ dir.

$f'(1) = -2.1 = -2$ dir.

$m_T = f'(1) = -2$

$m_T m_N = -1$ olduğundan

$m_N = \frac{1}{2}$ olur.

YANIT "B"

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

SİNÜS FONKSİYONUNUN TÜREVİ

TEOREM: **$f: R \to R$, $f(x) = \sin u(x)$ ve $u(x)$, x in bir fonksiyonu olmak üzere**

$f'(x) = u'(x).\cos u(x)$ dir.

İSPAT: $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$ olduğunu ispatlamıştık.

$f(x) = \sin u(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x).\cos u(x)$ olduğunu **türevde zincir kuralına** göre yazabiliriz.

ÖRNEK $f: R \to R$, $f(x) = \sin(3x + 5)$ ise **$f'(x)$ nedir?**

ÇÖZÜM $f'(x) = (3x + 5)'.\cos(3x + 5) = 3.\cos(3x + 5)$ olur.

ÖRNEK $y = \sin^3 2x$ ise $\frac{dy}{dx}$ **nedir?**

ÇÖZÜM $\frac{dy}{dx} = 3\sin^2 2x.(\sin 2x)' = 3.\sin^2 2x.2.\cos 2x = 6\sin^2 2x.\cos 2x$ bulunur.

ÖRNEK $f(x) = \frac{1+\sin x^3}{3+\sin x}$ ise **$f'(0)$ kaçtır?**

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \frac{(3x^2.\cos x^3).(3+\sin x) - \cos x(1+\sin x^3)}{(3+\sin x)^2} \text{ olur.}$$

$$f'(0) = \frac{0.(3+0) - 1.(1-0)}{(3+0)^2} = \frac{-1}{9} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $f: R - \{k\pi\} \to R - (-1,1)$ $f(x) = \operatorname{cosec} x$ foksiyonunun tanımlı ve türevli olduğu **x değerleri için $f'(x)$ nedir?**

ÇÖZÜM $f(x) = \cos ec x = \frac{1}{\sin x}$ dir.

$$f'(x) = \frac{(1)'.\sin x - (\sin x)'.1}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = \underbrace{\frac{-1}{\sin x}}_{-\cos ec x} \cdot \underbrace{\frac{\cos x}{\sin x}}_{\cot x} \text{ dir.}$$

buna göre, $\boxed{\mathbf{f(x) = cosecx \;\; ise \;\; f'(x) = -cosecx.cotx}}$ dir.

ÖRNEK $f: R \to R$, $f(x) = x^n.\sin x$ ise **$f'(x)$ nedir?**

ÇÖZÜM $f'(x) = nx^{n-1}.\sin x + \cos x.x^n$ bulunur.

ÖRNEK $R \to R$, $f(x) = \sin(ax + b)^n$ ise **$f'(x)$ nedir?**

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \left[(ax+b)^n\right]'.\cos(ax+b)^n \text{ dir.}$$

$$= n(ax+b)^{n-1}(a).\cos(ax+b)^n \text{ ve}$$

$$= a.n.(ax+b)^{n-1}.\cos(ax+b)^n \text{ bulunur.}$$

KOSİNÜS FONKSİYONUNUN TÜREVİ

TEOREM: **$f(x) = \cos u(x)$ ve $u(x)$, x in bir fonksiyonu olmak üzere,**

$f'(x) = -u'(x).\sin u(x)$ dir.

İSPAT: $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$ olduğunu ispatlamıştık.

$f(x) = \cos u(x) \Rightarrow f'(x) = -u'(x).\sin u(x)$ olduğunu **türevde zincir kuralına** göre yazabiliriz.

ÖRNEK $y = \cos(6x+7)$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ **nedir?**

ÇÖZÜM $\dfrac{dy}{dx} = -(6x+7)'.\sin(6x+7) = -6.\sin(6x+7)$ bulunur.

ÖRNEK $R \to R,\ f(x) = \cos^3 x^3 \Rightarrow f'(x) = 3\cos^2 x^3.(\cos x^3)'$

$= 3\cos^2 x^3.(-3x^2.\sin x^3)$

$= -9x^2.\cos^2 x^3.\sin x^3$ bulunur.

ÖRNEK $f: R - \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\} \to R - \{-1,1\}$, $f(x) = \sec x$ ile tanımlı fonksiyonun **türevini bulunuz.**

ÇÖZÜM $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ olduğundan,

$$f'(x) = \frac{(1)'.\cos x - (\cos x)'.(1)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\sec x} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{\cos x}}_{\tan x} \text{ olur. Buradan}$$

$\boxed{f(x) = \sec x \text{ ise } f'(x) = \sec x \cdot \tan x}$ elde edilir.

ÖRNEK $f: R \to R,\ f(x) = \cos^n(g(x))$ fonksiyonunun türevi **$f'(x)$ nedir?**

ÇÖZÜM $f'(x) = n \cdot \cos^{n-1}(g(x)) \cdot [-g'(x) \cdot \sin g(x)]$ olur.

ÖRNEK $f(x) = \sqrt{x} \cdot \cos x \Rightarrow f'(\pi)$ **kaçtır?**

ÇÖZÜM $f(x) = \sqrt{x}.\cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (\sqrt{x})'.\cos x + (\cos x)'.\sqrt{x}$

$\Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos x - \sin x \sqrt{x}$ olur.

$\Rightarrow \quad f'(\pi) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \cos \pi - \sin \pi.\sqrt{\pi}$

$\Rightarrow \quad f'(\pi) = \dfrac{-1}{2\sqrt{\pi}}$ bulunur.

ÖRNEK $f: R \to R,\ f(x) = \sin 3x.\cos 2x$ ise $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ **kaçtır?**

ÇÖZÜM $f'(x) = 3\cos 3x.\cos 2x - 2\sin 2x.\sin 3x$

$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 3 \cdot \cos\dfrac{\pi}{2} \cdot \cos\dfrac{\pi}{3} - 2\sin\dfrac{\pi}{3} \cdot \sin\dfrac{\pi}{2}$

$= 3 \cdot 0 \cdot \dfrac{1}{2} - 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1$

$= -\sqrt{3}$ bulunur.

TANJANT FONKSİYONUNUN TÜREVİ

KURAL: **$u_{(x)}$, x in bir fonksiyonu olmak üzere,**

$A \subset R$, $f: R \to R$, $f(x) = \tan u(x)$ veriliyor. f nin tanımlı olduğu $\forall u(x) \in A$ için

$f(x) = \tan u(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x)\left(1+\tan^2 u(x)\right)$ veya

$$\boxed{= \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)} = u'(x).\sec^2 u(x)}$$ **dir.**

İSPAT: $f(x) = \tan u(x) = \dfrac{\sin u(x)}{\cos u(x)}$ olduğundan;

$$f'(x) = \frac{u'(x).\cos u(x).\cos u(x) + u'(x).\sin u(x).\sin u(x)}{\cos^2 u(x)}$$

$$= \frac{u'(x).\cos^2 u(x) + u'(x).\sin^2 u(x)}{\cos^2 u(x)} \text{ olur.}$$

$$= \frac{u'(x)\left(\cos^2 u(x) + \sin^2 u(x)\right)}{\cos^2 u(x)}$$

$= u'(x)\left(1+\tan^2 u(x)\right)$ bulunur. $\quad 1+\tan^2 x = \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ olduğundan

$$= \frac{u'(X)}{\cos^2 u(x)} = u'(x)\sec^2 u(x) \text{ dir.}$$

ÖRNEK

$k \in Z$, $f: R - \left\{\dfrac{\pi}{2}k\right\} \to R$, $f(x) = \tan x$ $(k \in z)$ fonksiyonu için **$f'(x)$ nedir?**

ÇÖZÜM

$y = \tan u(x) \Rightarrow y' = u'(x)\left(1+\tan^2 u(x)\right)$ idi.

$f(x) = \tan x$ için $u(x) = x$, $u'(x) = 1$ dir. Buradan

$$\boxed{f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = 1+\tan^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}$$ bulunur.

ÖRNEK

$f: R - \left\{\dfrac{\pi}{2}k\right\} \to R$ $\quad f(x) = x^2 \tan 2x$ fonksiyonu için **$f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ kaçtır?**

ÇÖZÜM

$f(x) = x^2 \tan 2x \Rightarrow f'(x) = 2x.\tan 2x + 2\left(1+\tan^2 2x\right)x^2$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\cdot\frac{\pi}{8}\cdot\tan\frac{\pi}{4} + 2\left(1+\tan^2\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 = \frac{\pi}{4} + 4\cdot\frac{\pi^2}{64} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{16}$$

$$= \frac{4\pi+\pi^2}{16} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$f(x) = \tan^2(\sin 3x + 1)$ veriliyor. Türevli olduğu x değerleri için **$\dfrac{df(x)}{dx}$ nedir?**

ÇÖZÜM

$$\frac{df}{dx} = 2\tan(\sin 3x+1)\left[1+\tan^2(\sin 3x+1)\right]\cdot 3\cdot\cos(3x)$$

$$= 2\tan(\sin 3x+1).3.\cos(3x)\left[1+\tan^2\sin(3x+1)\right]$$

$$= 6\tan(\sin 3x+1).\cos(3x)\left[1+\tan^2\sin(3x+1)\right]$$

ÖRNEK

$\dfrac{d}{dx}\left(x^3\tan x^3\right)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\tan x^3\right) = 3x^2.\tan x^3 + 3.x^2.\left(1+\tan^2 x^3\right).x^3 = 3x^2\left[\tan x^3 + x^3\left(1+\tan^2 x^3\right)\right] \text{ olur.}$$

KOTANJANT FONKSİYONUN TÜREVİ

KURAL: $A \subset R,\ f : A \to R$ $f(x) = \cot u(x)$ **veriliyor. f nin tanımlı olduğu** $\forall u(x) \in A$ **için,**

$$f(x) = \cot u(x) \Rightarrow f'(x) = -u'(x)\left(1 + \cot^2 u(x)\right)$$

$$= \frac{-u'(x)}{\sin^2(u(x))} = -u'(x).\text{cosec}^2 u(x) \quad \text{dir.}$$

$f(x) = \dfrac{\cos u(x)}{\sin u(x)}$ yazarak bölümün türevini ve bileşke fonksiyonun türevini $y = \tan u(x)$ deki gibi uygulayınız.

ÖRNEK Tanımlı olduğu x değerleri için $f(x) = y = \cot x$ ise **$f'(x)$ nedir?**

ÇÖZÜM $f(x) = \cot(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ dir. bölümün türevi uygulanırsa;

$$f'(x) = \frac{-\sin x.\sin x - \cos x.\cos x}{\sin^2 x} \text{ olur.}$$

$$= \frac{-\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}{\sin^2 x} = -\left(1 + \cot^2 x\right) \qquad 1 + \cot^2 x = \text{cosec}^2 x \text{ olduğundan}$$

$$\boxed{f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -(1 + \cot^2 x) = -\text{cosec}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $y = \cot(\cos x + 1)$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ in **tanımlı olduğu değerleri için eşiti nedir?**

ÇÖZÜM $y = \cot f(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -f'(x)\left(1 + \cot^2 f(x)\right)$ olduğundan

$$y = \cot(\cos x + 1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -(\cos x + 1)'.\left[1 + \cot^2(\cos x + 1)\right]$$

$$= \sin x.\left[1 + \cot^2(\cos x + 1)\right] \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $y = (x.\cot x)^2$ veriliyor. $\dfrac{dy}{dx}$ in $x = \dfrac{\pi}{4}$ **için değeri nedir?**

ÇÖZÜM $\dfrac{dy}{dx} = 2.x.\cot x.\left(1.\cot x - (1 + \cot^2 x).x\right)$

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ için, } x = 2.\frac{\pi}{4}\cdot\cot\frac{\pi}{4}\left[\cot\frac{\pi}{4} - \left(1 + \cot^2\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{2}\cdot\left[1 - (1 + 1^2)\cdot\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4}$$

ÖRNEK $y = \cot^3(\cot x)$ ise **y' nedir?**

ÇÖZÜM $y' = 3\cot^2(\cot x)(-1(1+\cot^2 x)) \Rightarrow y' = -3\cot^2(\cot x)(1+\cot^2 x)$

ÖRNEK $y = \cot\left(\sqrt{2x+1}\right)$ ise **y' nedir?**

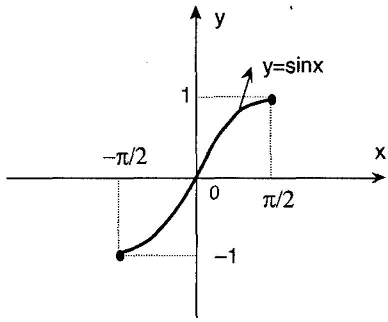
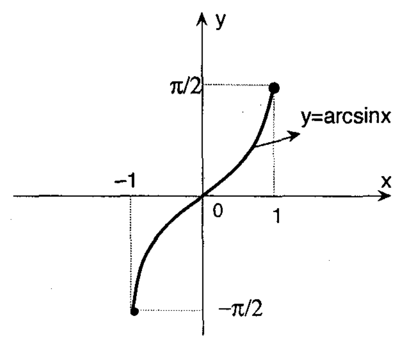
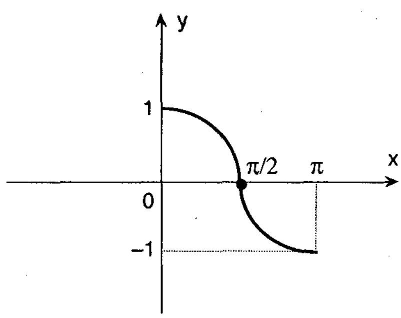
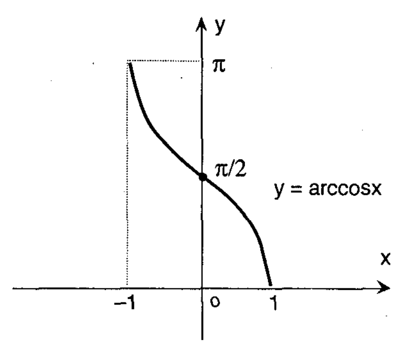
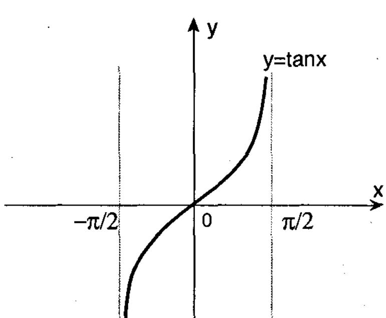
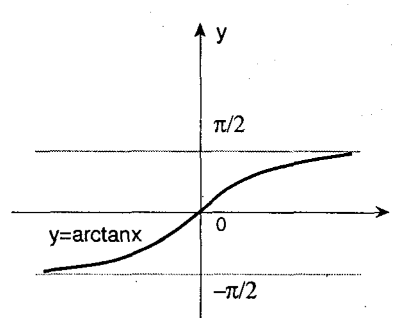
ÇÖZÜM $y = -\left(\dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}}\right)\cdot\left(1 + \cot^2\left(\sqrt{2x+1}\right)\right)$

AŞAĞIDAKİ TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVLERİNİ ALINIZ.

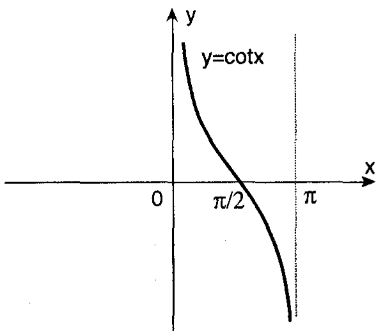
SORULAR	YANITLAR
1) $y = x\sin^3 x$	$\sin^3 x + 3x\sin^2 x \,.\, \cos x$
2) $y = \sin\dfrac{x}{2}$	$\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$
3) $y = \sin^5 3x$	$15.\sin^4 3x\cos 3x$
4) $y = \sqrt{\sin x}$	$\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$
5) $y = \cos\left(1-x^3\right)$	$3x^2 \cdot \sin\left(1-x^3\right)$
6) $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x^2}}$	$\dfrac{\cos x \cdot \cos x^2 + x\sin x \cdot \sin x^2}{\left(\cos x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$
7) $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$	$\dfrac{\cos^2 x + 1}{2(\cos x)^{\frac{3}{2}}}$
8) $y = 8\sin^3 2x \cdot \cos^3 2x$	$12\cos 4x.\sin^2 4x$
9) $y = \sin^2(\cos x)$	$-\sin x.\sin(2\cos x)$
10) $y = \cos(\sin x)$	$-\cos x.\sin(\sin x)$
11) $y = \dfrac{\cos x^2}{\cos x}$	$\dfrac{-2x\sin x^2\cos x + \sin x\cos x^2}{\cos^2 x}$
12) $y = \tan(\cos x)$	$\dfrac{-\sin x}{\cos^2(\cos x)}$
13) $y = \tan^3(x+1)$	$3\tan^2(x+1)\cdot\left(1+\tan^2(x+1)\right)$
14) $y = \cot(\cos x)$	$\sin x\left(1+\cot^2(\cos x)\right)$
15) $y = \cos^2(\cot x)$	$\sin(2\cot x)(1+\cot^2 x)$
16) $y = \sin^3 x^2$	$6x\sin^2 x^2 \cos x^2$
17) $y = \sin(x^3+1)$	$3x^2\cos(x^3+1)$
18) $y = \dfrac{\cos^2 x - 1}{\sin x}$	$-\cos x$
19) $y = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$	$\dfrac{1}{1-\sin x}$
20) $y = \tan^3(\pi x)$	$3\pi\left(\tan^2(\pi x)\right)\cdot\left(1+\tan^2(\pi x)\right)$

TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

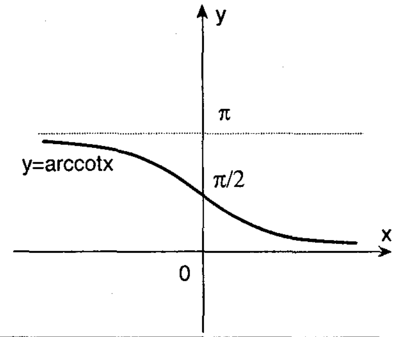
Trigonometrik fonksiyonların türevlerine geçmeden önce tanım ve değer kümeleri belirtilerek tüm trigonometrik fonksiyonlar ve terslerinin grafikleri aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. Tabloyu ve arkasından yapılan örnekleri dikkatle izleyerek trigonometri bilgilerinizi tazeleyiniz.

FONKSİYON	FONKSİYONUN TERSİ
1) $\sin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\xrightarrow[\text{örten}]{1-1}[-1,1]\; x \to \sin x \Rightarrow$ 	$\arcsin[-1,1]\xrightarrow[\text{örten}]{1-1}\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] x \to \arcsin x \Rightarrow$ 
2) $\cos[0,\pi]\xrightarrow[\text{örten}]{1-1}[-1,1]: x \to \cos x$ 	$\arccos[-1,1] \to [0,\pi] \Rightarrow x \to \arccos x$ 
3) $\tan\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\xrightarrow[\text{örten}]{1-1}R\; x \to \tan x$ 	$\arctan: R\xrightarrow[\text{örten}]{1-1}\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]: x \to \arctan x$ 

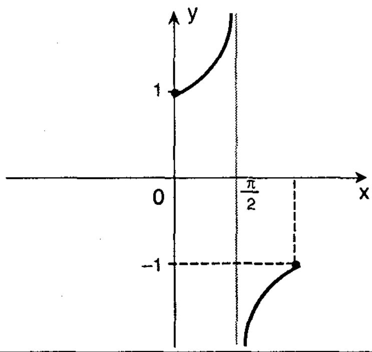
4) $\cot\left[0,\pi\right] \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} \mathbb{R}: x \to \cot x$



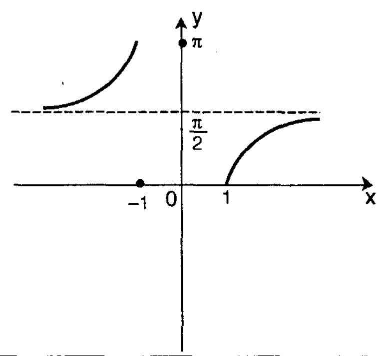
$\text{arccot}: \mathbb{R} \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} \left[0,\pi\right] x \to \text{arccot}\, x$



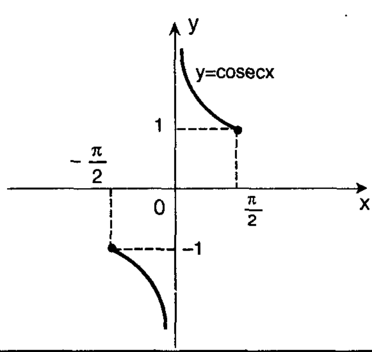
5) $\sec: \left[0,\pi\right] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} x \to \sec x$



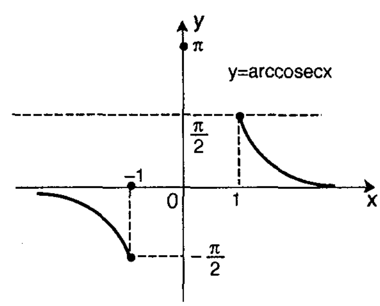
$\text{arcsec}\, x: \mathbb{R} \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} \left[0,\pi\right] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}\ x \to \text{arcsec}\, x$



6) $\text{cosec}\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} \mathbb{R}\quad x \to \text{cosec} x$



$\text{arccosec}: \mathbb{R} \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\quad x \to \text{arccosec} x$



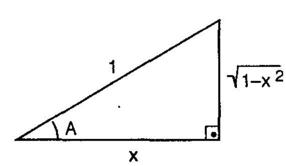
Şimdi ters trigonometrik fonksiyonlarla ilgili bazı örnekler yapalım.

ÖRNEK cot(arccosx) ifadesinin **x türünden eşitini bulunuz.**

ÇÖZÜM arccosx = A dersek cot(arccosx) = cot A olur.

arccosx = A ⇔ cosA = x olur.

Şekildeki dik üçgenden $\cot A = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ bulunur.



ÖRNEK $f(x)=\dfrac{x+2}{\arcsin x}$ fonksiyonunun **en geniş tanım kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM arcsinx fonksiyonunun tanım kümesi $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ idi.

Ayrıca; arcsinx = 0 ⇔ için, fonksiyon tanımsız olacağından en geniş tanım kümesi = A ise

$$A=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\{0\} \text{ veya}$$

$$A=\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right] \text{ olur.}$$

ÖRNEK $f(x)=\sqrt{\arctan x}$ fonksiyonunun **en geniş tanım kümesi nedir?**

ÇÖZÜM $y=\sqrt{f(x)}$ şeklindeki fonksiyonlar $f(x)\geq 0$ için tanımlı olduğundan $\arctan x\geq 0$ olmalıdır.

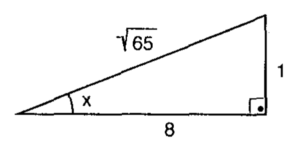
$x\geq 0 \Rightarrow 0\leq \arctan x<\dfrac{\pi}{2}$ eşitsizliğinin her iki yanının tanjantını alırsak;

$\tan 0\leq \underbrace{\tan(\arctan x)}_{0<x<\infty}<\tan\dfrac{\pi}{2}$ en geniş tanım kümesi = A ⇒ $A=R^{+}\cup\{0\}$ bulunur.

ÖRNEK arccot8 = x ise **cosx nedir?**

ÇÖZÜM arcot8 = x ⇔ cotx = 8

$\cot x=8\Rightarrow 0<x<\dfrac{\pi}{2}$



Şekildeki dik üçgenden; $\cos x=\dfrac{8}{\sqrt{65}}$ bulunur.

ÖRNEK $A=\tan(\arctan x)+\cot(\operatorname{arccot} x)-\arcsin(\sin x)-\arccos(\cos x)$ ise **A nedir?**

ÇÖZÜM $(fof^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=I(x)=I$ olduğundan,

$$\begin{array}{r} \tan(\arctan x)=x \\ \cot(\operatorname{arccot} x)=x \\ \arcsin(\sin x)=x \\ \arccos(\cos x)=x \end{array} \quad \begin{bmatrix} \tan\leftrightarrow f & ; & \arctan\leftrightarrow f^{-1} \\ \cot\leftrightarrow f & ; & \operatorname{arccot}\leftrightarrow f^{-1} \\ \sin\leftrightarrow f & ; & \arcsin\leftrightarrow f^{-1} \\ \cos\leftrightarrow f & ; & \arccos f^{-1} \end{bmatrix}$$

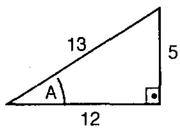
Buna göre $A=x+x-x-x\Rightarrow A=0$ olur.

ÖRNEK

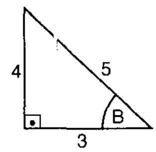
$\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{4}{5}\right)=x$ ise **x kaçtır?**

ÇÖZÜM

$\arcsin\frac{5}{13}=A \Leftrightarrow \sin A=\frac{5}{13}$ ve $\arcsin\frac{4}{5}=B \Leftrightarrow \sin B=\frac{4}{5}$ dir.



$\cos A=\frac{12}{13}$ ve



$\cos B=\frac{3}{5}$ olur.

$$\sin\left(\underbrace{\arcsin\frac{5}{13}}_{A}+\underbrace{\arcsin\frac{4}{5}}_{B}\right)=\sin(A+B)$$

$$=\sin A.\cos B+\cos A.\sin B \quad \text{dir.}$$

$$=\frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5}+\frac{12}{13}\cdot\frac{4}{5}=\frac{63}{65} \quad \text{bulunur.}$$

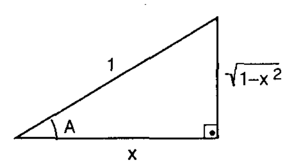
ÖRNEK

sin(arccosx) ifadesinin **eşitini x türünden bulunuz.**

ÇÖZÜM

$\arccos x=A \Leftrightarrow \cos A=x$ bu durumda;

Şekildeki üçgenden $\sin(\arccos x)=\sin A=\sqrt{1-x^2}$ bulunur.



y = arcsinf(x) FONKSİYONUNUN TÜREVİ

KURAL: $\mathbf{y=\arcsin f(x) \Rightarrow y'=\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}}$ **dir.**

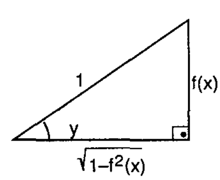
İSPAT: $y=\arcsin f(x) \Leftrightarrow \sin y=f(x)$ eşitliğinin her iki yanının x e göre türevini türevde zincir kuralına göre alırsak;

$$\frac{d}{dx}(\sin y)=\frac{d}{dx}f(x)$$

$$y'\cos y=f'(x)$$

$$y'=\frac{f'(x)}{\cos y}$$

$$y'=\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} \quad \text{olduğu görülür.}$$



şekildeki üçgende

$\cos y=\sqrt{1-f^2(x)}$

ÖRNEK $y = \arcsin x$ ise $\mathbf{y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ **olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM $y = \arcsin f(x) \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$ idi.

$y = \arcsin x$ için $f(x) = x$ ve $f'(x) = 1$ dir. Bu değerler yerlerine yazılırsa

$y = \arcsin x$ ise $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ olduğu görülür.

ÖRNEK $y = \arcsin\left(x^3+1\right)$ ise $\mathbf{\dfrac{dy}{dx}}$ **nedir?**

ÇÖZÜM Teoremi kullanarak; $\dfrac{dy}{dx} = y' = \dfrac{\left(x^3+1\right)'}{\sqrt{1-\left(x^3+1\right)^2}} = \dfrac{3x^2}{\sqrt{1-\left(x^3+1\right)^2}}$ bulunur.

ÖRNEK $y = x.\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ fonksiyonu için $\mathbf{\dfrac{dy}{dx}}$**i bulunuz.**

ÇÖZÜM $\dfrac{dy}{dx} = 1.\arcsin x + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x + \dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}$

$\dfrac{dy}{dx} = \arcsin x + \dfrac{\cancel{x}}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{\cancel{x}}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \arcsin x$ bulunur.

ÖRNEK $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ ise **f'(0) kaçtır?**

ÇÖZÜM $f'(x) = \dfrac{\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \dfrac{1.\sqrt{1+x^2} - \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot x}{(1+x^2)\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}}$ x yerine 0 yazılarak f'(0) bulunur.

f'(0)= 1 dir.

ÖRNEK $y = \arcsin(\sin x)$ ise $\mathbf{\dfrac{dy}{dx}}$ **nedir?**

ÇÖZÜM $fof^{-1} = f^{-1}of = I$ ve $I(x) = x$ olduğundan; $y = \arcsin(\sin x) \Rightarrow y = x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 1$ bulunur.

ÖRNEK $y = \arcsin \dfrac{x}{a}$ ise $\mathbf{\dfrac{dy}{dx}}$**i bulunuz.**

ÇÖZÜM $y = \arcsin \dfrac{x}{a} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(\dfrac{x}{a}\right)'}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{1}{a}}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}} \Rightarrow \dfrac{\dfrac{1}{a}}{\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{a^2}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

UYARI: Elde ettiğimiz bu sonucu integral konusunda kullanacağız.

ÖRNEK

$f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to R,\ y=f(x)=x\cdot\arcsin x$ ise $\tan\left[f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ **kaçtır?**

ÇÖZÜM

$\arcsin\frac{1}{2}=a\Rightarrow \sin a=\frac{1}{2}$

$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ olduğundan $a=\frac{\pi}{6}$ olur

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$

$f'(x)=(x').\text{arcssinx}+(\arcsin x)'.x$

$$f'(x)=1.\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot x\Rightarrow f'(x)=\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\arcsin\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}+\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$$

$$\tan\left(f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1 \text{ bulunur.}$$

y = arccosf(x) FONKSİYONUNUN TÜREVİ

KURAL: **y = arccosf (x) ise** $y'=\dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$ **dir.**

İSPAT: y = sinf(x) fonksiyonunun türevi ispatında izlenen yol ile yapılmak üzere ispatı okuyucuya bırakıyoruz.

ÖRNEK

y = arccosx ise $y'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ **olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM

y = arccosx ⇔ x = cosy eşitliğin her iki yanının x e göre türevini türevde zincir kuralına göre alırsak,

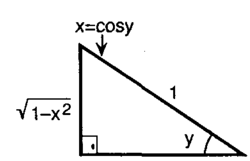
$$\frac{d}{dx}(x)=\frac{d}{dx}(\cos y)$$

$$1=y'(-\sin y)$$

$$y'=\frac{-1}{\sin y} \text{ olur.}$$

şekildeki dik üçgende,

$\sin y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1}$ dir.



böylece; $y=\arcsin x$ ise $y'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ olduğu görülür.

ÖRNEK

$y=\arccos(2x+1)$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ **nedir?**

ÇÖZÜM

$y=\arccos f(x)$ ise $y'=\dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$ olduğundan

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(2x+1)'}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}=\frac{-2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $a>0$ olmak üzere, $y=f(x)=x.\sqrt{a^2-x^2}-a^2.\arccos\frac{x}{a}$ ise $\frac{dy}{dx}$ **in x=0 için değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$$\frac{dx}{dy}=(x)'.\sqrt{a^2-x^2}+\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)'.x-a^2.\left(\arccos\frac{x}{a}\right)'$$

$$=1.\sqrt{a^2-x^2}-\frac{2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot x-\frac{a^2.\left(-\frac{x}{a}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2\frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}}$$

$$=\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}}-\underset{(1)}{\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}+\underset{(1)}{\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}=\frac{a^2-x^2-x^2+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\frac{2\left(a^2-X^2\right)}{\sqrt{a^2-x^2}}=2\sqrt{a^2-x^2}\quad \text{bulunur.}$$

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=2\sqrt{a^2-x^2}\Rightarrow f'(0)=2\sqrt{a^2-0^2}=2\sqrt{a^2}=2a\quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK $f(x)=\dfrac{1}{\arccos\left(\frac{1}{x}\right)}$ ise **f′(2) kaçtır?**

ÇÖZÜM

$$f'(x)=\frac{(1)'.\arccos\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\arccos\frac{1}{x}\right)'\cdot 1}{\left(\arccos\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{-\left[-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}}{\left(\arccos\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(\arccos\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$f'(2)=\frac{-\frac{1}{2^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{2^2}}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)^2}\Rightarrow f'(2)=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi^2}{9}}=-\frac{3\sqrt{3}}{2\pi^2}\left(\arccos\frac{1}{2}=a\Rightarrow\cos a=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{\pi}{3}\right)$$

ÖRNEK $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ olmak üzere, $y=\arccos(\sin x)$ ise $\frac{dy}{dx}$ **i bulunuz.**

ÇÖZÜM $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-(\sin x)'}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\dfrac{-\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}}=\dfrac{-\cos x}{\cos x}=-1$ bulunur.

ÖRNEK $y=\arccos\sqrt{x}$ ise $\frac{dy}{dx}$ **i bulunuz.**

ÇÖZÜM $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$ olur.

y = arctanf(x) FONKSİYONUNUN TÜREVİ

KURAL: **y = arctan f(x) ise** $y' = \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$ **dir.**

İSPAT: y = arctan f(x) $\Leftrightarrow$ tany = f(x) dir. Eşitliğin her iki yanının x e göre türevini **türevde zincir kuralına** göre alırsak

$$\frac{d}{dx}(\tan y) = \frac{d}{dx}\left(f(x)\right)$$

$$y'\left(1+\tan^2 y\right) = f'(x) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{1+\tan^2 y} \text{ olur.}$$

tany = f(x) yerine yazılarak; $y' = \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$ bulunur.

ÖRNEK y = arctanx ise $\dfrac{dy}{dx}$ **i bulunuz.**

ÇÖZÜM y = arctanf(x) ise $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$ dir.

f(x) = x olduğundan f′(x) = 1 olur. Buna göre,

$y = \arctan x$ ise $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$ olduğu görülür.

ÖRNEK $y = \arctan(\sin x)$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ **nedir?**

ÇÖZÜM $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$ olur.

ÖRNEK $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ise **f′(3) nedir?**

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} \Rightarrow f'(3) = \frac{-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}} = \frac{-\frac{1}{9}}{\frac{10}{9}} = -\frac{1}{10} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $y = x.\arctan x^3$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ **i bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$y = x.\arctan x^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1.\arctan x^3 + \frac{3x^2}{1+\left(x^3\right)^2}\cdot x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \arctan x^3 + \frac{3x^3}{1+x^6} \text{ olur.}$$

ÖRNEK f(x) = tanx ise $\left(f^{-1}\right)'(1)$ **kaçtır?**

ÇÖZÜM–1 f(x) = tanx $\Rightarrow$ $f^{-1}(x)$ = arctanx dir.

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

ÇÖZÜM–2 $f(x) = y = \tan x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ $\qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ idi.

$f'(x) = 1 + \tan^2 x$ $\qquad \left(f^{-1}\right)'(1) = \dfrac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{1+\tan^2\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

y = arccotf(x) FONKSİYONUNUN TÜREVİ

KURAL: $y = \text{arccot} f(x) \Rightarrow y' = -\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$ **dir.**

İSPAT: y = arctanf(x) fonksiyonunda izlenen yoldan yapılmak üzere okuyucuya bırakılmıştır.

ÖRNEK y = arccotx ise $\dfrac{dy}{dx}$ **i bulunuz.**

ÇÖZÜM y = arccotx ⇔ x = coty dir.

x = tany eşitliğinin her iki yanının x e göre türevini alırsak

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\cot y)$$

$$1 = y'\left(-\left(1+\cot^2 y\right)\right)$$

$y' = \dfrac{-1}{1+\cot^2 y}$ öte yandan x = coty olduğundan

$y = \text{arccot}\, x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{1+x^2}$ olduğu görülür.

ÖRNEK $y = \text{arc}\cot\left(\dfrac{x}{3}\right)$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ **nedir?**

ÇÖZÜM

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\left(\frac{x}{3}\right)'}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{x^2}{9}} = \frac{-3}{9+x^2}$$

ÖRNEK y = arccot(sinx) ise $\dfrac{dy}{dx}$ **nedir?**

ÇÖZÜM $y = \dfrac{-(\sin x)'}{1+\sin^2 x} = \dfrac{-\cos x}{1+\sin^2 x}$

ÖRNEK y = sin(arccotx) ise $\dfrac{dy}{dx}$ **nedir?**

ÇÖZÜM $y' = (\text{arccot}x)'.\cos(\text{arccot}x) \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{1+x^2}\cdot\cos(\text{arc}\cot x)$

ÖRNEK y = x.arccotx ise $\dfrac{dy}{dx}$ **nedir?**

ÇÖZÜM

$$\frac{dy}{dx} = 1\cdot\text{arc}\cot x + \frac{-1}{1+x^2}\cdot x$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{arc}\cot x - \frac{x}{1+x^2}$$

AŞAĞIDAKİ TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVLERİNİ ALINIZ.

	SORULAR	YANITLAR
1)	$y = x\arcsin x$	$\arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
2)	$y = \arcsin\left(\dfrac{x-1}{3}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+2x+8}}$
3)	$y = \arcsin\dfrac{x}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$
4)	$y = \arcsin x + \arccos x$	0
5)	$y = \dfrac{1}{4}\arccos\dfrac{4x}{5}$	$\dfrac{-1}{\sqrt{25-16x^2}}$
6)	$y = x\arccos 2x$	$\arccos 2x - \dfrac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}$
7)	$y = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$	$2\sqrt{1-x^2}$
8)	$y = x\sqrt{4-x^2} + 16\arccos\dfrac{x}{2}$	$\dfrac{-2x^2-12}{\sqrt{4-x^2}}$
9)	$y = \arcsin\dfrac{x}{3} + \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}$	$-\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}$
10)	$y = \dfrac{1}{3}\arctan\dfrac{x}{3}$	$\dfrac{1}{x^2+9}$
11)	$y = \dfrac{\arctan x}{x}$	$\dfrac{x-(x^2+1)\cdot\arctan x}{x^4+x^2}$
12)	$y = \arctan 3x^2$	$\dfrac{6x}{1+9x^4}$
13)	$y = \dfrac{1}{6}\arctan\dfrac{2x}{3}$	$\dfrac{1}{4x^2+9}$
14)	$y = \text{arccot}\,(\cos x)$	$\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$
15)	$y = \arctan(\sin x)$	$\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$
16)	$y = \arctan\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$	$\dfrac{1}{x^2+1}$
17)	$y = \arctan\left(\sqrt{x}\right)$	$\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x}+x\sqrt{x}\right)}$
18)	$y = \sin(\arctan x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}\cdot\cos(\arctan x)$
19)	$y = \arctan 3$	0
20)	$y = \arcsin\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

LOGARİTMİK VE ÜSTEL FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

Logaritmik ve üstel fonksiyonların türevlerini görmeden bu fonksiyonların tanımlarını ve özelliklerini hatırlatalım.

LOGARİTMA FONKSİYONU

TANIM: 1) $f: R^+ \to R$, $f(x) = \log_a x$ biçiminde tanımlanan fonksiyona logaritma fonksiyonu denir. ($a > 0$ ve $a \neq 1$)

2) $e \cong 2{,}71828$ sayısını taban seçtiğimizde $\log_e x = \ln x$ olmak üzere

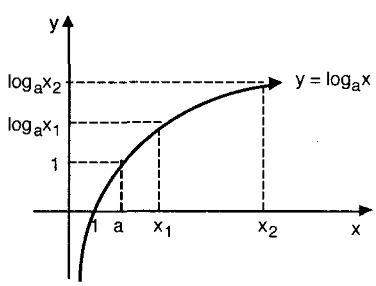
$f : R^+ \to R$, $f(x) = \ln x$

biçiminde tanımlanan fonksiyona doğal logaritma fonksiyonu denir.

Logaritma Fonksiyonunun Grafiği:

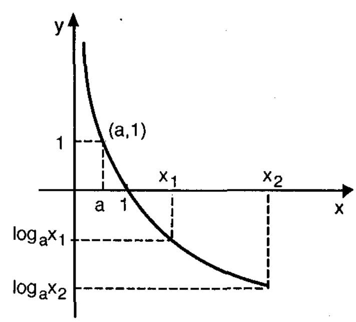
1) $a > 1$

$y = \log_a x$ in grafiği



2) $0 < a < 1$ ise

$y = \log_a x$ in grafiği



Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri:

1) $\log_a A + \log_a B = \log_a A.B$

2) $\log_a A - \log_a B = \log_a \dfrac{A}{B}$

3) $\log_a x^n = n\log_a x$

4) $\log_a A = \log_a B \Leftrightarrow A = B$

Logaritma fonksiyonu 1–1 dir.

5) $\forall y_0 \in R$ için $y_0 = \log_a x_0$ olacak şekilde $x_0 \in R^+$ vardır.

Logaritma fonksiyonu örtendir.

6) $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunda

a) $a > 1$ ise, $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

Logaritma fonksiyonu artandır.

b) $0 < a < 1$ ise, $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$ dir.

Logaritma fonksiyonu azalandır.

7) $a > 1$ ise $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ ve $\lim\limits_{x \to \infty} \log_a x = +\infty$

$0 < a < 1$ ise $\lim\limits_{x \to \infty} \log_a x = -\infty$ ve $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$ dır.

8) $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

9) $\log_a a = 1 \qquad \log_a 1 = 0$

$\ln e = 1 \qquad \ln 1 = 0$

10) $\log_a b = \dfrac{\log_x b}{\log_x a} = \dfrac{\log b}{\log a}$ dır.

11) $\log_a b . \log_b a = 1$ ve $\log_a b . \log_b c = \log_a c$ dir.

12) $a^{\log_a x} = x$ ve $e^{\ln x} = x$ dir.

13) Logaritma fonksiyonu tanım aralığı olan $(0, +\infty)$ da süreklidir.

14) Logaritma fonksiyonu 1–1 ve örtendir. Tersi vardır.

$f: R^+ \to R \qquad f(x) = \log_a x$ ise $f^{-1}: R \to R^+ \qquad f^{-1}(x) = a^x$ dir.

ÖRNEK

$f(x) = \ln\sqrt{9 - x^2}$ **fonksiyonunun <u>en geniş</u> tanım kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

Doğal logaritma fonksiyonu R^+ da tanımlıdır.

$9 - x^2 > 0$ olmalıdır.

$9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \mp 3$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
g(x)		$-$		$+$		$-$	

En geniş tanım kümesi A ise $A = (-3, 3)$ dür.

ÖRNEK

Aşağıdaki ifadeleri daha basit ifadelere dönüştürünüz.

a) $e^{\ln x}$ **b)** $\ln e^{\frac{1}{x}}$ **c)** $\ln e^{-x^3}$ **d)** $\ln\left(\dfrac{1}{e^x}\right)$

e) $2^{\log_2 4x}$ **f)** $e^{\ln 5 + \ln x}$ **g)** $\ln\left(e^{x^2 - x}\right)$ **h)** $\ln\left(x^2 . e^{-2x}\right)$

k) $\ln 2 + \ln 10 - \ln 20$

ÇÖZÜM

a) $e^{\ln x} = x$

b) $\ln e^{\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{x} \ln e = \dfrac{1}{x}$

c) $\ln e^{-x^3} - x^3 . \ln e = -x^3$

d) $\ln\left(\dfrac{1}{e^x}\right) = \ln e^{-x} = -x . \ln e = -x$

e) $2^{\log_2 4x} = 4x$

f) $e^{\ln 5 + \ln x} = e^{\ln 5x} = 5x$

g) $\ln\left(e^{x^2 - x}\right) = (x^2 - x) \ln e = x^2 - x$

h) $\ln(x^2 . e^{-2x}) = \ln x^2 + \ln e^{-2x} = 2\ln x - 2x = 2(\ln x - x)$

k) $\ln 2 + \ln 10 - \ln 20 = \ln 2.10 - \ln 20 = \ln \dfrac{20}{20} = 0$ olur.

LOGARİTMİK FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

TEOREM: $a \in R^+$ **ve** $a \neq 1$ **olmak üzere,**

$$f : R^+ \to R \quad f(x) = \log_a x \text{ ise } f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e \text{ dir.}$$

İSPAT:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$\frac{h}{x} = k$ alınırsa $h \to 0$ için $k \to 0$ olur. Bu durumda;

$$f'(x) = \lim_{k\to 0}\frac{\log_a(1+k)}{k.x} = \frac{1}{x}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{\log_a(1+k)}{k}$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\cdot\log_a(1+k) = \frac{1}{x}\cdot\lim_{k\to 0}\left(\log_a(1+k)^{\frac{1}{k}}\right) \text{ bulunur.}$$

$\frac{1}{k} = n$ alınırsa $k \to 0$ için $n \to \infty$ olur.

$$f'(x) = \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\left(\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \frac{1}{x}\log_a\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$ olduğundan; $f'(x) = \frac{1}{x}\cdot\log_a e$ bulunur.

UYARI: $f(x)$ türevlenebilen bir fonksiyon ise

1) $y = \log_a f(x)$ ise $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}\log_a e = \frac{f'(x)}{f(x)\ln a}$

2) $y = \ln f(x)$ ise $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ dir.

ÖRNEK $y = \ln(x^2+3)$ ise $\frac{dy}{dx}$ **i bulunuz.**

ÇÖZÜM $y = \ln f(x)$ ise $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$ kuralını uygularsak

$y = \ln(x^2+3)$ ise $f(x) = x^2+3$ $f'(x) = 2x$ ve $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2+3}$ bulunur.

ÖRNEK $y = \ln\sin x$ $\frac{dy}{dx}$ **i bulunuz.**

ÇÖZÜM $\frac{dy}{dx} = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$ bulunur.

ÖRNEK $y = \log_5(3x^4 + x^2)$ ise $\frac{dy}{dx}$**i bulunuz.**

ÇÖZÜM $y = \log_a f(x)$ ise $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)} \log_a e$ dir.

$y = \log_5(3x^4 + x^2)$ ise $f(x) = 3x^4 + x^2$ ve $f'(x) = 12x^3 + 2x$ dir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12x^3 + 2x}{3x^4 + x^2} \cdot \log_5 e \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{12x^3 + 2x}{\left(3x^4 + x^2\right)\ln 5} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $y = \ln \cot x$ ise $\frac{dy}{dx}$ in $x = \frac{\pi}{4}$ **için değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM $\ln \frac{A}{B} = \ln A - \ln B$ olduğundan;

$$y = \ln \cot x \Rightarrow y = \ln \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \ln \cos x - \ln \sin x$$

$$y' = \frac{(\cos x)'}{\cos x} - \frac{(\sin x)'}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{-\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow y' = -\tan x - \cot x$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} - \cot\frac{\pi}{4} \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 - 1 = -2 \text{ olur.}$$

ÖRNEK $y = x + \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ fonksiyonunun $x = 0$ **daki teğetinin eğimi kaçtır?**

ÇÖZÜM

$$y' = 1 + \frac{\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]'}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} \Rightarrow y' = 1 + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} \Rightarrow y' = 1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Rightarrow$$

$$y'_0 = 1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = 1 + \tan\frac{\pi}{4} = 1 + 1 = 2 \text{ olur.}$$

ÖRNEK $y = \ln \tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right)$ ise $\frac{dy}{dx}$ **in** $x = \frac{\pi}{3}$ **için değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$$y' = \frac{\left[\tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right)\right]'}{\tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right)} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2}\left[1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right)\right]}{\tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right)}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2}\left[1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3.2}\right)\right]}{\tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3.2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\left[1 + \tan^2\frac{\pi}{3}\right]}{\tan\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}(1+3)}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ÖRNEK $y = \ln\left[\left(x^3+5x\right)\cdot\left(2x^2+8\right)\right]$ ise **y′(1) kaçtır?**

ÇÖZÜM lnA.B = lnA + lnB olduğundan;

$y = \ln(x^3+5x)(2x^2+8) \Rightarrow y = \ln(x^3+5x) + \ln(2x^2+8)$

$$y' = \frac{(x^3+5x)'}{x^3+5x} + \frac{\left(2x^2+8\right)'}{2x^2+8}$$

$$y' = \frac{3x^2+5}{x^3+5x} + \frac{4x}{2x^2+8}$$

$$y'(1) = \frac{8}{6} + \frac{4}{10} \Rightarrow y'(1) = \frac{4}{3} + \frac{2}{5} = \frac{26}{15}$$ bulunur.

ÖRNEK $y = \ln\dfrac{x^5}{(5x-7)^3}$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ **in x = 1 için değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM $\ln\dfrac{A}{B} = \ln A - \ln B$ olduğundan;

$$y = \ln\frac{x^5}{(5x+7)^3} \Rightarrow y = \ln x^5 - \ln(5x-7)^3$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\left(x^5\right)'}{x^5} - \frac{\left[(5x-7)^3\right]'}{(5x-7)^3} \Rightarrow y' = \frac{5x^4}{x^5} - \frac{3(5x-7)^2 5}{(5x-7)^3}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{5}{x} - \frac{15}{5x-7}$$

x = 1 için; $y'(1) = \dfrac{5}{1} - \dfrac{15}{5-7} \Rightarrow y'(1) = 5 + \dfrac{15}{2} \Rightarrow y'(1) = \dfrac{25}{2}$ bulunur.

ÖRNEK $y = \ln\dfrac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$ ise $\dfrac{dy}{dx}$**in x = 0 için değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM $\ln\dfrac{A}{B} = \ln A - \ln B$ olduğundan;

$$y = \ln\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} \Rightarrow y = \ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) - \ln\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)$$ olur.

$$y' = \frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)'}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - \frac{\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)'}{1-\tan^2\frac{x}{2}} \Rightarrow y' = \frac{0+2\cdot\tan\frac{x}{2}\cdot\left(\tan\frac{x}{2}\right)'}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - \frac{0-2\cdot\tan\frac{x}{2}\cdot\left(\tan\frac{x}{2}\right)'}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$y' = \frac{2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{x}{2}} + \frac{\tan\frac{x}{2}\cdot\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$y'(0) = \frac{0.(1+0^2)}{1+0^2} + \frac{0.(1+0^3)}{1-0} \Rightarrow y'(0) = 0$$ bulunur.

ÜSTEL FONKSİYON

TANIM: **$a \in R^+$ ve $a \neq 1$ olmak üzere,**

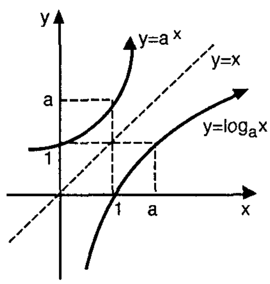
$f : R \to R^+$, $f(x) = a^x$

biçiminde tanımlanan fonksiyona üstel fonksiyon denir.

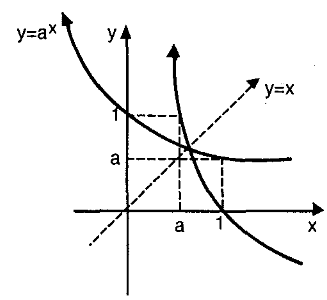
Üstel Fonksiyonun Grafiği:

Üstel fonksiyon logaritma fonksiyonunun tersi olduğundan iki fonksiyonun grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.

$a > 0$ ise



$0 < a < 1$ ise



ÖRNEK $f(x) = 5^{\log_3(x^2+2x)}$ fonksiyonunun **en geniş tanım kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM log fonksiyonu R^+ da tanımlı olduğundan;

$x^2 + 2x > 0$ olmalıdır.

$x(x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -2$

en geniş tanım kümesi A ise

$A = R - [-2, 0]$ dir.

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
x^2+2x	+	0	−	0	+

ÜSTEL FONKSİYONUN TÜREVİ

TEOREM: **$a \in R^+$, $a \neq 1$ olmak üzere,**

$f: R^+ \to R$, $f(x) = y = a^x$ ise $y' = a^x.\ln a$ dır.

İSPAT: $y = a^x$ eşitliğinin her iki tarafının doğal logaritmasını alalım.

$\ln y = \ln a^x$

$\ln y = x \ln a$ olur.

eşitliğin her iki tarafının x e göre türevini alırsak

$$\frac{y'}{y} = 1.\ln a + 0.x$$

$$\frac{y'}{y} = \ln a \Rightarrow y' = y.\ln a \Rightarrow y' = a^x \ln a \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK $y = 3^x$ ise $\frac{dy}{dx}$ **i bulunuz**

ÇÖZÜM $y = a^x$ ise, $\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$ olduğundan;

$y = 3^x$ ise $\frac{dy}{dx} = 3^x \ln 3$ olur.

ÖRNEK $y = e^x$ ise $\frac{dy}{dx}$ **i bulunuz.**

ÇÖZÜM $y = e^x$ ise $y' = a^x \ln a$ kuralına göre türev alırsak,

$\frac{dy}{dx} = e^x \ln e = e^x$ olur. O halde

$y = e^x$ ise $y' = e^x$ dir.

KURAL: **$a \in R^+$, $a \neq 1$ ve $f(x)$ türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere**

$y = a^{f(x)}$ ise $y' = a^{f(x)}.f'(x).\ln a$ dır.

İSPAT: $y = a^{f(x)}$ eşitliğinin her iki tarafının doğal logaritmasını alalım.

$\ln y = \ln a^{f(x)}$

$\ln y = f(x).\ln a$ olur.

Şimdide her iki tarafın x e göre türevini alırsak,

$\frac{y'}{y} = f'(x).\ln a + 0.f(x)$

$\frac{y'}{y} = f'(x).\ln a \Rightarrow y' = y.f'(x).\ln a$

$\Rightarrow y = a^{f(x)}.f'(x).\ln a$ bulunur.

ÖRNEK $y = e^{f(x)}$ eşitliğinde $f(x)$ türevlenebilen bir fonksiyon olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ **i bulunuz.**

ÇÖZÜM $y = e^{f(x)}$ eşitliğinin her iki tarafının önce doğal logaritmasını sonra x e göre türevini alırsak,

$\ln y = \ln e^{f(x)} \Rightarrow \ln y = f(x).\ln e$ $\qquad \ln e = 1$

$\ln y = f(x)$

$\frac{y'}{y} = f'(x) \Rightarrow y' = y.f'(x)$ olur. Buradan

$\boxed{y = e^{f(x)} \text{ ise } y' = \frac{dy}{dx} = f'(x).e^{f(x)}}$ bulunur.

ÖRNEK $y = 3^{\ln x^2}$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ **i bulunuz.**

ÇÖZÜM $y = a^{f(x)} \Rightarrow y' = f'(x).a^{f(x)}.\ln a$ olduğundan

$$y = 3^{\ln x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\ln x^2\right)'.3^{\ln x^2}.\ln 3 \text{ olur.}$$

$y = \ln f(x) \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ olduğundan

$\left(\ln x^2\right)' = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}$ bulunur. Yerine yazarsak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} \cdot 3^{\ln x^2} \cdot \ln 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\ln 3.3^{\ln x^2}}{x} \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK $y = 2^{\sin^3 x}$ ise $\dfrac{dy}{dx}$**i bulunuz.**

ÇÖZÜM $y = a^{f(x)} \Rightarrow y' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$ kuralını yine uygularsak,

$$y = 2^{\sin^3 x} \Rightarrow y' = \left(\sin^3 x\right)'.2^{\sin^3 x}.\ln 2 \text{ olur.}$$

$\left(\sin^3 x\right)' = 3\sin^2 x.\cos x$ yerine yazılarak

$$\frac{dy}{dx} = y' = 3\sin^2 x.\cos x.2^{\sin^3 x}.\ln 2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $y = x^2.5^{x^2}$ ise, $\dfrac{dy}{dx}$i bulunuz

ÇÖZÜM

$$\frac{dy}{dx} = (x^2)'5^{x^2} + (5^{x^2})'.x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \cdot 5^{x^2} + 2x \cdot 5^{x^2} \cdot \ln 5 \cdot x^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x.5^{x^2}(1 + x^2 \cdot \ln 5) \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $y = 5^{\ln x^2}$ ise **y' nedir?**

ÇÖZÜM $y' = (\ln x^2)'.5^{\ln x^2} \ln 5$

$$y' = \frac{2x}{x^2} \cdot 5^{\ln x^2} \cdot \ln 5$$

$$y' = \frac{2}{x} \cdot 5^{\ln x^2} \cdot \ln 5$$

ÖRNEK $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x}$ ise **y′ nedir?**

ÇÖZÜM $y=2^{-\cos x}$ ise $y'=(-\cos x)'.2^{-\cos x}.\ln 2$

$y'=-(-\sin x).2^{-\cos x}.\ln 2$

$y'=\sin x.2^{-\cos x}.\ln 2$

ÖRNEK $y=(5)^{3^x}$ ise **y′ nedir?**

ÇÖZÜM $y=a^{f(x)} \Rightarrow y'=f'(x).a^{f(x)}.\ln a$ kuralına göre çözüm yapılarak

$a=5,\ f(x)=3^x \Rightarrow f'(x)=1.3^x.\ln 3$

$y'=3^x.\ln 3.(5)^{3^x}.\ln 5 \Rightarrow y'=15^x.\ln 3.\ln 5$

ÖRNEK $y=e^{e^x}$ ise **y′ nedir?**

ÇÖZÜM $y=e^{f(x)} \Rightarrow y'=e^{f(x)}.f'(x)$ olduğundan

$f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x$ dir.

$y=e^{e^x} \Rightarrow y'=e^{e^x}.e^x$ olur.

ÖRNEK $y=(2)^{2^{x^2}}$ ise **y′ nedir?**

ÇÖZÜM $y=a^{f(x)} \Rightarrow y'=a^{f(x)}.f'(x).\ln a$ olduğundan, $a=2,\ f(x)=2^{x^2}$ alınırsa $f'(x)=2^{x^2}.2x.\ln 2$ olur.

$\Rightarrow y'=(2)^{2^{x^2}}.2^{x^2}.2x.\ln 2.\ln 2$

$\Rightarrow y'=2^{2^{x^2}}2^{x^2}.2x.\ln^2 2$ bulunur.

LOGARİTMA YARDIMIYLA TÜREV ALMA

KURAL: **$y=f(x)^{g(x)}$ biçiminde verilen fonksiyonun türevini alalım.**

$A=B \Leftrightarrow \ln A=\ln B$ olduğundan; **$\ln y=\ln f(x)^{g(x)}$**

$\ln f(x)^{g(x)}=g(x).\ln f(x)$ olduğundan; **$\ln y=g(x).\ln f(x)$**

her iki tarafın x göre türevini alırsak; $\frac{y'}{y}=g'(x).\ln f(x)+\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot g(x)$

y ile eşitliğin her iki yanını çarparsak; $y'=y.\left[g'(x).\ln f(x)+\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot g(x)\right]$ **olur.**

O halde,

$$y=f(x)^{g(x)} \text{ ise } y'=f(x)^{g(x)}\left[g'(x).\ln f(x)+\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot g(x)\right]$$

Not: *Çerçeve içerisinde verilen kuralı ezberlemek gerekmez. Kuralın elde edilişinde olduğu gibi türevi* 4 adımda alabiliriz.

ÖRNEK $y = x^x$ ise **y' nedir?**

ÇÖZÜM $\ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x\ln x \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = \ln x + \dfrac{1}{x}\cdot x \Rightarrow y' = x^x(\ln x + 1)$

ÖRNEK $y = (\ln x)^{\sin x}$ ise **y' nedir?**

ÇÖZÜM $\ln y = \ln(\ln x)^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x.\ln(\ln x) \Rightarrow$

$\dfrac{y'}{y} = \cos x\cdot\ln(\ln x) + \dfrac{1}{x\cdot\ln x}\cdot\sin x$ olur ve $y' = (\ln x)^{\sin x}\left[\cos x\cdot\ln(\ln x) + \dfrac{\sin x}{x\cdot\ln x}\right]$ bulunur.

ÖRNEK $y = (\cos x)^{\sin x}$ ise **y' nedir?**

ÇÖZÜM $y = \cos x^{\sin x} \quad\Rightarrow\quad \ln y = \ln\cos x^{\sin x}$

$\ln y = \sin x.\ln\cos x$ her iki yanın x e göre türevi alınırsa

$$\frac{y'}{y} = \cos x.\ln\cos x + \frac{(\cos x)'}{\cos x}\cdot\sin x$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x.\ln\cos x + \frac{-\sin x}{\cos x}\cdot\sin x$$

$$y' = \cos x^{\sin x}\left(\cos x.\ln\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$$

ÖRNEK $y = (x^2+2)^3.(1-x^3)^4$ ise $\dfrac{dy}{dx}$**i logaritma yardımıyla türev alarak bulunuz.**

ÇÖZÜM $\ln A.B = \ln A + \ln B$ ve $\ln A^n = n\ln A$ olduğundan;

$y = (x^2+3)^3.(1-x^3)^4 \quad\Rightarrow\quad \ln y = \ln(x^2+3)^3\,.\,(1-x^3)^4$

$\Rightarrow\quad \ln y = \ln(x^2+3)^3 + \ln(1-x^3)^4$

$\Rightarrow\quad \ln y = 3.\ln(x^2+3) + 4\ln(1-x^3)$ olur.

her iki yanın x e göre türevi alınırsa;

$$\frac{y'}{y} = 3\cdot\frac{2x}{x^2+3} + 4\cdot\frac{-3x^2}{1-x^3}$$

$$y' = y\cdot\left[\frac{6x}{x^2+3} - \frac{12x^2}{1-x^3}\right]$$

$$y' = (x^2+2)^3.(1-x^3)^4\left[\frac{6x}{x^2+2} - \frac{12x^2}{1-x^3}\right]$$

dağılma özelliği uygulanarak;

$$y' = 6x(x^2+2)^2.(1-x^3)^3\,(1-4x-3x^3) \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $y=\sqrt{\dfrac{2^{x+1}}{(x+3)(x+4)}}$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ **i logaritma yardımıyla türev alarak bulunuz.**

ÇÖZÜM $\ln y=\ln\sqrt{\dfrac{2^{x+1}}{(x+3)(x+4)}} \Rightarrow \ln y=\ln\left(\dfrac{2^{x+1}}{(x+3)(x+4)}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \ln y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2^{x+1}}{(x+3)(x+4)}$.

$\ln y=\dfrac{1}{2}\left[\ln 2^{x+1}-\ln(x+3)-\ln(x+4)\right]$ iki yanın x e görü türevini alırsak

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left[\ln 2-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right]$$

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2^{x+1}}{(x+3)(x+4)}}\cdot\left[\ln 2-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right] \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $y=x^{(x^x)}$ ise $\dfrac{dy}{dx}$**i bulunuz.**

ÇÖZÜM $y=x^{(x^x)} \quad\Rightarrow\quad \ln y=\ln x^{(x^x)}$

$\Rightarrow \quad \ln y=x^x.\ln x$ her iki yanın x e göre türevi alınırsa

$\Rightarrow \quad \dfrac{y'}{y}=(x^x)'.\ln x+(\ln x)'.x^x$ olur. (1)

$u=x^x$ alalım $\ln u=\ln x^x \Rightarrow \ln y=x.\ln x$

$$\frac{u'}{u}=(x').\ln x+(\ln x)'.x \Rightarrow \frac{u'}{u}=1.\ln x+\frac{1}{x}\cdot x$$

$(x^x)'=u'=x^x(\ln x+1)$ olur. Bu değeri (1) eşitliğinde yerine yazalım.

$$\frac{y'}{y}=x^x(\ln x+1)\ln x+\frac{1}{x}\cdot x^x$$

$$\frac{y'}{y}=x^x(\ln x+1).\ln x+x^{x-1}$$

$$y'=x^{(x^x)}\left[x^x(\ln x+1)\ln x+x^{x-1}\right] \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $y=(e^x)^{e^{x^2}}$ ise **y′ nedir?**

ÇÖZÜM–1 $\ln y=\ln(e^x)^{e^{x^2}} \quad\Rightarrow\quad \ln y=e^{x^2}.\ln e^x$

$\ln e^x=x \quad\Rightarrow\quad \ln y=e^{x^2}.x$

$\Rightarrow \quad \dfrac{y'}{y}=2x.e^{x^2}.x+1.e^{x^2}$

$\Rightarrow \quad y'=(e^x)^{e^{x^2}}\left[2x^2.e^{x^2}+e^{x^2}\right]$ bulunur.

ÇÖZÜM–2 $(x^m)^n=x^{m.n}$ olduğundan;

$y=(e^x)^{e^{x^2}} \quad\Rightarrow\quad y=y=e^{x.e^{x^2}}$

$y'=(xe^{x^2})'e^{x.e^{x^2}} \Rightarrow y'=\left(e^{x^2}+2x.e^{x^2}\right).e^{x.e^{x^2}}$ bulunur.

AŞAĞIDAKİ LOGARİTMİK VE ÜSTEL FONKSİYONLARIN TÜREVLERİNİ BULUNUZ.

SORU		YANIT
1)	$y=\dfrac{\ln x}{x}$	$y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$
2)	$y=\ln\left(\cot\dfrac{x}{2}\right)$	$y'=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(1+\cot^2\dfrac{x}{2}\right)}{\cot\dfrac{x}{2}}$
3)	$y=\ln\left(\cos^2 x\right)$	$y'=-2\tan x$
4)	$y=\ln(\tan x)$	$y'=\dfrac{1+\tan^2 x}{\tan x}$
5)	$y=\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$	$y'=\dfrac{-4x}{x^4-1}$
6)	$y=\log_3(\cos x)$	$y'=\dfrac{-\tan x}{\ln 3}$
7)	$y=\log\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$	$y'=\dfrac{-3}{(x+1)\cdot(x-2)\ln 10}$
8)	$y=2^{x^3+4}$	$y'=2^{x^3+4}\cdot\left(3x^2\right)\cdot\ln 2$
9)	$y=x3^{x+1}$	$y'=3^{x+1}(1-x\ln 3)$
10)	$y=x^3e^{x^3}$	$y'=3x^2e^{x^3}\left(1+x^3\right)$
11)	$y=\ln x.e^{-x}$	$y'=e^{-x}\left(\dfrac{1}{x}-\ln x\right)$
12)	$y=\dfrac{e^x}{e^{-x}+e^x}$	$y'=\dfrac{2}{\left(e^{-x}+e^x\right)^2}$
13)	$y=\left(e^{e^x}\right)^2$	$y'=2\left(e^{e^x}\right)^2\cdot e^x$
14)	$y=e^x(x^2-2x+2)$	$y'=e^x.x^2$
15)	$y=e^x\left(x^3-3x^2-6x+6\right)$	$y'=e^x\left(x^3-12x\right)$
16)	$y=x.e^{-x}$	$y'=e^{-x}(1-x)$
17)	$y=\ln 5^x$	$y'=\ln 5$
18)	$y=\ln e^{x^2}$	$y'=2x$
19)	$y=\ln e^{e^x}$	$y'=e^x$
20)	$y=e^{\ln\left(x^2+5x+1\right)}$	$y'=2x+5$

PARAMETRİK FONKSİYONLAR

TANIM: **$y = f(x)$ foksiyonunun grafiği üzerindeki bir A noktasının (x, y) olan koordinatları t parametresinin**

$x = f(t)$; $y = g(t)$ gibi

fonksiyonları olarak verilmişse $x = f(t)$, $y = g(t)$ denklemlerine $y = f(x)$ in parametrik denklemi denir.

Bu denklemler t yok edilerek $y = f(x)$ şeklinde yazılabiliyorsa elde edilen bu denkleme de eğrinin kartezyen denklemi denir.

UYARI: $x = f(t)$ ve $y = g(t)$ parametrik denklemlerinden t yok edilerek $y = f(x)$ şeklinde yazılamayabilir.

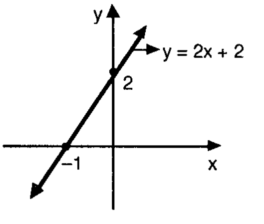
ÖRNEK

$x = t + 2$ ve $y = 2t + 6$ parametrik fonksiyoları ile verilen fonksiyonun **kartezyen denklemini yazarak grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

$t = x - 2 \Rightarrow y = 2(x-2) + 6 = 2x + 2$

$y = f(x) = 2x + 2$ nin grafiği



ÖRNEK

a, b, r ∈ R olmak üzere,

$x = r\cos\theta + a$

$y = r\sin\theta + b$

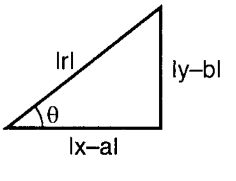
parametrik denklemleri ile verilen fonksiyonun kartezyen denklemini yazarak grafiği çiziniz.

ÇÖZÜM

$x = r\cos\theta + a \Rightarrow r\cos\theta = x - a \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{x-a}{r}$

$y = r\sin\theta + b \Rightarrow r\sin\theta = y - b \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{y-b}{r}$ elde edilir.

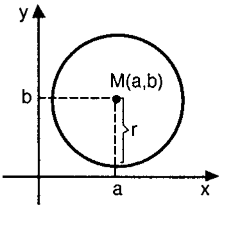
$\cos\theta = \dfrac{x-a}{r}$, $\sin\theta = \dfrac{y-b}{r}$ $\Rightarrow$



Pisagor teoremine göre

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ denklemi merkezi M(a, b) yarıçapı r olan çemberdir.



PARAMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

KURAL: **$x = f(t)$ ve $y = g(t)$ parametrik denklemleri ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi türevde zincir kuralına göre**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad \textbf{olur.}$$

ÖRNEK $x = t^2 - t,\ y = 3t^3 + t^2$ parametrik fonksiyonlarına göre $\frac{dy}{dx}$ **nedir?**

ÇÖZÜM

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{9t^2 + 2t}{2t - 1} \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK $x = 2\cos\theta$, $y = 2\sin\theta$ parametrik fonksiyonlarına göre, $x = 1$ için $\frac{dy}{dx}$ **değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$x = 1 \Rightarrow 2\cos\theta = 1$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{olur.}$$

$$x = 2\cos\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta$$

$$y = 2\sin\theta \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = 2\cos\theta \text{ dir.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{2\cos\theta}{-2\sin\theta} = -\cot\theta \quad \text{olur.}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ için } \left.\frac{dy}{dx}\right]_{\frac{\pi}{3}} = -\cot\frac{\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{3} \quad \text{bulunur}$$

ÖRNEK $x = \sqrt{t}$, $y = 2t - \frac{4}{\sqrt{t}}$ parametrik denklemleri ile verilen eğrinin $t = 4$ deki teğetinin denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$x = \sqrt{t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \qquad y = 2t - \frac{4}{\sqrt{t}} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2 + \frac{2}{\sqrt{t^3}}$$

$$t = 4 \Rightarrow x = 2, \qquad y = 8 - \frac{4}{\sqrt{4}} \Rightarrow y = 6 \text{ olur.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2 + \frac{2}{\sqrt{t^3}}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}$$

$$m_T = \left.\frac{dy}{dx}\right]_{t=4} = \frac{2 + \frac{2}{\sqrt{4^3}}}{\frac{1}{2\sqrt{4}}} = 9$$

$A(x_1 y_1)$ noktasından geçen ve eğimi m olan doğrunun denklemi $y - y_1 = m(x - x_1)$ dir.

Buna göre;

$$y - 6 = 9(x - 2)$$

$$y = 9x - 12 \quad \text{bulunur.}$$

PARAMETRİK FONKSİYONLARIN II. TÜREVLERİ

KURAL: $\begin{matrix} x = f(t) \\ y = g(t) \end{matrix}$ **parametrik denklemleri ile verilen y = f(x) fonksiyonu için**

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$ **dır.**

ÖRNEK

$x = 3t^2 + 1$, $y = 2t + 3$ parametrik denklemleri ile verilen fonksiyon için $\frac{dy}{dx}$ ve $\frac{d^2y}{dx^2}$ **yi bulunuz.**

ÇÖZÜM

$x = 3t^2 + 1 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 6t$ ve $y = 2t + 3 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2$ olur.

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{6t} = \frac{1}{3t}$ bulunur.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$ olduğundan; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3t}\right)\cdot\frac{1}{6t} = \frac{-1}{18t^3}$ bulunur.

ÖRNEK

$x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ parametrik fonksiyonları veriliyor. $\frac{dy}{dx}$ **ve** $\frac{d^2y}{dx^2}$ **yi bulunuz.**

ÇÖZÜM

$x = t - \sin t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$ $\quad$ $y = 1 - \cos t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \sin t$ dir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \text{ olur.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\cdot\left(\frac{\sin t}{1 - \cos t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos t.(1 - \cos t) - \sin t.\sin t}{(1 - \cos t)^2}\cdot\frac{1}{1 - \cos t}$$ ($\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ olduğundan)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos t - \cos^2 t - 1 + \cos^2 t}{(1 - \cos t)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{(1 - \cos t)^2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $x=\sqrt{a}$ ve $y=a^2$ parametrik denklemleri ile verilen fonksiyon için $\frac{dy}{dx}$ ve $\frac{d^2y}{dx^2}$ **yi bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$x=\sqrt{a}\Rightarrow\frac{dx}{da}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\qquad y=a^2\Rightarrow\frac{dy}{da}=2a$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2a}{\frac{1}{2\sqrt{a}}}=4a\sqrt{a}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{da}\left(4a\sqrt{a}\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{a}}}$$

$$=4\cdot\frac{3}{2}\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot 2\sqrt{a}$$

$$=12a \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $x=e^t.\cos t$, $y=e^t.\sin t$ parametrik fonksiyonları veriliyor. $\frac{d^2y}{dx^2}$ **yi bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$y=e^t.\sin t\Rightarrow\frac{dy}{dt}=e^t.\sin t+\cos t.e^t=e^t(\sin t+\cos t)$$

$$x=e^t.\cos t\Rightarrow\frac{dx}{dt}=e^t.\cos t-\sin t.e^t=e^t(\cos t-\sin t)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t(\sin t+\cos t)}{e^t(\cos t-\sin t)}=\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} \text{ olduğundan;}$$

$$\frac{d^2y}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}\right)\cdot\frac{1}{e^t(\cos t-\sin t)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\cos t-\sin t)(\cos t-\sin t)-(-\sin t-\cos t)(\sin t+\cos t)}{(\cos t-\sin t)^2}\cdot\frac{1}{e^t(\cos t-\sin t)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2}{(\cos t-\sin t)^2}\cdot\frac{1}{e^t(\cos t-\sin t)} \text{ olur.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1-2\sin t.\cos t+1+2\sin t.\cos t}{e^t(\cos t-\sin t)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3} \text{ bulunur.}$$

KAPALI FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

F(x, y) = 0 bağıntısında en az bir y = g(x) fonksiyonu tanımlanabiliyorsa, F(x, y) bağıntısına **y nin x e göre kapalı fonksiyonu** denir.

F(x, y) = 0 bağıntısı verilsin.

$F'_x(x,y)$ F(x, y) x e göre türevini (y sabit)

$F'_x(x,y)$ F(x, y) nin y ye göre türevini (x sabit) ve

y'_x, y nin x e göre türevi olmak üzere

F(x, y) = 0 bağıntısında her iki tarafın x e göre türevi alınırsa,

$F'_x(x,y) + F'_y(x,y).y'_x = 0$ olur.

Sonuç olarak $\boxed{y'_x = -\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}}$ bulunur.

UYARI: F(x,y) = 0 bağıntısından $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$ bulunurken çoğunlukla yukarıda elde edilen genel sonucu kullanmak bize zaman kazandırır. Ancak

1. F(x,y) = 0 bağıntısından y = g(x) şeklinde bir fonksiyon bulmak mümkün ise y, x cinsinden çekilip x, e göre türev alınarak $y'_x = g'(x)$ bulunabilir.
2. F(x,y) = 0 bağıntısında her terim x e göre türev alınarak y'_x elde edilebilir.

ÖRNEK $F(x,y) = x^3 + y^3 + 5xy = 0$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ **nedir?**

ÇÖZÜM $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\dfrac{3x^2+5y}{3y^2+5x}$ bulunur.

ÖRNEK $F(x,y) = x.y - (x+y)^2 = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}$ **nedir?**

ÇÖZÜM $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = \dfrac{y-2(x+y)}{x-2(x+y)}$ bulunur.

ÖRNEK $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ **nedir?**

ÇÖZÜM $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{2y}{3}} = -\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{3}{2y} = -\dfrac{3x}{4y}$ dir.

ÖRNEK $F(x,y) = \sin x + \cos y - xy = 0$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ **nedir?**

ÇÖZÜM $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\dfrac{\cos x - y}{-\sin y - x} = \dfrac{\cos x - y}{\sin y + x}$ olur.

ÖRNEK $x^2 + 3xy + y^3 = 0$ ise **y'_x nedir?**

ÇÖZÜM–1 $F(x,y) = x^2 + 3xy + y^3 = 0$ olsun.

$F'_x(x,y) = 2x + 3y$ (x e göre türev y sabit)

$F'_y(x,y) = 3x + 3y^2$ (y ye göre türev x sabit)

$y'_x = \dfrac{-F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$ olduğundan $y'_x = \dfrac{-(2x+3y)}{3x+3y^2}$ bulunur.

ÇÖZÜM–2 $x^2 + 3xy + y^3 = 0$ bağıntısında her terimin x e göre türevini alalım ve y yi x in bir fonksiyonu olarak düşünelim.

$2x + 3y + 3xy'_x + 3y^2y'_x = 0$

$3xy'_x + 3y^2y'_x = -2x - 3y$

$y'(3x + 3y^2) = -2x - 3y \Rightarrow y'_x = -\dfrac{2x+3y}{3x+3y^2}$ bulunur.

ÖRNEK $F(x,y) = 5x^3y + 7y^2x - 10y - 2 = 0$ bağıntı ile verilen fonksiyonun **A(1,1) noktasındaki türevini bulunuz.**

ÇÖZÜM İşlemlerde kolaylık sağladığı için; $y'_x = \dfrac{-F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$ i kullanalım.

$$y'_x = \frac{-(15x^2y + 7y^2)}{5x^3 + 14xy - 10} \Rightarrow y'_{(x)} = -\frac{15x^2y + 7y^2}{5x^3 + 14xy - 10} \Rightarrow y'_{(1)} = \frac{15.1^2.1 + 7.1^2}{5.1^3 + 14.1 - 10}$$

$$\Rightarrow y'_{(1)} = \frac{22}{9} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $x^2y^2 = \cos(2x + y)$ bağıntısıyla verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun üzerindeki **$A\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?**

ÇÖZÜM $F(x,y) = x^2y^2 - \cos(2x + y) = 0$ olsun

$$y'_x = \frac{-F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \Rightarrow y'_x = \frac{-(2xy^2 + 2.\sin(2x+y))}{2x^2y + \sin(2x+y)}$$

$$y'_{\left(\frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 0^2 + \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4} + 0\right)\cdot 2}{2\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot 0 + \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4} + 0\right)}$$

$$y'_{\left(\frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{2}{1} = -2 = m_{\text{Teğet}} \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\dfrac{x}{y} + \ln y - 2 = 0$ bağıntısında **$y = 1$ için $\dfrac{dy}{dx}$ kaçtır?**

ÇÖZÜM $y = 1$ için $\dfrac{x}{1} + \ln 1 - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ olur.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{y} + 0 - 0}{-\frac{x}{y^2} + \frac{1}{y} - 0} \Rightarrow \frac{dy}{dx}(1,2) = \frac{-\left(\frac{1}{1} + 0 - 0\right)}{\frac{-2}{1^2} + 1 - 0} = \frac{-1}{-1} = 1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $ax^2 + xy + 2ay^2 = 28b$ eğrisinin A(2,3) noktasındaki teğetinin eğimi $-\frac{1}{2}$ olduğuna göre **a kaçtır?**

ÇÖZÜM $F(x,y) = ax^2 + xy + 2ay^2 - 28b = 0$

$$\frac{dy}{dx}(x,y) = \frac{-(2ax+y)}{x+4ay} \Rightarrow \frac{dy}{dx}(2,3) = -\frac{2a.2+3}{2+4a.3} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{4a+3}{2+12a} = \frac{1}{2} \Rightarrow 8a+6 = 2+12a \Rightarrow a = 1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $y^2 = 2x + 1$ ve $y^2 = -2x + 1$ eğrilerinin **dik kesiştiklerini gösteriniz.**

ÇÖZÜM Önce iki eğrinin kesişme noktalarını sonra kesişme noktalarındaki türevlerini alarak teğetlerin eğimlerini bulalım. Teğetlerinin eğimlerini m_{T_1}, m_{T_2} alarak; $m_{T_1}.m_{T_2} = -1$ olduğunu gösterelim.

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= 2x+1 \\ y^2 &= -2x+1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2x+1 &= -2x+1 \\ 4x = 0 &\Rightarrow x = 0 \end{aligned} \qquad x = 0 \Rightarrow \begin{aligned} y^2 &= 1 \\ y &= \mp 1 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Kesişme noktaları;

A(0,1) ve B(0,–1) dir.

$$y^2 = 2x+1 \Rightarrow y^2 - 2x - 1 = 0 \qquad \frac{dy}{dx}(x,y) = -\frac{-2}{2y}$$

$$m_{T_1} = \frac{dy}{dx}(0,1) = \frac{+2}{2} = +1$$

$$y^2 = -2x+1 \Rightarrow y^2 + 2x - 1 = 0 \qquad \frac{dy}{dx}(x,y) = -\frac{2}{2y}$$

$$m_{T_2} = \frac{dy}{dx}(0,1) = \frac{-2}{2} = -1 \text{ olur.}$$

$m_{T_1} \cdot m_{T_2} = 1.(-1) = -1$ olduğundan kesişme noktalarındaki teğetler diktir. Teğetlerin dik olması eğrilerin dik kesiştiklerini gösterir.

ÖRNEK $xy + y = 3$ eğrisinin **$x = 2$ deki teğetinin denklemini bulunuz.**

ÇÖZÜM Bu fonksiyonda y, x cinsinden yazılabilir.

$$xy + y = 3 \qquad y(x+1) = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{-3}{(x+1)^2}$$

$$m = y'_{(2)} = \frac{-3}{(3)^2} = -\frac{1}{3}$$

$$x = 2 \Rightarrow 2.y + y = 3 \Rightarrow \qquad y = 1$$

A(2, 1) $\qquad y - 1 = \frac{-1}{3}(x-2)$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + 1$$

Teğetin denklemi; $\qquad y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ olur.

YÜKSEK SIRADAN TÜREVLER

$y = f(x)$ fonksiyonunun bir x apsisli noktasında türevi varsa, **f′ ye f nin birinci sıradan türevi,**

y', f nin türevlendiği bir noktada türevlenebiliyorsa, $(f')' = f''$ **ye f nin ikinci sıradan türevi,**

f'', f' nün türevlendiği bir noktada türevlenibiyorsa, $(f'')' = f'''$ **nün üçüncü sıradan türevi** denir.

Şimdi bu tanımlara benzer bir biçimde aşağıdaki tanımı verelim.

TANIM: **f: R→R fonksiyonunun (n – 1) inci sıradan türevi varsa $f^{(n-1)}$ ile gösterilir.**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{n-1}(x+h)-f^{n-1}(x)}{h} = k$$ **ve $k \in R$ ise bu limite f nin n inci türevi denir. $f^{(n)}$ ile gösterilir.**

$y = f(x)$ *gibi bir fonksiyonun yüksek sıradan türevlerinin gösterimlerini aşağıdaki tabloda veriyoruz.*

Fonksiyon	İkinci sıradan türevi	Üçüncü sıradan türevi	Dördüncü sıradan türevi	Beşinci sıradan türevi	...	n inci sıradan türevi
f(x)	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(4)}_{(x)}$	$f^{(5)}_{(x)}$	...	$f^{(n)}_{(x)}$
f(x)	$D^{(2)}_{(x)}f$	$D^{(3)}_{(x)}f$	$D^{(4)}_{(x)}f$	$D^{(5)}_{(x)}f$	...	$D^{(n)}_{(x)}f$
f(x)	$\frac{d^2f}{dx^2}$	$\frac{d^3f}{dx^3}$	$\frac{d^4f}{dx^4}$	$\frac{d^5f}{dx^5}$	...	$\frac{d^nf}{dx^n}$
f(x)	y''	y'''	$y^{(4)}$	$y^{(5)}$	...	y^n
f(x)	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^4}{dx^4}$	$\frac{d^5y}{dx^5}$	...	$\frac{d^ny}{dx^n}$

ÖRNEK $y = (2x+5)^3$ fonksiyonu veriliyor. $\frac{d^3y}{dx^3}$ **nedir?**

ÇÖZÜM

$$\frac{dy}{dx} = 3(2x+5)^2.\underbrace{(2x+5)'}_{2} = 3.2(2x+5)^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[3.2.(2x+5)^2\right] = 3.2.2.(2x+5)\underbrace{(2x+5)'}_{2} = 3.2.2.2.(2x+5) = 3.2.2^2(2x+5)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[3.2.2^2(2x+5)\right] = 3.2.1.2^2.(2x+5)' = 3.2.1.2^3 = 3!.2^3 = 48$$

Sonuç: $y = (2x+5)^3 \Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = 3!2^3$

UYARI: $a, b \in R$ $n \in N^+$ olmak üzere,

$y = (ax+b)^n$ ise $\frac{d^ny}{dx^n} = n!a^n$ dir.

ÖRNEK $f: R \to R \quad f(x) = (4x+7)^5$ ise $\dfrac{d^5f}{dx^5}$ **nedir?**

ÇÖZÜM $f(x) = (ax+b)^n$ ise $\quad \dfrac{d^nf}{dx^n} = n!.a^n \quad n = 5,\ a = 4$

Kuralı uygulanırsa; $\quad \dfrac{d^5f}{dx^5} = 5!.4^5$ bulunur.

BAZI FONKSİYONLARIN YÜKSEK SIRADAN TÜREVLERİ

FONKSİYON $y = f(x)$	**n nci SIRADAN TÜREVİ** $\dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{df^n}{dx^n}$
x^n	$n!$
e^{ax}	$a^n e^{ax}$
$\sin(ax+b)$	$a^n.\sin\left(ax+b+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$
$\cos(ax+b)$	$a^n.\cos\left(ax+b+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$
LEİBNİTZ KURALI	
(u ve ϑ x in birer fonksiyonu olmak üzere) $u.\vartheta$	$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}u^{(r)}.\vartheta^{n-r}$ **Not:** $u^{(r)}$, **u nun x e göre r inci türevi,** v^{n-r}, **v nin x e göre n – r inci türevidir.** $u^0 = u,\ r^0 = r$ **dir.**

ÖRNEK $y = x^5$ ise $\dfrac{d^5y}{dx^5}$ **nedir?**

ÇÖZÜM $y = x^n \Rightarrow \dfrac{d^ny}{dx^n} = n!$ olduğundan;

$y = x^5 \Rightarrow \dfrac{d^5y}{dx^5} = 5! = 120$ olur.

ÖRNEK $y = f(x) = e^{3x}$ ise $f^{(6)}(x)$ **nedir?**

ÇÖZÜM $y = f(x) = e^{ax} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = a^n.e^{ax}$ olduğundan;

$y = f(x) = e^{3x} \quad \Rightarrow \quad f^{(6)}(x) = 3^6.e^{3x}$ dir.

ÖRNEK

$y = f(x) = \sin(2x+5)$ ise $\mathbf{f^{(10)}(x)}$ **nedir?**

ÇÖZÜM

$y = f(x) = \sin(ax+b) \quad \Rightarrow \quad f^{n}(x) = a^{n}.\sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$ olduğundan;

$y = f(x) = \sin(2x+5) \quad \Rightarrow \quad f^{(10)}(x) = 2^{10}.\sin\left(2x+5+\frac{10\pi}{2}\right)$

$\begin{pmatrix} \sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha \text{ olduğundan} \\ \sin(2x+5+\pi) = -\sin(2x+5) \end{pmatrix}$

$f^{(10)}(x) = 2^{10}.\sin(2x+5+5\pi)$

$f^{10}(x) = 2^{10}.\sin(2x+5+\pi)$

$f^{10}(x) = -2^{10}.\sin(2x+5)$

ÖRNEK

$y = \cos 7x$ ise $\dfrac{d^{22}y}{dx^{22}}$ **nedir?**

ÇÖZÜM

$y = \cos(ax+b) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d^{n}y}{dx^{n}} = a^{n}\cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$ olduğundan

$y = \cos 7x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d^{22}y}{dx^{22}} = 7^{22}.\cos\left(7x+\frac{22\pi}{2}\right)$

$= 7^{22}.\cos(7x+11\pi)$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\sin\alpha$ olduğundan

$= 7^{22}.\cos(7x+\pi)$

$\cos\left(7x+\frac{3\pi}{2}\right) = \sin 7x$

$= -7^{22}\cos 7x$ bulunur.

ÖRNEK

$y = f(x) = \sin x.\cos x$ ise $\dfrac{d^{3}y}{dx^{3}}$ **nedir?**

ÇÖZÜM–1

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 1^3\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right).\cos x + 3.1^2\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right).(-\sin x) + 3.\cos x.1^2.\left[\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)\right] + \sin x.1^3.\left[\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)\right]$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos^2 x + 3\sin^2 x - 3\cos^2 x + \sin^2 x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -4\cos^2 x + 4\sin^2 x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -4(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -4\cos 2x$$

ÇÖZÜM–2 $y = \sin x.\cos x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}\sin 2x$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{d^3(\sin 2x)}{dx^3} = \left(\frac{1}{2}\right)2^3 \cdot \sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= -4\cos 2x \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK $y = e^{ax}$ fonksiyonu, $\frac{d^2y}{dx^2} + 3y - 4\cdot\frac{dy}{dx} = 0$ denklemini sağladığına göre **a nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.**

ÇÖZÜM $\frac{dy}{dx} = a.e^x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(ae^{ax}\right) = a^2.e^{ax}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3y - 4\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 \cdot e^{ax} + 3 \cdot e^{ax} - 4 \cdot ae^{ax} = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^{ax}(a^2 - 4a + 3) = 0$$

$$e^{ax} \neq 0 \qquad a^2 - 4a + 3 = 0$$

$$a_1 + a_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-(-4)}{1} = 4 \quad \text{bulunur.}$$

TEOREM: $f: R \to R$, $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots a_1x + a_0$ polinom fonksiyonu verilsin.

$f(x) = 0$ denkleminin n katlı bir kökü $x = a$ ise

$f'(a) = f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ dır.

ÖRNEK $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ fonksiyonunun **yukarıdaki teoremi gerçekleştirdiğini gösteriniz.**

ÇÖZÜM $f(x) = x(x^2 - 2x + 1) \Rightarrow f(x) = x(x-1)^2$ dir.

$x = 1$ denkleminin iki katlı bir köküdür.

$x = a$ n katlı kök iken $f'(a) = f''(a) = f''(a) = \cdots f^{n-1}(a) = 0$ olduğundan,

$x = 1$, 2 katlı kök iken $f'(1) = 0$ olur.

$$f(x) = x(x-1)^2 \quad \Rightarrow f'(x) = 1\cdot(x-1)^2 + 2(x-1)\cdot x$$

$$f'(1) = 0 \quad \text{olur.}$$

Ayrıca;

$f''(x) = 6x - 4$ dır.

$f''(1) = 6.1 - 4 = 2 \neq 0$ olduğuna dikkat ediniz.

ÖRNEK $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ veriliyor.

$P(x)$ polinomu $(x-1)^3$ ne tam bölünebiliyorsa, **a ve b arasındaki bağıntı nedir?**

ÇÖZÜM $P(x)$ polinomu $(x-1)^3$ ne tam bölünebiliyorsa, $x = 1$ $P(x)$ in 3 katlı bir köküdür. Bu durumda

$P'(1) = P''(1) = 0$

$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$P''(x) = 6ax + 2b$

$P''(1) = 6a.1 + 2b = 0 \Rightarrow b = -3a$ bulunur.

AŞAĞIDAKİ KAPALI FONKSİYONLARIN $\frac{dy}{dx}$ TÜREVLERİNİ ALINIZ.

	SORULAR	YANITLAR
1)	$x^3 + 3yx^2 + y^3 = k^3$	$-\frac{x^2+2xy}{x^2+y^2}$
2)	$x^4 + 4x^3y + y^4 = a^k$	$-\frac{x^3+3x^2y}{x^3+y^3}$
3)	$3y^5 + 5y^3 + 5y - 15x = 0$	$\frac{3}{3y^4+3y^2+1}$
4)	$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$	$-\frac{b^2x}{a^2y}$
5)	$x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$	$\frac{y^2-2x-2xy}{x^2+2y-2xy}$
6)	$x^2 + y^2 = 49$	$-\frac{x}{y}$
7)	$3x^3y^3 - 2x + 3y - 6 = 0$	$\frac{2-9x^2y^3}{9x^3y^2+3}$
8)	$3x^2y^2 - 4xy + 2x^2 + y - 4 = 0$	$-\frac{6xy^2-4y+4x}{6x^2y-4x+1}$
9)	$x^2 + y^2 + \sin(xy) = 9$	$-\frac{2x+y\cdot\cos(xy)}{2y+x\cdot\cos(xy)}$
10)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$-\frac{b^2x}{a^2y}$
11)	$y^3 - 2x^2y + a^2 = 0$	$\frac{4xy}{3y^2-2x^2}$
12)	$x^4 + y^4 - 3kxy = 0$	$-\frac{4x^3-3ky}{4y^3-3kx}$
13)	$y = \sin(x + y)$	$-\frac{\cos(x+y)}{-1+\cos(x+y)}$
14)	$\sin(xy) = x$	$-\frac{y\cdot\cos(xy)-1}{x\cos(xy)}$
15)	$16x^3 + 4x^2y - 12xy + 4 = 4y^2$	$-\frac{48x^2+8xy-12}{4x^2-12x-8y}$
16)	$8x^2 + 4y^3 = 48$	$-\frac{4x}{3y^2}$
17)	$x^2 + y^2 = xy^2 - x^2y$	$\frac{y^2-2x-2xy}{x^2+2y-2xy}$
18)	$x^7 + 2x^3y^2 - y^2 - y^2x = 12$	$\frac{y^8-7x^6-6x^2y^2}{4x^3y-7y^7x}$
19)	$x.\sin y + y.\sin x = 1$	$-\frac{\sin y+y\cdot\cos x}{x\cdot\cos y+\sin x}$
20)	$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=16$	$-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$

ÇÖZÜMLÜ TEST – 2

1. $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ ise

$$\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{4}\right)}{x-\frac{1}{4}}$$ **kaçtır?**

A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

D) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{5}{\sqrt{3}}$

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{4}\right)}{x-\frac{1}{4}}=f'\left(\frac{1}{4}\right) \text{ dür.}$$

$$f'(x)=\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'$$

$$f'(x)=\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}}{2\sqrt{\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{4}}}}=\frac{1+1}{2\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{2}{2\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

YANIT "B"

2. $f(3x)=\left(x^2-x\right)^3$ ise $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ **kaçtır?**

A) 0 B) 45 C) 90 D) 180 E) 70

ÇÖZÜM

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)$$

$f(3x)=(x^2-x)^3$ eşitliğin her iki yanının x e göre türevi alınırsa

$3\cdot f'(3x)=3(x^2-x)^2(2x-1)$

$x=1$ için

$f'(3)=(1^2-1)^2(2\cdot 1-1)$

$f'(3)=0$ bulunur.

YANIT "A"

3. $f(x)=x^2(1+x)^3.(2-x)^2$ ise **$f'(2)$ kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

ÇÖZÜM

$f(x)=x^2\,(2-x)^2.(1+x)^3$

$f(x)=\left[x(2-x)\right]^2\cdot(1+x)^3$ biçminde yazılır.

$$f'(x)=\left[x(2-x)^2\right]'\cdot(1+x)^3+\left[(1+x)^3\right]'\cdot\left[x(2-x)\right]^2$$

$$f'(x)=\left[(2-x)^2+2(2-x)(-1)\cdot x\right](1+x)^3+3(1+x)^2(1)\left[x(2-x)\right]^2$$

$f'(2)=0$ olur.

YANIT "A"

4. $f(x)=\begin{cases} ax^2 & ; \ x<1 \text{ ise} \\ b\sqrt{x} & ; \ x\geq 1 \text{ ise}\end{cases}$

$f'(-1)+f'(4)=-3$ ve $b=4a$

olduğuna göre, **a kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

$$f'(x)=\begin{cases}2ax & ; \quad x<1 \quad \text{ise}\\ \dfrac{b}{2\sqrt{x}} & ; \quad x\ge 1 \quad \text{ise}\end{cases}$$

$f'(-1)=2a.(-1)=-2a$

$f'(4)=\dfrac{b}{2\cdot\sqrt{4}}=\dfrac{b}{4}$

$b=4a \Rightarrow f'(4)=\dfrac{4a}{4}=a$

O halde;

$f'(-1)+f'(4)=-2a+a=-3$

$-a=-3$

$a=3$ olur.

YANIT "C"

5. $f(x)=x^2.\text{sgn}(-x)\,.\,[\![x]\!]$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu için $f'\left(-\dfrac{5}{2}\right)$ **kaçtır?**

A) 1 B) 5 C) 10 D) 15 E) 20

ÇÖZÜM

$x=-\dfrac{5}{2}$, $y=\text{sgn}(-x)$ ve $y=[\![x]\!]$ için kritik nokta değildir. Bu noktada her iki fonksiyonun türevi de sıfırdır.

Buna göre;

$$f'(x)=2x\left(\text{sgn}(-x)\cdot[\![x]\!]\right)+\overbrace{(\text{sgn}(-x))'}^{0}\cdot x^2\cdot[\![x]\!]+\underbrace{[\![x]\!]'}_{0}\cdot x^2\text{sgn}(-x)$$

$$=2x\cdot\text{sgn}(-x)\cdot x+0+0$$

$$f'\left(-\frac{5}{2}\right)=2\cdot\frac{-5}{2}\cdot\text{sgn}\left[\!\!\left[\frac{-5}{2}\right]\!\!\right]$$

$$=-5\cdot(-1)\cdot(-3)=15 \quad \text{bulunur.}$$

YANIT "D"

6. $f(x)=\dfrac{1}{x-3}+\text{sgn}\left(x^2-5\right)-\left|x^2-2x-3\right|$

ile tanımlı fonksiyonun **kaç noktada türevi <u>yoktur?</u>**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

$y=\dfrac{1}{x-3}$ $x=3$ noktasında süreksiz ve tanımsızdır.

$y=\text{sgn}(x^2-5)$ $x^2-5=0 \Rightarrow x=\mp\sqrt{5}$ için süreksiz ve türevsizdir.

$y=\left|x^2-2x-3\right|$, $x^2-2x-3=0$ denkleminin kökleri $x=3$, $x=-1$ dir.

(−3 1)

Bu köklerde fonksiyon işaret değiştirdiğinden, sağdan ve soldan türevleri farklı olur.

$x=3$ ve $x=-1$ de türev yoktur.

4 noktada türev yoktur.

Türevsiz olduğu noktalar

$x=3,\ x=\sqrt{5}\ ,\ x=-\sqrt{5}\ ,\ x=-1$

YANIT "D"

7. $f(2x+3)=x^2+mx-4$ ifadesinde $f'(5)=3$ ise **m kaçtır?**

A) −2 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

ÇÖZÜM

$f(2x+3)=x^2+mx-4$ ise eşitliğin iki tarafının x e göre türevini alırsak

$(2x+3)'.f'(2x+3)=2x+m$ olur. $x=1$ için

$2.\,f'(5)=2+m$ $\qquad f'(5)=3 \Rightarrow$

$2.3=2+m \Rightarrow m=4$ bulunur.

YANIT "C"

8. $f(x)=x^3.\ln x$ ise **$f'(1)$ kaçtır?**

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM

$f'(x)=3x^2\cdot\ln x+\dfrac{1}{x}\cdot x^3$

$f'(1)=3\cdot1^2\ln1+\dfrac{1}{1}\cdot1^3$

$f'(1)=0+1=1$ bulunur.

YANIT "C"

9. $f(x) = 2x^3 + (m-5)x^2 - 2mx + 5$ ifadesinde $f'(x)$ in bir çarpanı $x - 1$ ise **m kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

$f'(x) = 6x^2 - 2(m-5)x - 2m$ olur.

$f'(x)$ in bir çarpanı $x - 1$ ise $f'(1) = 0$ olmalıdır.

$$f'(1) = 6 \cdot 1^2 - 2(m-5) \cdot 1 - 2m = 0$$
$$6 - 2m + 10 - 2m = 0$$
$$-4m = -16$$
$$m = 4 \quad \text{bulunur.}$$

YANIT "D"

10. $\frac{d^3}{dx^3}(ax^4 + 3x^3) = 24x + b$ ise **a + b kaçtır?**

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

ÇÖZÜM

$y = ax^4 + 3x^2$ alınırsa

$\frac{d^3}{dx^3}(ax^4 + 3x^3) = y'''$ olur.

$$y' = 4ax^3 + 9x^2$$
$$y'' = 12ax^2 + 18x$$
$$y''' = 24ax + 18 = 24x + b \Rightarrow$$
$$a = 1 \wedge b = 18 \text{ elde edilir.}$$

Öyleyse $a + b = 19$ dur.

YANIT "D"

11. $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun **1996. türevi nedir?**

A) $-\sin x$ B) $-\cos x$ C) $\sin x$
D) $\cos x$ E) $(\sin x)^{1996}$

ÇÖZÜM

$f(x) = \sin x$ ise f nin n. türevi

$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ olduğundan

$$f^{(1996)}(x) = \sin\left(x + 1996 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \sin(x + 998\pi)$$
$$= \sin x \quad \text{bulunur.}$$

YANIT "C"

12. $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$ ise **$f''(x)$ in $f(x)$ cinsinden eşiti nedir?**

A) $6f(x)$ B) $4f(x)$ C) $-6f(x)$
D) $-4f(x)$ E) $-2f(x)$

ÇÖZÜM

$$f'(x) = 2.\cos 2x - 2\sin 2x$$
$$f''(x) = -4\sin 2x - 4\cos 2x$$
$$= -4(\sin 2x + \cos 2x)$$
$$= -4f(x) \quad \text{olur.}$$

YANIT "D"

13. $f(x) = (1 + \sin^2 x)^4$ ise $\frac{dy}{dx}$ **nedir?**

A) $4(1 + \sin^2 x)^3.\sin 2x$ B) $4(1 + \sin^3 x).\sin x$
C) $2(1 + \sin^3 x).\cos x$ D) $4(1 + \sin^2 x)^3$
E) $4(1 + \sin^2 x)\cos^2 x$

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 4 \cdot (1 + \sin^2 x)^3 (1 + \sin^2 x)'$$
$$= 4 \cdot (1 + \sin^2 x)^3 \cdot (2\sin x) \cdot \cos x$$
$$= 4 \cdot (1 + \sin^2 x)^3 \cdot \sin 2x$$

YANIT "A"

14. $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-1+\tan 2x\right)$ ise $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)$ **kaçtır?**

A) 4 B) 3 C) 0 D) –1 E) –4

ÇÖZÜM

$$f'(x)=-\left(\frac{\pi}{2}-1+\tan 2x\right)'\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-1+\tan 2x\right)$$

$$=-2\left(1+\tan^2 2x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-1+\tan\frac{\pi}{4}\right)\text{ olur.}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=-2\left(1+\tan^2\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-1+\tan\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=-2\cdot(2)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-1+1\right)$$

$$=-2\cdot2\cdot\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=-4\text{ bulunur}$$

YANIT "E"

15. $f(x)=2\sin^2 2x$ ise

$$\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{24}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{24}\right)}{h}$$ **limiti kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

$$\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{24}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{24}\right)}{h}=f'\left(\frac{\pi}{24}\right)\text{ dür.}$$

(Türev tanımından)

$$f'(x)=2\cdot2\cdot\sin 2x(\sin 2x)'$$

$$f'(x)=4\cdot\sin 2x\cdot2\cos 2x$$

$$f'(x)=4\cdot\underbrace{2\sin 2x\cdot\cos 2x}_{\sin 4x}$$

$f'(x) = 4.\sin4x$ olur.

$$f'\left(\frac{\pi}{24}\right)=4\cdot\sin\frac{4\pi}{24}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{24}\right)=4\cdot\sin\frac{\pi}{6}=4\cdot\frac{1}{2}=2\text{ bulunur.}$$

YANIT "B"

16. $f(x)=[\![x]\!]^{\sin x}$ veriliyor. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

ÇÖZÜM

$x=\frac{\pi}{2}$ için $[\![\frac{\pi}{2}]\!]=1$

$x=\frac{\pi}{2}$ $[\![x]\!]$ için kritik nokta değildir. Bu noktada f süreklidir.

$x=\frac{\pi}{2}$ için $f(x) = 1$ dir.

$f'(x) = 0$ olur. O halde;

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ dır.

YANIT "C"

17. $y = \ln \arccos x$ ise $\frac{dy}{dx}$ in in **x = 0 için değeri** ***nedir?***

A) $-\frac{2}{\pi}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) 4

ÇÖZÜM

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\arccos x)'}{\arccos x}=\frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arccos x}$$

$x = 0$ için

$$=\frac{\frac{-1}{\sqrt{1-0}}}{\arccos 0}=\frac{-1}{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}\text{ bulunur.}$$

YANIT "A"

18. $y=f(x)=1+2\sin\frac{x}{2}$ fonksiyonu veriliyor.

$f^{-1}(x)$ in türevinin **x = 1 için değeri nedir?**

A) –1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM

$y = 1 - \sin\frac{x}{2}$ fonksiyonunda x yerine y, y yerine x yazarak $f^{-1}(x)$ i bulalım.

$$x = 1 + 2\sin\frac{y}{2} \Rightarrow 2\sin\frac{y}{2} = x - 1$$

$$\sin\frac{y}{2} = \frac{x-1}{2}$$

$$\frac{y}{2} = \arcsin\frac{x-1}{2}$$

$$y = 2\arcsin\frac{x-1}{2}$$

$$f^{-1}(x) = 2\arcsin\frac{x-1}{2} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(x) = 2\cdot\frac{\left(\frac{x-1}{2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = 2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = 2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-0}} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1 \text{ bulunur.}$$

YANIT "C"

19. $f(x) = \sin(\cos 5x)$ eğrisinin $x = \frac{\pi}{10}$ noktasındaki **teğetinin eğimi kaçtır?**

A) –5 B) –4 C) 0 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

$f'(x) = (\cos 5x)'.\cos(\cos 5x)$ olur.

$$f'\left(\frac{\pi}{10}\right) = -5\cdot\sin\left(5\cdot\frac{\pi}{10}\right)\cdot\cos\left(\cos 5\cdot\frac{\pi}{10}\right)$$

$$= -5\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -5\cdot 1\cdot\cos 0$$

$$= -5\cdot 1 = -5 \text{ olur.}$$

O halde,

$x = \frac{\pi}{10}$ noktasındaki teğetin eğimi

$$m_T = f'\left(\frac{\pi}{10}\right) = -5 \text{ olur.}$$

YANIT "A"

20. $f(x) = \frac{2^x}{\sin x}$ ise $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **kaçtır?**

A) 2 B) 2ln2 C) $2^{\frac{\pi}{2}}$

D) $2^{-\frac{\pi}{2}}\cdot\ln 2$ E) $2^{\frac{\pi}{2}}\cdot\ln 2$

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \frac{\left(2^x\right)'\cdot\sin x - (\sin x)'\cdot 2^x}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{2^x\cdot\ln 2\cdot\sin x - \cos x\cdot 2^x}{\sin^2 x} \text{ olur.}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2^{\frac{\pi}{2}}\cdot\ln 2\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}\cdot 2^{\frac{\pi}{2}}}{\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2^{\frac{\pi}{2}}\cdot\ln 2\cdot 1 - 0\cdot 2^{\frac{\pi}{2}}}{1^2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2^{\frac{\pi}{2}}\cdot\ln 2 \quad \text{bulunur.}$$

YANIT "E"

21. $f(x) = 2^{\sec x}$ ve $g(x) = 4^{\tan x}$ ise

$\dfrac{g'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ **kaçtır?**

A) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ B) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ E) $\sqrt{3}$

ÇÖZÜM

$$f'(x) = (\sec x)' \cdot 2^{\sec x} \cdot \ln 2$$
$$= \sec x \cdot \tan x \cdot 2^{\sec x} \cdot \ln 2$$
$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sec\frac{\pi}{3} \cdot \tan\frac{\pi}{3} \cdot 2^{\sec\frac{\pi}{3}} \cdot \ln 2$$
$$\left(\sec\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2\right) = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2^2 \cdot \ln 2$$
$$= 8\sqrt{3} \cdot \ln 2$$
$$g'(x) = (\tan x)' \cdot 4^{\tan x} \cdot \ln 4$$
$$g'(x) = (1 + \tan^2 x) \cdot 4^{\tan\frac{\pi}{4}} \cdot \ln 4 \text{ olur.}$$
$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(1 + \tan^2\frac{\pi}{4}\right) \cdot 4^{\tan\frac{\pi}{4}} \cdot \ln 4$$
$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(1 + 1^2\right) \cdot 4 \cdot \ln 4$$
$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8 \cdot \ln 4$$
$$= 8 \cdot \ln 2^2$$
$$= 16 \ln 2$$
$$\frac{g'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{16 \ln 2}{8\sqrt{3} \cdot \ln 2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ olur.}$$

YANIT "D"

22. $\left.\begin{aligned} x &= 2t^2 + 1 \\ y &= 3t^2 + t \end{aligned}\right\}$ denklemleri verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için $\frac{dy}{dx}$ in **$t = \frac{1}{2}$ için değeri nedir?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 2

ÇÖZÜM

$$\frac{dx}{dt} = 4t \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6t+1}{4t}$$
$$\frac{dy}{dt} = 6t + 1$$
$$t = \frac{1}{2} \text{ için} \qquad = \frac{6 \cdot \frac{1}{2} + 1}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{2} = 2 \text{ bulunur.}$$

YANIT "E"

23. $f(x) = \log(\cos 6x)$ ve $g(x) = \sin(\log 6x)$ ise

$f'(0) + g'\left(\frac{1}{6}\right)$ toplamı kaçtır?

A) 0 B) $\frac{6}{\ln 10}$ C) $\frac{8}{\ln 10}$

D) 2 E) $e^{\frac{1}{6}}$

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \frac{(\cos 6x)'}{\cos 6x} \cdot \frac{1}{\ln 10} \quad \left(y = \log_a f(x) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}\right)$$
$$f'(x) = -\frac{6 \sin 6x}{\cos 6x \cdot \ln 10} \Rightarrow f'(0) = -\frac{6 \sin 0}{\cos 0 \cdot \ln 10} = 0$$
$$g'(x) = (\log 6x)' \cdot \cos(\log 6x)$$
$$g'(x) = \frac{6}{6x \cdot \ln 10} \cdot \cos(\log 6x)$$
$$g'\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\cos \log\overbrace{\left(6\left(\frac{1}{6}\right)\right)}^{1}}{\frac{1}{6}\ln 10}$$
$$g'\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\cos 0}{\frac{1}{6} \cdot \ln 10} = \frac{1}{\frac{\ln 10}{6}} = \frac{6}{\ln 10} \text{ olur.}$$

YANIT "B"

24. $f^{-1}(x+2) = 2x + 5$ ve $(gof)(x) = 4x^2 - 1$ ise

$g'\left(\frac{5}{2}\right)$ kaçtır?

A) 32 B) 48 C) 64 D) 72 E) 96

ÇÖZÜM

$f^{-1}(x + 2) = 2x + 5$

$(x + 2)^{-1} = x - 2$ x yerine $x - 2$ yazılırsa,

$f^{-1}(x - 2 + 2) = 2(x - 2) + 5$

$f^{-1}(x - 2 + 2) = 2(x - 1) + 5$

$$f^{-1}(x) = 2x + 1$$
$$f(x) = (2x + 1)^{-1}$$
$$f(x) = \left(\frac{x - 1}{2}\right) \text{ olur.}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}$$

ZAFER YAYINLARI

$(g o f)(x) = 4x^2 - 1$ ise bileşke fonksiyonunun türevine göre

$f'(x) \cdot g'(f(x)) = 8x$ olur.

$$\frac{1}{2} \cdot g'\left(\frac{x-1}{2}\right) = 8 \cdot x$$

$\frac{x-1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 6$ değeri yerine yazılarak

$$\frac{1}{2} \cdot g'\left(\frac{5}{2}\right) = 48$$

$g'\left(\frac{5}{2}\right) = 96$ bulunur.

YANIT "E"

25. $x^2y^2 = \cos(2x+y)$ eğrisinin $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ noktasındaki **teğetinin denklemi nedir?**

A) $y = -x + \frac{\pi}{4}$ B) $y = -x$

C) $y = -2x$ D) $y = 2x + \frac{\pi}{2}$

E) $y = x$

ÇÖZÜM

$x^2y^2 - \cos(2x+y) = 0$ dır.

$$\frac{dy}{dx}(x, y) = -\frac{2xy^2 + 2\sin(2x+y)}{2x^2y + \sin(2x+y)}$$

$$\frac{dy}{dx}(x, y) = -\frac{2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0^2 + 2\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4} + 0\right)}{2 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot 0 + 2\sin\left(2\frac{\pi}{4} + 0\right)}$$

$$= -\frac{0 + 2 \cdot \sin\frac{\pi}{2}}{0 + 2 \cdot \sin\frac{\pi}{2}} = -1 \text{ olur.}$$

teğetin denklemi

$y - y_1 = m(x - x_1)$ ile

$$y - 0 = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$y = -x + \frac{\pi}{4}$ bulunur.

YANIT "A"

26. $\left.\begin{array}{l} x = 2t^2 + 1 \\ t = 3y - 1 \\ y = r^2 + 1 \end{array}\right\}$ ise $\frac{dx}{dr}$ nin $r = 1$ için **değeri kaçtır?**

A) 30 B) 60 C) 90 D) 120 E) 150

ÇÖZÜM

$\frac{dx}{dr} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} \cdot \frac{dy}{dr}$ dır.

$\frac{dx}{dt} = 4t$, $\frac{dt}{dy} = 3$, $\frac{dy}{dr} = 2r$ olur.

$y = r^2 + 1 \Rightarrow r = 1$ için $y = 2$

$t = 3y - 1 \Rightarrow y = 2$ için $t = 5$

Buna göre,

$$\frac{dx}{dr} = 4t \cdot 3 \cdot 2r$$

r için $\frac{dx}{dr} = 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ bulunur.

YANIT "D"

27. $\left.\begin{array}{l} x = 3t + 1 \\ y = 2t^2 - t \end{array}\right\}$ parametrik denklemleri ile verilen

$y = f(x)$ fonksiyonu için $\frac{d^2y}{dx^2}$ **nedir?**

A) $\frac{4}{9}$ B) $\frac{5}{9}$ C) 1 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \text{ idi.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4t}{3} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4t}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

YANIT "A"

TÜREV UYGULAMALARI

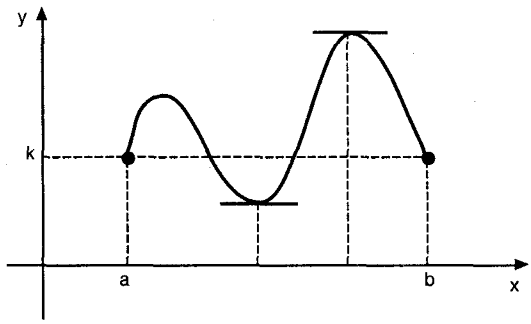
ROLLE (ROL) TEOREMİ

$f: [a,b] \to R$ sürekli ve (a,b) de türevli olsun.

$f(a) = f(b)$ ise $f'(c) = 0$ olacak şekilde (a,b) de en az bir tane $x = c$ noktası vardır.

Teoremin Geometrik Anlamı:

$f: [a,b] \to R$ türevli bir fonksiyon ve $f(a) = f(b)$ ise f fonksiyonunun grafiği üzerinden seçilen noktalardan en az bir tanesinden x eksenine paralel teğetler çizilebilir.



ÖRNEK $f: [0,1] \to R$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ fonksiyonunun **Rolle teoremini gerçeklediğini gösteriniz.**

ÇÖZÜM $f(0) = f(1)$ midir? Araştıralım.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0^3 - 3.0^2 + 2.0 = 0 \\ f(1) = 1^3 - 3.1^2 + 2.1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow f(0) = f(1)$$

Polinom şeklindeki fonksiyonlar R de sürekli olduğundan $f: [0,1]$ de süreklidir.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0$

$\Delta = 36 - 4 \,.\, 3 \,.\, 2$

$\Delta = 12 \qquad x_{1,2} = \dfrac{6 \mp \sqrt{12}}{6} = 1 \mp \dfrac{2\sqrt{3}}{6} = 1 \mp \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$x = \left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \in [0,1]$ o halde en az bir noktada fonksiyonun türevinin sıfır olduğu söylenebilir.

f Rolle teoremini gerçekler.

ÖRNEK $f(x) = 2x^3 + [\![x]\!]$ fonksiyonuna $[1,3]$ aralığında **Rolle teoremi uygulanabilir mi?**

ÇÖZÜM $f : [1,3]$ aralığındaki sürekli olmadığından Rolle teoremi uygulanamaz.

ÖRNEK $f: [1,3] \to f(x) = x^3 + 2x - 5$ fonksiyonunun **Rolle teoremini gerçekleyip gerçeklemediğini araştırınız.**

ÇÖZÜM $f(1)=1 + 2 - 5 = -2$, $f(3) = 27 + 6 - 5 = 28$

$f(1) \neq f(3)$ fonksiyon verilen aralıkta Rolle teoremini gerçeklemez.

ÖRNEK $f: [-\pi,\pi] \to R$, $f(x) = 3\cos x$ fonksiyonunun **Rolle teoremini gerçekleyip gerçeklemediğini araştırınız.**

ÇÖZÜM $f(-\pi) = 3.\cos(-\pi) = -3$ $\qquad f(\pi) = 3.\cos\pi = -3$

$y = \cos x$ fonksiyonu

$f(x) = 3\cos x \Rightarrow f'(x) = -3\sin x$, $f'(x) = 0 \Rightarrow -3\sin x = 0 \Rightarrow x = 0$

$0 \in [-\pi,\pi]$ olduğundan f fonksiyonu Rolle teoremini gerçekler.

ORTALAMA DEĞER TEOREMİ

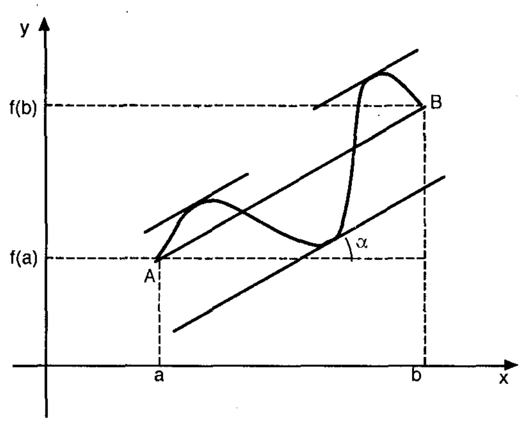
$f : [a,b] \to R$, $[a,b]$ de sürekli (a,b) de türevli olsun.

$a < c < b$ olacak biçimde en az bir tane c için,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ dır.}$$

Teoremin Geometrik Anlamı:

f: [a,b] de ortalama değer teoremi uygulanabilen bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $A(a, f(a))$ ve $B(b, f(b))$ noktalarından geçen doğruya paralel olacak biçimde (a, b) de f(x) in en az bir teğeti vardır.



ÖRNEK $f:\left[\frac{1}{2},2\right] \to R$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ fonksiyonuna ortalama değer teoremini uygulayınız. **Ortalama değer teoremini sağlayan x sayısını bulunuz.**

ÇÖZÜM $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$, $f(2) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

ortalama değer teoremini gerçekleyen sayı x ise

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{5}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = 0$$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ $\qquad 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{x^2} = -1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

$1 \in \left[\frac{1}{2},2\right]$ olduğundan $x = 1$ ortalama değer teoremini sağlar.

ÖRNEK $f:[1,3] \to R$, $f(x)=x^2+5$ fonksiyonu için ortalama değer teoremini sağlayan bir **c sayısı bulunuz.**

ÇÖZÜM $f'(c)=\dfrac{f(1)-f(3)}{1-3}$ koşulunu sağlayan c sayısını bulalım.

$f'(x)=2x \Rightarrow f'(c)=2c$ olur.

$f(1)=1+5=6$

$f(3)=9+5=14$

$2c=\dfrac{6-14}{1-3}$

$2c=\dfrac{-8}{-2} \Rightarrow c=2$ bulunur.

ÖRNEK $f:[0,\pi] \to R$, $f(x)=\sin x$ teoremine ortalama değer teoremini **sağlayan x sayısını bulunuz.**

ÇÖZÜM $a=0 \quad \Rightarrow \quad f(0)=\sin 0=0$

$b=\pi \quad \Rightarrow \quad f(\pi)=\sin\pi=0$ teoremini sağlayan değer x ise

$f'(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{0-0}{\pi-0}=0$

$f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x=0 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}\in[0,\pi]$ O halde,

$x=\dfrac{\pi}{2}$ ortalama değer teoremini sağlar.

GENELLEŞTİRİLMİŞ ORTALAMA DEĞER TEOREMİ (CAUCHY TEOREMİ)

TEOREM: f ve g fonksiyonları [a,b] aralığında sürekli, (a,b) aralığında türevli ve $\forall x\in(a,b)$ için $g'(x)\neq 0$ olsun.

Bu durumda (a,b) de öyle bir c noktası vardır ki, bu noktada

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$ **dır.**

ÖRNEK $f(x)=x^3$, $g(x)=3x+1$ biçiminde tanımlı f ve g fonksiyonları için [1,3] aralığında genelleştirilmiş ortalama değer teoremini sağlayan **x sayısı nedir?**

ÇÖZÜM $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{f(3)-f(1)}{g(3)-g(1)} \Rightarrow \dfrac{3x^2}{3}=\dfrac{3^3-1^3}{(3\cdot3+1)-(3\cdot1+1)}=\dfrac{26}{6}=\dfrac{13}{3}$

$$x^2=\frac{13}{3} \Rightarrow x=\mp\sqrt{\frac{13}{3}}$$

Buna göre, teoremi sağlayan x sayısı $\sqrt{\dfrac{13}{3}}$ dür.

TÜREVİN LİMİTE UYGULANMASI

L′ HOSPİTAL KURALI

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$, ∞^0, 1^∞, 0^0 ifadeleri birer belirsizliktir.

Bu belirsizliklerin hepsi $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ durumlarına dönüştürülerek limit değerleri hesaplanır.

L′ Hospital Teoremi:

$A \subset R$, f ve g, $A - \{a\}$ kümesinde tanımlanmış türevlenebilen iki fonksiyon ve $g'(x) \neq 0$ olsun.

1) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{0}{0}$ ise $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

2) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ ise $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

UYARI:	Teoremdeki koşullar sağlandığı sürece L′ Hospital kuralı arka arkaya uygulanabilir.

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x\ln x}{x^2-1}$ **limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x\ln x}{x^2-1} = \frac{0}{0}$ L′ Hospital uygulanabilir.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\ln x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1.\ln x + \frac{1}{x}\cdot x}{2x} = \frac{1}{2} \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin x}$ **limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin x} = \frac{0}{0}$ belirsizdir. L′ Hospital uygulanabilir.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{e^0}{\cos 0} = 1 \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{e^x-1}$ **limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x \to 0$ için $\frac{0}{0}$ belirsizliği var. L′ Hospital kuralından,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{6x}{(1+3x^2)}}{e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{\frac{1}{e^0}} = 0 \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x^4+3x^2-9x+1}{x^2-1}$ **limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x \to 1$ için $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 1} \frac{5x^4+3x^2-9x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{20x^3+6x-9}{2x} = \frac{20+6-9}{2} = \frac{17}{2} \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x}{3e^x}$ **limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x \to \infty$ için $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. L'Hospital uygulanabilir.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x^2+x)}{3.e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{3.e^x} = \dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizlik devam ettiği için bir kez daha L'Hospital uygulanabilir.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{3 \cdot e^x} = 0$ bulunur.

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin(x-a)}{\sin\frac{x}{2} - \sin\frac{a}{2}}$ **limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x \to a$ için $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. L'Hospital uygulanırsa,

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin(x-a)}{\sin\frac{x}{2} - \sin\frac{a}{2}} = \lim_{x\to a} \frac{\cos(x-a)}{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\cos 0}{\frac{1}{2}\cos\frac{a}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cos\frac{a}{2}}$$

$$= \frac{2}{\cos\frac{a}{2}} = 2\sec\frac{a}{2}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ **limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x \to \infty$ için $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. L' Hospital uygulanabilir.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{\pi}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\pi}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \cdot \left(-x^2\right)$$

$= \pi$ olur.

0 . ∞ BELİRSİZLİĞİ

$\lim f(x) \cdot g(x) = 0.\infty$ veya $\lim f(x) \cdot g(x) = \infty.0$ ise $\lim f(x).g(x) = \lim \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ şeklinde yazılarak,

$\dfrac{0}{0}$ veya $\dfrac{\infty}{\infty}$ şeklinde dönüştürülür, daha sonra limit alınır.

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to\infty} x^2.e^{-x}$ **limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x \to \infty$ için $\infty.0$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\frac{1}{e^{-x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$ belirsizliğine dönüşür. L′ Hospital uygulanırsa

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$ bir kez daha L′Hospital uygulanırsa,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$ bulunur.

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to 0^+} (x.\ln x)$ **limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x \to 0^+$ için $0.\infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0^+} x.\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$ belirsizliğine dönüşür. L′ Hospital uygulanırsa,

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot(-x^2) = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$ bulunur.

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(\dfrac{x}{2}\right)\cdot \ln\left(e^2 - \dfrac{1}{x}\right) - x\right]$ **limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM $$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x}{2}\cdot \ln\left(e^2 - \frac{1}{x}\right) - x\right] = \lim_{x\to\infty} x\left[\frac{1}{2}\ln\left(e^2 - \frac{1}{x}\right) - 1\right] \to \infty.0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left[\frac{1}{2}\ln\left(e^2 - \frac{1}{x}\right) - 1\right]}{\frac{1}{x}} \to \frac{0}{0}$$ belirsizliğine dönüşür . L′Hospital teoremi uygulanırsa

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left[\frac{1}{2}\ln\left(e^2 - \frac{1}{x}\right) - 1\right]}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{e^2 - \frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^2}}{-1} = -\frac{1}{2e^2}$$ bulunur.

$\infty - \infty$ BELİRSİZLİĞİ

KURAL: $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\infty-\infty$ **veya** $\lim\limits_{x\to\mp\infty}[f(x)-g(x)]=\infty-\infty$ **ise**

$f(x)-g(x)=\dfrac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x).g(x)}}$ **eşitliğini kullanarak** $\dfrac{0}{0}$ **biçimine dönüştürülür.**

Sonra limit alınır.

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{3x+1}-\dfrac{x^3}{3x^2+1}\right)$ **limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x\to\infty$ için $(\infty-\infty)$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{3x+1}-\frac{x^3}{3x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2.(3x^2+1)-x^3(3x+1)}{(3x+1)(3x^2+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+x^2-3x^4-x^3}{3x^3+x+3x^2+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3+x^2}{3x^3+3x^2+x+1}=-\frac{1}{3}\text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x-\sec x)$ **limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x-\sec x)=\infty-\infty$ belirsizliği vardır. Bu yüzden ifade $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği biçimine getirilmelidir.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x-\sec x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x-1}{\cos x}\right)\text{ olur.}$$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x-1}{\cos x}\right)=\dfrac{1-1}{0}=\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. L'Hospital teoremi uygulanırsa

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\cos x}{-\sin x}\right)=\dfrac{0}{-1}=0$ bulunur.

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ **limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x\to1$, $\infty-\infty$ belirsizliği var.

Paydalar eşitlenerek $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği bulunur. L' Hospital uygulanırsa

$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{\dfrac{1}{x}-1}{\dfrac{1}{x}(x-1)+\ln x}\right)=\dfrac{0}{0}$ Bir kez daha L'Hospital uygulanırsa;

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}}=-\dfrac{1}{2}$ bulunur.

1^{∞}, ∞^0, 0^0 BELİRSİZLİKLERİ

KURAL: $y = f(x)^{g(x)}$ **biçimindeki fonksiyonlarda,** 1^{∞}, ∞^0, 0^0 **gibi belirsiz durumlarla karşılaşılır. Bu durumda,**

$y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y = \ln f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x).\ln[f(x)]$

her iki yanın limiti alınarak, $\lim \ln y = \lim g(x).\ln[f(x)]$

$\lim \ln y = \ln \lim y$ **olduğundan,** $\ln \lim y = \lim g(x).\ln[f(x)]$

$\lim y = e^{\lim g(x)\ln[f(x)]}$ **elde edilir.**

Daha sonra limit hesabına geçilir.

$\lim\limits_{x\to\infty} y$ **veya** $\lim\limits_{x\to a} y$ **için kural aynen uygulanabilir.**

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to 0^+} (x)^{\sin x}$ **limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x \to 0^+$ için 0^0 belirsizliği vardır.

$y = x^{\sin x}$ olsun, $\ln y = \ln x^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \ln x$

her iki yanın limiti alınırsa, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln y = \lim\limits_{x\to 0^+} \sin x.\ln x$

$\ln \lim\limits_{x\to 0^+} y = \lim\limits_{x\to 0^+} \sin x.\ln x$

$\lim\limits_{x\to 0^+} y = e^{\lim\limits_{x\to 0} \sin x.\ln x}$ olur.

Şimdi $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x.\ln x$ limitini bulalım.

$x\to 0^+$ için $0.\infty$ belirsizliği vardır.

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}} \to \dfrac{\infty}{\infty}$ olur. L'Hospital kuralı uygulanırsa

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} +\underbrace{\dfrac{\sin}{x}}_{1} \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{-1.0}{1} = 0$ sonuç $e^{\circ} = 1$ bulunur.

UYARI: 1) $y = [f(x)]^{g(x)}$ **biçimindeki fonksiyonlarda limit alınırken, az işlem yapmak için,**

- $\lim\limits_{x\to a} y = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x).\ln[f(x)]}$
- $\lim\limits_{x\to \mp\infty} y = e^{\lim\limits_{x\to \mp\infty} g(x).\ln[f(x)]}$
- $\lim\limits_{x\to \mp\infty} y = (1+f(x))^{g(x)} \to 1^{\infty} \Rightarrow \lim\limits_{x\to \mp\infty} y = e^{\lim\limits_{x\to \mp\infty} f(x).g(x)}$
- $\lim\limits_{x\to a} y = (1+f(x))^{g(x)} \to 1^{\infty} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} y = e^{\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x)}$

sonuçlarını kullanırız.

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$ **limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^x = 1^\infty$ belirsizliği vardır.

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+f(x))^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} f(x).g(x)}$ kuralını uygulayabiliriz.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}} = e^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{bx}\right)^{cx+d} = e^{\frac{ac}{b}}$ **olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{bx}\right)^{cx+d} = 1^\infty$ belirsizliği olur. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{bx}\right)^{cx+d} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{bx}\cdot(cx+d)} = e^{\frac{a.c}{b}}$ bulunur.

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{3x+4}$ **limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{3x+4} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{3x+4} = 1^\infty$ belirsizliği vardır.

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x}\cdot(3x+4)} = e^{\frac{3}{2}} \text{ dir.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x+2x\right)^{\frac{1}{x}}$ **limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x\to 0^+$ için 1^∞ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(e^x+2x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln(e^x+2x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln(e^x+2x) \to \frac{0}{0} \quad \text{L' Hospital kuralını uygularsak}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{e^x+2}{e^x+2x}}{1} = \frac{3}{1} = 3 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(e^x+2x\right)^{\frac{1}{x}} = e^3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{x}}$ **limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x\to\infty$ için ∞^0 belirsizliği var.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln(x^2+1)}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\ln(x^2+1) \to \dfrac{\infty}{\infty}$ **belirsizliği var. L'Hospital uygulanabilir.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

ÇÖZÜMLÜ TEST – 3

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x-4}{x^2-1}$ **kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

ÇÖZÜM

$x\to 1$ için $\frac{0}{0}$ belirsizliği olduğundan L'Hospital teoremi uygulanır.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+3x-4\right)'}{\left(x^2-1\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{2x}=\frac{2.1+3}{2.1}=\frac{5}{2}$$

bulunur.

YANIT "E"

2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-x-6}{x^2-4}$ **kaçtır?**

A) $\frac{11}{4}$ B) 4 C) $\frac{15}{4}$ D) 6 E) 7

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x\to 2}$ için $\frac{0}{0}$ belirsizliği olduğundan L'Hospital teromi uygulanır.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^3-x-6\right)'}{\left(x^2-4\right)'}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-1}{2x}$$

$\dfrac{3.2^2-1}{2.2}=\dfrac{11}{4}$ bulunur.

YANIT "A"

3. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-a}{x^2-5x+4}=k$ a, k ∈ R ise **a.k kaçtır?**

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{2}{3}$ E) 1

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-a}{x^2-5x+4}=\dfrac{2-a}{0}$ olur.

Limitinin sonucunun k∈R olması için, $\frac{0}{0}$ belirsizliği sağlamalıdır.

$2-a=0 \Rightarrow a=2$ dir.

Bu durumda

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}\to\dfrac{0}{0}$ olduğundan L'Hospital teoremi uygulanır.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)'}{\left(x^2-5x+4\right)'}=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x-5}\Rightarrow$$

$$\frac{\frac{1}{2.\sqrt{4}}}{2.4-5}=\frac{\frac{1}{4}}{3}=\frac{1}{12}\text{ olur.}$$

$k=\dfrac{1}{12}$, $a=2 \Rightarrow a.k=2\cdot\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{6}$

YANIT "C"

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{3x+1}$ **kaçtır?**

A) $-\frac{1}{3}$ B) 0 C) 1 D) $\frac{1}{3}$ E) 2

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{4x}-2}{3x+1}=\frac{\sqrt[3]{8}-2}{6+1}=\frac{0}{7}=0$$

bulunur. $\frac{0}{0}$ belirsizliği olmadığından L'Hospital teoreminin uygulanmadığına dikkat ediniz.

YANIT "B"

5. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$ **kaçtır?**

A) 0 B) 3 C) 5 D) $\frac{17}{2}$ E) ∞

ÇÖZÜM

$x \to 0^+$ için $\frac{0}{0}$ olduğundan L'Hospital teoremi uygulanır.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(x)'}{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{1}{0} = +\infty \text{ olur.}$$

Not: $\frac{0}{0}$ belirsizlikleri giderildikten sonra elde edilen sonuç gerçel sayı çıkmayabilir.

YANIT "E"

6. $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}}$ **kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

ÇÖZÜM

$x \to 1^+$ için $\frac{0}{0}$ olduğundan L'Hospital teoremi uygulanır.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}\right)'}{\left(\sqrt{x-1}\right)'} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}-\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+3}}-\frac{3}{2\sqrt{3.1+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{1-1}}} = \frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}{\frac{1}{0}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{0}} = \frac{-1}{2}\cdot\frac{0}{1} = 0$$

YANIT "C"

7. $\lim\limits_{x\to y} \frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ **nedir?**

A) 2y B) 3y C) 5y D) $\frac{20}{3}y$ E) $-\infty$

ÇÖZÜM

$x \to y$ için $\frac{0}{0}$ dir. L'Hospital teoremi uygulanır (y sabit sayı gibi düşünülmeli)

$$\lim_{x\to y} \frac{\left(x\sqrt{x}-y\sqrt{y}\right)'}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)'} = \lim_{x\to y} \frac{\left(x^{\frac{3}{2}}-y\sqrt{y}\right)'}{\left(x^{\frac{1}{2}}-\sqrt{y}\right)'}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to y} \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to y} 3x = 3y$$

YANIT "B"

8. $\lim\limits_{x\to y} \frac{x^3-xy^2-x^2y+y^3}{x^3+x^2y-5xy^2+3y^3}$ **nedir?**

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 6

ÇÖZÜM

$x \to y$ için $\frac{0}{0}$ dır. L'Hospital teoremi uygulanır. Türev alırken y sabit sayı gibi düşünülmelidir.

$$\lim_{x\to y} \frac{\left(x^3-xy^2-x^2y+y^3\right)'}{\left(x^3+x^2y-5xy^2+3y^3\right)'} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to y} \frac{3x^2-y^2-2xy}{3x^2+2xy-5y^2} = \frac{3y^2-y^2-2y^2}{3y^2+2y^2-5y^2} = \frac{0}{0}$$

Tekrar L'Hospital kuralı uygulanırsa

$$\lim_{x\to y} \frac{\left(3x^2-y^2-2xy\right)'}{\left(3x^2+2xy-5y^2\right)'}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to y} \frac{6x-2y}{6x+2y} = \frac{4y}{8y} = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

YANIT "A"

9. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6}-2}{x^2-1}$ **kaçtır?**

A) $\frac{1}{24}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{6}$ D) 1 E) 12

ÇÖZÜM

$x \to 1$ için $\frac{0}{0}$ dır. L'Hospital teoremi uygulanır.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{2x+6}-2\right)'}{\left(x^2-1\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+6)^2}}}{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{(2.1+6)^2}}}{2.1}=\frac{\frac{2}{3.4}}{2}=\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12} \text{ olur.}$$

YANIT "B"

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}$ **kaçtır?**

A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 3

ÇÖZÜM

$x \to 0$ için $\frac{0}{0}$ dır. L'Hospital kuralı uygulanır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x-\sin 2x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}$$

$$=\frac{1+2}{1-2}=-3 \text{ bulunur.}$$

YANIT "A"

11. $\lim\limits_{x\to \pi^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x-\pi}}$ **kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

ÇÖZÜM

$x \to \pi^+$ için $\frac{0}{0}$ dır.

L'Hospital teoremi uygulanır.

$$\lim_{x\to \pi^+}\frac{(\sin x)'}{\left(\sqrt{x-\pi}\right)'}=\lim_{x\to \pi^+}\frac{\cos x}{\frac{1}{2\sqrt{x-\pi}}}$$

$$=\cos \pi^+ .2\sqrt{\pi^+-\pi}$$

$$=-1.0=0$$

YANIT "C"

12. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{\sin x}}$ **kaçtır?**

A) –1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 2

ÇÖZÜM

$x \to 0^+$ için $\frac{0}{0}$ L'Hospital teoremi uygulanır.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\sin\sqrt{x}\right)'}{\left(2\sqrt{\sin x}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}}{\frac{2\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\sqrt{x}}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{\sin x}{x}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\cdot 1=\frac{1}{2} \text{ olur.}$$

YANIT "D"

13. $\lim\limits_{x\to y}\frac{(x-y)^2}{1-\cos(x-y)}$ **nedir?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

ÇÖZÜM

$x \to y$ $\frac{0}{0}$ L'Hospital teoremi uygulanır.

$$\lim_{x\to y}\frac{\left[(x-y)^2\right]'}{\left[1-\cos(x-y)\right]'}=\lim_{x\to y}\frac{2(x-y).1}{\sin(x-y)}$$

$$=\lim_{x\to y}2\lim_{x\to y}\underbrace{\frac{(x-y)}{\sin(x-y)}}_{1}$$

$$=2.1=2 \text{ bulunur.}$$

YANIT "E"

14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-\tan 3x}{\sin 7x}$ **kaçtır?**

A) $-\frac{1}{7}$ B) 0 C) $\frac{1}{7}$ D) 1 E) 7

ÇÖZÜM

$x \to 0$ için $\frac{0}{0}$, L'Hospital teoremi uygulanır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2x-\tan 3x)'}{(\sin 7x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2-3\left(1+\tan^2 3x\right)}{7\cos 7x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2-3(1+0)}{7.1} = \frac{-1}{7}$$

YANIT "A"

15. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}\dfrac{\cos 4x}{\cos 2x-\sin 2x}$ **kaçtır?**

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$
D) 4 E) ∞

ÇÖZÜM

$x \to \frac{\pi}{8}$ için $\frac{0}{0}$ L'Hospital teoremi uygulanır.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\frac{(\cos 4x)'}{(\cos 2x-\sin 2x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\frac{-4\sin 4x}{-2\sin 2x-2\cos 2x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\frac{2\sin 4x}{\sin 2x+\cos 2x}$$

$$= \frac{2\cdot\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{2.1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

YANIT "A"

16. $\lim\limits_{a\to x}\dfrac{\tan(x-a)}{4x^2-4a^2}$ **nedir?**

A) $8x$ B) $16x$ C) 0 D) $\frac{1}{8x}$ E) $\frac{1}{16x}$

ÇÖZÜM

$a \to x$ için $\frac{0}{0}$, L'Hospital teoremi uygulanır.

$$\lim_{a\to x}\frac{(\tan(x-a))'}{\left(4x^2-4a^2\right)'} \quad \left(\begin{array}{c}\text{türev alırken}\\ \text{x sabit düşünülmeli}\end{array}\right)$$

$$= \frac{-\left[1+\tan^2(x-a)\right]}{-8x} = \frac{1}{8x}$$

YANIT "D"

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\sin 2x+\sin 4x}$ **kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{5}{4}$

ÇÖZÜM–1

$x \to 0$ için $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

L'Hospital teoremi uygulanırsa

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x+\sin 3x)'}{(\sin 2x+\sin 4x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x+3\cos 3x}{2\cos 2x+4\cos 4x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos 0+3.\cos 0}{2\cos 0+4\cos 0} = \frac{1+3}{2+4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ olur.}$$

YANIT "B"

ÇÖZÜM–2

L'Hospital teromini kullanmadan çözüm yapılabilir.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\sin 2x+\sin 4x}$ ifadesinin her terimini x e göre bölersek.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 2x}{x}+\frac{\sin 4x}{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}^{1}+\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}}^{3}}{\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}}_{2}+\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}}_{4}} = \frac{1+3}{2+4}$$

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ olur.}$$

YANIT "B"

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ **kaçtır?**

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) e

ÇÖZÜM

$x \to \infty$ için $\frac{\infty}{\infty}$ olur.

L'Hospital teoremi uygulanırsa,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \text{ olur.}$$

YANIT "C"

19. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln\sin x}{\ln\tan x}$ **kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) e

ÇÖZÜM

$x \to 0^+$ için $\frac{\infty}{\infty}$ olur.

L'Hospital teoremi uygulanırsa

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln\sin x)'}{(\ln\tan x)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \cos^2 x = 1 \text{ olur.}$$

YANIT "D"

20. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^{3x}}$ **kaçtır?**

A) $-\infty$ B) –1 C) 0 D) 1 E) ∞

ÇÖZÜM

$x \to \infty$ için $\frac{\infty}{\infty}$ olur. L'Hospital teoremi uygulanırsa,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{\left(e^{3x}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3e^{3x}} = \frac{1}{3.\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \text{ olur.}$$

YANIT "C"

21. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3.\ln x$ **kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) e

ÇÖZÜM

$x \to 0^+$ için $0.\infty$ olur.

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^3.\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} = \frac{\infty}{\infty}$ olur. Bu durumda L'Hospital teoremi uygularsak,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^3}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-3}{x^4}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^3}{3} = 0 \text{ olur.}$$

YANIT "C"

22. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cot x}{\cot 3x}$ **kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) ∞

ÇÖZÜM

$x \to 0$ için $\frac{\infty}{\infty}$ olur.

L'Hospital teoremini uygulamadan çözüm yapacağız.

$\cot x = \frac{1}{\tan x}$ ve $\frac{1}{\cot 3x} = \tan 3x$ olduğundan

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cot x}{\cot 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\tan x}$ olur.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$ olduğundan

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\tan x} = 3$ bulunur.

YANIT "D"

23. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{cosec} x - \cot x)$ **kaçtır?**

A) $-\infty$ B) 0 C) 1 D) π E) ∞

ÇÖZÜM

$x \to 0$ için $\infty - \infty$ olur.

$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ ve $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ olduğundan verilen limit ifadesi

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}$ şekline dönüşür.

$x \to 0$ için $\frac{0}{0}$ dır.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \text{ olur.}$$

YANIT "B"

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{5x+4}$ **kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) e D) e^3 E) e^5

ÇÖZÜM

$x\to\infty$ için 1^∞ olduğundan

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+f(x))^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} f(x).g(x)}$ uygulanabilir.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{5x+4} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{3x-2}\right)^{5x+4} \text{ olur.}$$

$f(x)=\dfrac{3}{3x-2}$ $g(x)=5x+4$ alınacak.

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{3x-2}\right)\cdot(5x+4)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15x+12}{3x-2}} = e^5 \text{ olur.}$$

YANIT "E"

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2-2}\right)^{x^3+1}$ **kaçtır?**

A) $-\infty$ B) 0 C) 1 D) e E) ∞

ÇÖZÜM

$x\to\infty$ için 1^∞ olur.

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+f(x))^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} f(x).g(x)}$ kuralını uygulayacağız.

$$\frac{x^2-1}{x^2-2}=\frac{x^2-2+1}{x^2-2}=1+\frac{1}{x^2-2} \text{ dir.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2-2}\right)^{x^3+1} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^2-2}}$$

$$= e^\infty = \infty \text{ olur.}$$

YANIT "E"

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+2}{x^3+x+1}\right)^{x^2}$ **kaçtır?**

A) e^{-2} B) e^{-1} C) 1 D) e E) e^2

ÇÖZÜM

$x\to\infty$ için 1^∞ olduğundan

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+f(x))^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} f(x).g(x)}$ uygulanabilir.

$$\begin{array}{r|l} x^3+2 & x^3+x+1 \\ \cline{2-2} \mp\; x^3\mp 2\mp 1 & 1 \\ \hline -x+1 & \end{array}$$

$$\frac{x^3+2}{x^3+x+1}=1+\frac{-x+1}{x^3+x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2}{x^3+x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-x+1}{x^3+x+1}\right)^{x^2}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-x+1}{x^3+x+1}\right)\cdot x^2}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^3+x^2}{x^3+x+1}}$$

$$= e^{-1} \text{ olur.}$$

YANIT "B"

ZAFER YAYINLARI

27. $\lim\limits_{x\to 0} x^{2x}$ **kaçtır?**

A) -1 B) 0 C) 1 D) e E) ∞

ÇÖZÜM

$x\to 0$ için 0^0 dır.

$y=x^{2x} \Rightarrow \ln y=\ln x^{2x}$

$\Rightarrow \ln y = 2x\ln x$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} y = e^{\lim\limits_{x\to 0} 2x.\ln x}$

$\lim\limits_{x\to 0} 2x.\ln x = A$ olsun.

$\Rightarrow \ln y = e^A$ olur.

$A=\lim\limits_{x\to 0} 2x.\ln x = 0.\infty$ dur.

$$\lim_{x\to 0} 2x.\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{2x}}=\frac{\infty}{\infty}$$

Bu durumda L'Hospital teoremi uygulanırsa,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{-x^2}{2}\right)$$

Bu durumda $A=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-x}{2}\right)=0$

$$\lim_{x\to 0} 2^{2x}=e^A=e^0=1 \text{ olur.}$$

YANIT "C"

28. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\cos x}$ **kaçtır?**

A) -1 B) 0 C) 1 D) e E) ∞

ÇÖZÜM

$x\to\frac{\pi}{2}$ için ∞^0 dir.

$y=(\tan x)^{\cos x} \Rightarrow \ln y = \ln(\tan x)^{\cos x}$

$\ln y = \cos x.\ln(\tan x)$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} y = e^{\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \cos x.\ln(\tan x)}$$

$$\left(\cos x = \frac{1}{\sec x}\right) \qquad = e^{\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\ln(\tan x)}{\sec x}}$$

$A = \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \dfrac{\ln(\tan x)}{\sec x}$ olduğunda

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} y = e^A$ dır.

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \dfrac{\ln(\tan x)}{\sec x} = \dfrac{\infty}{\infty}$ dır.

L'Hospital uygulanırsa,

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{\sec x\tan x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0 \text{ olur.}$$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} y = e^A = e^0 = 1$ olur.

YANIT "C"

29. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}$ **kaçtır?**

A) 1 B) e C) e^2 D) e^3 E) ∞

ÇÖZÜM

$x\to 1$ için 1^∞ olur.

$y = x^{\frac{1}{x-1}} \Rightarrow \ln y = \ln x^{\frac{1}{x-1}}$

$$\ln y = \frac{1}{x-1}\cdot\ln x$$

$$\lim_{x\to 1}\ln y = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1} y = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}}$$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1} = \dfrac{0}{0}$ L'Hospital teoremi uygulanırsa

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} y = e^1 = e$

YANIT "B"

30. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sec 3x.\cos 5x$ **kaçtır?**

A) $-\frac{5}{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) 0

D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

ÇÖZÜM

$x\to\frac{\pi}{2}$ için $0.\infty$ dur. $\sec 3x = \dfrac{1}{\cos 3x}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 5x}{\cos 3x} = \dfrac{0}{0}$ olur.

L' Hospital teoremi uygulanır.

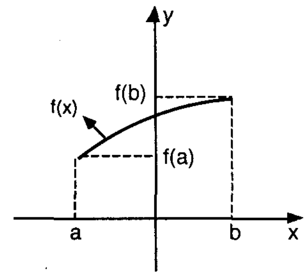
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-5\sin 5x}{-3\sin 3x} = -\dfrac{5}{3}$ olur.

YANIT "A"

ARTAN VE AZALAN FONKSİYONLAR

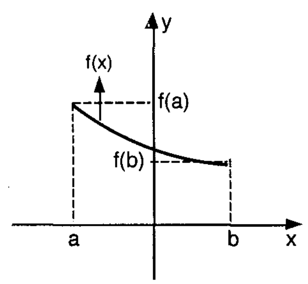
TANIM: **f, [a,b] de tanımlı bir fonksiyon olsun.**

$\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ ve $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonuna [a,b] de artan fonksiyon denir.



TANIM: **f, [a,b] de tanımlı bir fonksiyon olsun.**

$\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ ve $x_1 < x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ ise f fonksiyonuna [a,b] de azalan fonksiyon denir.



BİR FONKSİYONUN ARTAN VEYA AZALAN OLDUĞU ARALIKLAR VE TÜREVLE İLİŞKİSİ

TEOREM: **$f : [a,b] \to R$, $f(x) = y$ fonksiyonu (a,b) aralığında türevli olsun.**

$\forall x \in (a,b)$ için,

$f'(x) > 0$ ise f, (a,b) aralığında artandır.

$f'(x) = 0$ ise f, (a,b) aralığında sabittir.

$f'(x) < 0$ ise f, (a,b) aralığında azalandır.

ÖRNEK $f : R \to R$, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ fonksiyonun **artan ve azalan olduğu bölgeleri bulunuz.**

ÇÖZÜM f nin türevini alalım ve işaretini inceleyelim.

$f'(x) = x^2 + 2x - 3$ türevin kökleri $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ dir.

3 –1

Türevin işaretine göre,

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
f'(x)	+	0	–	0	+

$x \in (-\infty, -3)$ ise $f'(x) > 0$ f, artan

$x \in (-3, 1)$ ise $f'(x) < 0$ f, azalan

$x \in [1, +\infty)$ ise $f'(x) > 0$ f, artandır.

ÖRNEK $f(x) = [0, 2\pi] \to R$, $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun **artan ve azalan olduğu bölgeleri bulunuz.**

ÇÖZÜM f nin türevini alıp işaretini inceleyelim.

$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x,\ \sin x = 0$

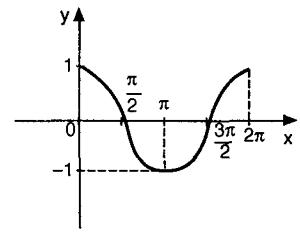
$\Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \pi,\ x_3 = 2\pi$

x	0		π		2π
f'(x)	0	–	0	+	0
		↘		↗	

Tabloya göre, $x \in (0, \pi)$ ise f, azalan

$x \in (\pi, 2\pi)$ ise f, artandır.

Bulduğumuz sonuçların doğru olduğunu fonksiyonun grafiğini çizerek görelim.



ÖRNEK $f : R \to R$, $f(x) = x^2.e^x$ fonksiyonunun **artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.**

ÇÖZÜM $f'(x) = 2x.e^x + e^x.x^2 \Rightarrow f'(x) = e^x(2x + x^2) = 0$

$e^x \neq 0;\ 2x + x^2 = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = -2$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	–	0	+	
		↗		↘		↗	

$x \in (-\infty, -2)$ ise f, artan

$x \in (-2, 0)$ ise f, azalan

$x \in (0, \infty)$ ise f, artan

ÖRNEK $f : R \to R$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ fonksiyonunun **artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.**

ÇÖZÜM $f(x) = \sqrt{x^2 + 5} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 5}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		–	0	+	
		↘		↗	

f(x), $x \in (-\infty, 0)$ için azalan

f(x), $x \in (0, \infty)$ için artandır.

FONKSİYONLARIN MAKSİMUM VE MİNİMUM NOKTALARI

TANIM: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ **bir fonksiyon ve** $c \in A$ **olsun.**

1) $\forall x \in A$ **için** $f(x) \le f(c)$ **ise,**

$f(c)$ ye f nin A daki mutlak maksimum değeri,

$(c, f(c))$ noktasına da mutlak maksimum noktası denir.

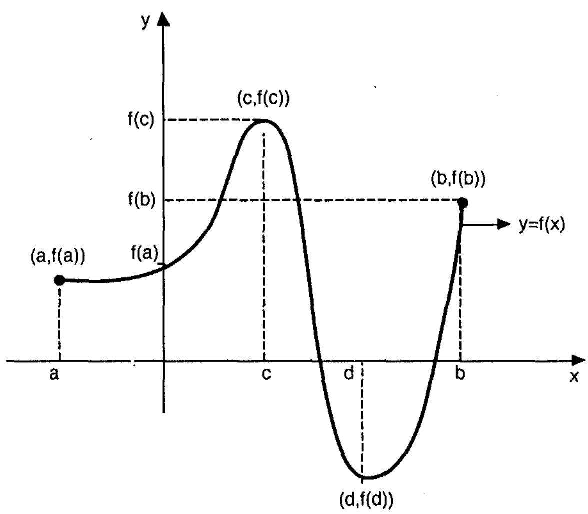
2) $\forall x \in A$ **için** $f(x) \ge f(c)$ **ise,**

$f(c)$ ye f nin A daki mutlak minimum değeri,

$(c, f(c))$ noktasına da mutlak minimum noktası denir.

3) Bir fonksiyonun değerler kümesi içinde mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerine fonksiyonun uç değerleri denir.

ÖRNEK $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **Buna göre f nin varsa mutlak maksimum ve mutlak minimum noktalarını belirleyiniz.**



ÇÖZÜM $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) \ge f(d)$ olduğundan, $f(d)$, f nin $[a,b]$ deki mutlak minimum değeri $(d, f(d))$, f nin $[a,b]$ deki mutlak minimum noktasıdır.

$\forall x \in [a,b]$ için $f(x) \le f(c)$ olduğundan,

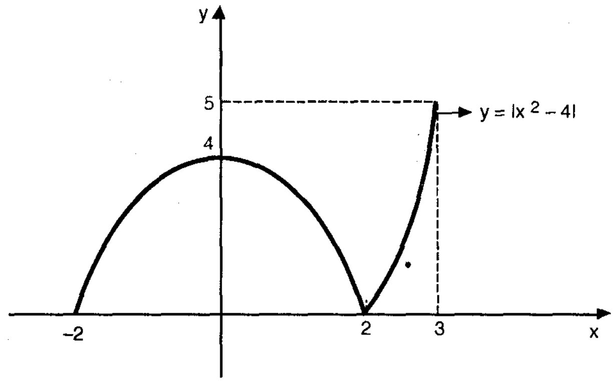
$f(c)$, f nin $[a,b]$ deki mutlak maksimum değeri,

$(c, f(c))$, f nin $[a,b]$ deki mutlak maksimum noktasıdır.

Fonksiyonunun uç değerleri $f(d)$ ve $f(c)$ dir.

ÖRNEK $f : [-2, 3] \to R$, $f(x) = f(x) = |x^2 - 4|$ fonksiyonunun **mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini (varsa) bulunuz.**

ÇÖZÜM Fonksiyonunun grafiğini çizelim.



grafiğe göre, $\forall x \in [-2, 3]$ için

$f(x) \geq f(-2) = f(2) = 0$ olduğundan mutlak minimum değeri 0, mutlak minimum noktaları ise $(-2, 0)$ ile $(2, 0)$ dır.

$\forall x \in [-2, 3]$ için $f(x) \leq f(3) = 5$ olduğundan mutlak maksimum değeri 5, mutlak maksimum noktası $(3, 5)$ dir.

UYARI: $a \in R$ olmak üzere,

$f : R \to R$, $f(x) = a$ sabit fonksiyonu için,

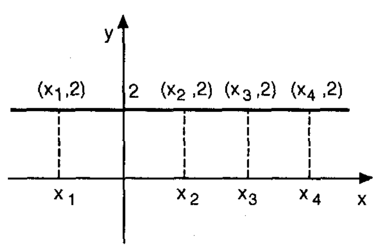
$\forall x \in R$ için $f(x) \geq a$ yazılabileceğinden, a fonksiyonunun mutlak minimum değeri,

$\forall x \in R$ için $f(x) \leq a$ yazılabileceğinden, a fonksiyonunun mutlak maksimum değeri olur.

O halde, sabit fonksiyonların mutlak maksimum ve mutlak minimum değerleri vardır ve eşittir.

ÖRNEK $R \to R$, $f(x) = 2$ fonksiyonunun **mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.**

ÇÖZÜM Fonksiyonun grafiği;



$\forall x \in R$ için, $f(x) \leq 2$ olduğundan, 2 fonksiyonun mutlak maksimum değeridir ve $\forall x \in R$ için $f(x) \geq 2$ olduğundan 2 fonksiyonun mutlak minimum değeridir. Fonksiyonun mutlak maksimum ve minimum nokta sayısı ∞ dır.

YEREL MAKSİMUM VE YEREL MİNİMUM

TANIM: **$f : [a, b] \to R$ bir fonksiyon $c \in [a,b]$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere, en az bir ε sayısı varken,**

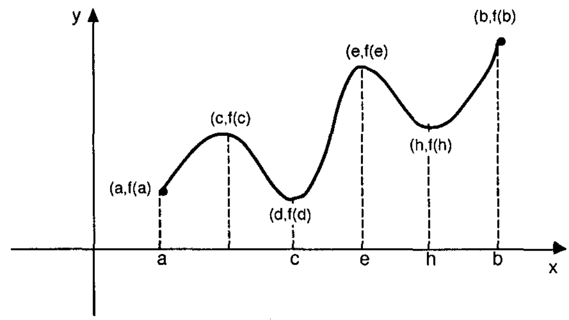
1) $\forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap [a,b]$ **için** $f(c) \geq f(x)$ **ise,**

f(c) ye fonksiyonun yerel maksimum değeri denir.

2) $\forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap [a,b]$ **için** $f(c) \leq f(x)$ **ise**

f(c) ye f fonksiyonunun yerel minimum değeri denir.

ÖRNEK $f : [a, b] \to R$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **Fonksiyonun yerel maksimum ve yerel minimum değerlerini bulunuz.**



ÇÖZÜM *f(a), f(d), f(h) değerleri fonksiyonun yerel minimum değerleri,*

f(c), f(e), f(b) değerleri fonksiyonun yerel maksimum değerleridir.

Ayrıca; $\forall x \in [a,b]$ için $f(d) \leq f(x)$ olduğundan; *f(d) mutlak minimum değeri,*

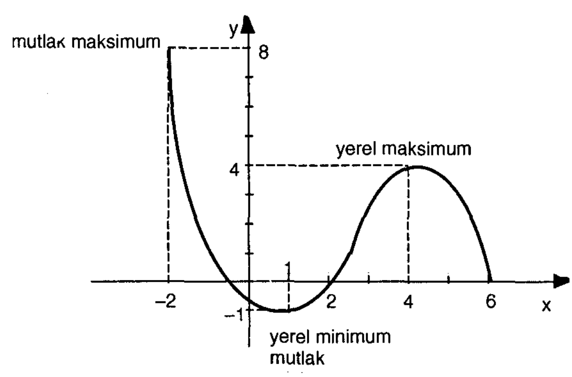
$\forall x \in [a,b]$ için $f(b) \geq f(x)$ olduğundan

f(b) mutlak maksimum değerdir.

ÖRNEK $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & -2 \leq x \leq 2 \text{ ise} \\ -x^2 + 8x - 12 & 2 < x \leq 6 \text{ ise} \end{cases}$ veriliyor.

f nin yerel maksimum ve yerel minimum değerleri ile mutlak maksimum ve mutlak minmum değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM Grafikten görülüyor ki,



x = 1 de yerel minumum vardır.
(1,–1) yerel minimum noktasıdır.
x = 4 de yerel maksimum vardır.
(4, 4) noktası yerel maksimum noktasıdır.
$\forall x \in [-2,6]$ için $f(x) \leq f(-2) = 8$ olduğundan, x = –2 de mutlak maksimum vardır.
(–2, 8) mutlak maksimum noktasıdır.
$\forall x \in [-2, 6]$ için $f(x) \geq f(-1) = -1$ olduğundan; x = –1 de mutlak minimum vardır.
(1,–1) noktası mutlak minimum noktası olduğu gibi aynı zamanda yerel minimum noktasıdır.
$\forall x \in [2, 6]$ için $f(x) \leq f(4)$ olduğundan x= 4 de f(x) in yerel maksimumu vardır.

ÖRNEK $f : [-2,1] \to R$ $f(x) = x^2 + 4|x|$ fonksiyonunun **bu aralıktaki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & -2 \le x < 0 \text{ ise} \\ x^2 + 4x & 0 \le x < 1 \text{ ise} \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & -2 \le x < 0 \text{ ise} \\ \text{yok} & x = 0 \text{ ise} \\ 2x + 4 & 0 < x < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$x = 0$ da $|x|$ işaret değiştirir. Bu nedenle sağ ve sol türevlerin eşit olmayacağı daha önce açıklanmıştı.

$x = 0$ kritik noktadır. $f(0) = 0^2 + 4.|0| = 0$

$f(-2) = (-2)^2 + 4.|-2| = 12$ $f(1) = 1^2 + 4.|1| = 5$ olur.

O halde, mutlak maksimum değer = 12, mutlak minimum değer = 0 dır.

UYARI: 1) Yerel ekstremum yerine { **rölatif ekstremum** / **bağıl ekstremum** / **yersel ekstremum da kullanılır.** }

2) Yerel ekstremumlar bazı durumlarda mutlak ekstremum olabilir.

3) $f: [a,b] \to R$, $y = f(x)$ bir fonksiyon $c \in [a,b]$ ise,

$f'(c) = 0$ veya $f'(c)$ yok ise $x = c$ fonksiyonun bir kritik noktasıdır.

4) $[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli olan $y = f(x)$ fonksiyonun mutlak ekstremumları bulunurken aşağıdaki yol izlenir.

- **Önce $f'(x) = 0$ denkleminin kökleri ve varsa fonksiyonun türevsiz olduğu noktalar yani kritik noktalar bulunur.**
- **f fonksiyonunun bulunan kritik noktalarda değerleri ile f(a) ve f(b) değerleri hesaplanır. Bunlarden en küçüğü fonksiyonun mutlak minimum değeri, en büyüğü mutlak maksimum değeridir.**

ÖRNEK $F : [-2, 2] \to R$ $F(x) = x^2 - 2x$ fonksiyonunun bu aralıktaki **en küçük (mutlak minimum) ve en büyük (mutlak maksimum) değerlerini bulunuz.**

ÇÖZÜM $f'(x) = 2x - 2$, $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ kritik noktalardır.

Şimdi; $f(-2)$, $f(1)$ ve $f(2)$ değerlerini bulup, sıralayalım.

$f(-2) = (-2)^2 - 2.(-2) = 8$

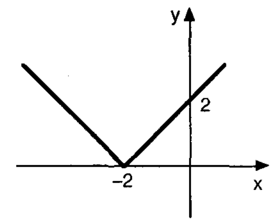
$f(1) = 1^2 - 2.1 = -1$

$f(2) = 2^2 - 2.2 = 0$ O halde $f(1) < f(2) < f(-2)$ dir.

mutlak minimum değeri – 1, mutlak maksimum değeri 8 dir.

ÖRNEK $f : R \to R$, $f(x) = |x+2|$ *fonksiyonu için* **$x = -2$ de fonksiyonun mutlak minimum değerinin olduğunu ve bu noktada fonksiyonun türevsiz olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM Fonksiyonun grafiğini çizelim.



Grafikten görülüyor ki, $\forall x \in R$ için $f(x) \geq 0$, $f(-2) = 0$ fonksiyonunun mutlak minimum değeri ve $(-2, 0)$ mutlak minimum noktasıdır.

Şimdi de fonksiyonun $x = -2$ de türevsiz olduğunu görelim.

$$f'(-2^+) = \lim_{x \to -2^+} \frac{|x+2| - |-2+2|}{x+2} = \lim_{x \to -2^+} \frac{|x+2|}{x+2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x+2)}{x+2} = +1$$

$$f'(-2^-) = \lim_{x \to -2^-} \frac{|x+2| - |-2+2|}{x+2} = \lim_{x \to -2^-} \frac{|x+2|}{x+2} = -\frac{(x-2)}{(x-2)} = -1$$

$f'(-2^+) \neq f'(-2^-)$ olduğundan türev yoktur.

TEOREM: $f : [a,b] \to R$ verilsin.

f, $[a,b]$ de sürekli ve $c \in [a,b]$ için $f(c)$, f nin mutlak ekstremum değeri ise $f'(c) = 0$ veya $f'(c)$ yoktur.

EKSTREMUM İÇİN I. TÜREV TESTİ

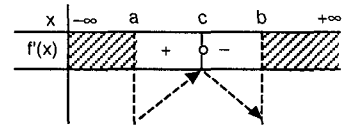
TEOREM: $f : [a,b] \to R$ bir fonksiyon $a < c < b$ ve $f'(c) = 0$ olsun. Bu durumda

a) $\left.\begin{matrix} a < x < c & \text{için} & f'(x) > 0 \\ c < x < b & \text{için} & f'(x) < 0 \end{matrix}\right\}$ **ise f fonksiyonu c de yerel maksimuma**

b) $\left.\begin{matrix} a < x < c & \text{için} & f'(x) < 0 \\ c < x < b & \text{için} & f'(x) > 0 \end{matrix}\right\}$ **ise f fonksiyonu c de yerel minimuma sahiptir.**

İSPAT:

a) Teoremde verilenlere göre $f'(x)$ in işaret tablosunu oluşturalım.



$a < x < c$ için $f'(x) > 0$ olduğundan f fonksiyonu bu aralıkta artandır.

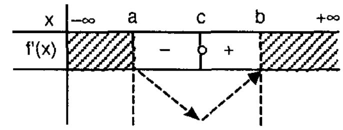
$c < x < b$ için $f'(x) < 0$ olduğundan, f fonksıyonu bu aralıkta azalandır.

Bu durumda; $\forall$ x (a,b) için $f(c) \geq f(x)$ dir.

O halde; f, c de yerel maksimuma sahiptir.

f(c) yerel maksimum değeri, (c, f(c)) ise yerel maksimum noktasıdır.

b) Yine teoremde verilenlere göre $f'(x)$ in işaret tablosunu oluşturalım.



$a > x < c$ için $f'(x) < 0$ olduğundan, f fonksiyonu bu aralıkta azalandır.

$c < x < b$ için $f'(x) > 0$ olduğundan f fonksiyonu bu aralıkta artandır.

Bu durumda; $\forall x \in (a,b)$ için $f(c) \leq f(x)$ dir.

O halde; f, c de yerel minimuma sahiptir.

f(c), yerel minimum değeri, (c, f(c)) ise yerel minimum noktasıdır.

ÖRNEK

$f : R \to R$, $y = f(x)$ fonksiyonunun türevinin işaret tablosu aşağıda verilmiştir. **Buna göre, fonksiyonun artan veya azalan olduğu aralıkları belirleyerek varsa fonksiyonun yerel ekstremum noktalarını bulunuz.**

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	0	−	0	−	

ÇÖZÜM

$x \in (-\infty, x_1)$ için $f'(x) < 0$ olduğundan **f azalan**

$x \in (x_1, x_2)$ için $f'(x) > 0$ olduğundan **f artan**

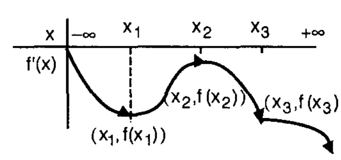
$x \in (x_2, x_3)$ için $f'(x) < 0$ olduğundan **f azalan**

$x \in (x_3, +\infty)$ için $f'(x)<0$ olduğundan **f azalandır.**

$(x_1, f(x_1))$ noktası yerel minimum noktası,

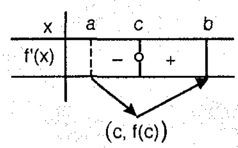
$(x_2, f(x_2))$ noktası yerel maksimum noktasıdır

$(x_3, f(x_3))$ noktası ise $f'(x_3) = 0$ olmasına karşın bir yersel ekstremum noktası değildir.



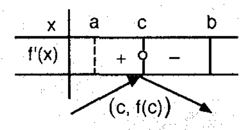
UYARI: $y = f(x)$ fonksiyonu için $f'(c) = 0$ ve $f'(x)$, $x = c$ de işaret değiştiriyor ise,

1) f' nin işareti yandaki tablodaki gibi ise



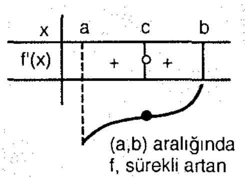
f fonksiyonunun $x = c$ için yersel minimumu vardır. $(c, f(c))$ yerel minimum noktasıdır.

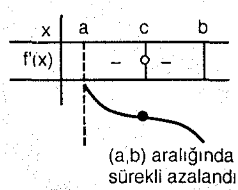
2) f' nin işareti yandaki tablodaki gibi ise



f fonksiyonunun $x = c$ için yersel maksimumu vardır. $(c, f(c))$ yerel maksimum noktasıdır.

3)

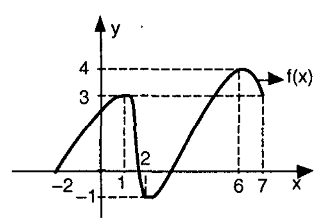




Yukarıdaki tablolarda;
$f'(c) = 0$ fakat $x = c$ de fonksiyonun türevi işaret değiştirmiyor.
$x = c$ noktasında olduğu gibi bir fonksiyonun türevinin sıfır olduğu halde işaret değiştirmediği noktalar fonksiyonun yerel maksimum veya yerel minimum noktası değildir. Bu özellikteki noktalara fonksiyonun grafiğinin dönüm veya büküm noktası denir.
$y = f(x)$ fonksiyonun maksimum veya minimum değerlerine ekstremum değerleri denir. Ancak, mutlak maksimum veya mutlak minimum değer aldığı nokta sayısı birden çok veya sabit fonksiyonda olduğu gibi sonsuz tane olabilir.
Yersel maksimum veya yersel minimum değerler ve bu değerleri aldığı nokta sayısı 1 den çok olabilir.
$x = a$ da minimum değere ulaşıyorsa, $(a, f(a))$ minimum noktası ve $f(a)$ minimum değer,
$x = b$ de maksimum değere ulaşıyorsa, $(b, f(b))$ maksimum noktası ve $f(b)$ maksimum değerdir.

ÖRNEK

Şekilde $f:[-2,7] \to [-1,4]$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

a) Fonksiyonun yerel ekstremum noktalarını ve yerel ekstremum değerlerini,

b) Fonksiyonun mutlak ekstremum noktalarını ve mutlak ekstremum değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM **a)** (1,3) noktası yerel maksimum noktası ve f(1) = 3 yerel maksimum değerdir.

(2, – 1) noktası minimum noktası ve f(2) = –1 yerel minimum değerdir.

(6,4) noktası yerel maksimum noktası ve f(6) = 4 yerel maksimum değerdir.

b) (2, – 1) noktası mutlak minimum noktası ve f(2) = –1 mutlak minimum değerdir.

$\forall x \in [-2, 7]$ için $f(x) \in [-1, 4]$ olduğu fonksiyonun tanımında verildiği gibi grafikten de görülmektedir.

(6,4) noktası mutlak maksimum noktası ve f(6) = 4 mutlak maksimum değeridir.

TEOREM: **$f : [a,b] \to R$ bir fonksiyon $c \in (a,b)$ noktasında f fonksiyonun bir yerel ekstremum (yerel maksimum veya yerel minimum) var ve f fonksiyonu x = c de türevlenebiliyor ise f′(c) = 0 dır.**

İSPAT: Teoremin ispatını yaparken x = c noktasında fonksiyonun yerel maksimumunun f(c) olduğunu kabul edeceğiz.

Fonksiyonun x = c de türevi varsa soldan ve sağdan türevleri eşittir.

$$f'(c^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c) = k \in R \text{ dir.}$$

f(c), c nin bir komşuluğunda yerel maksimum değer olarak kabul edilmişti. Buna göre, olabildiği kadar küçük seçtiğimiz h için;

$f(c) \geq f(c+h)$ ve

$f(c+h) - f(c) \leq 0$ elde edilir.

$h > 0$ ise $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$ olur. $\left(\dfrac{(-)}{(+)} = -\right)$

$h \to o^+$ için limit alınırsa, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$ $\quad f'(c^+) = f'(c) \leq 0$

$h < 0$ ise $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 \left(\dfrac{(-)}{(-)} = +\right)$

$h \to 0^-$ için limit alınırsa; $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$

$f'(c) = f'(c) \geq 0$ olur.

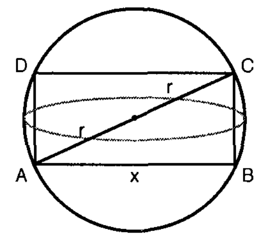
UYARI: Teoremin karşıtı doğru değildir.

x = a gibi bir noktada f′(a) = 0 ise x = a fonksiyonun yerel ekstremum değerini aldığı nokta olmayabilir.

Ayrıca; mutlak maksimum ve mutlak minimum noktalarında fonksiyon türevsizde olabilir.

ÖRNEK **r yarıçaplı çember içine çizilen maksimum alanlı dikdörtgenin boyutlarını r cinsinden hesaplayınız.**

ÇÖZÜM Dikdörtgenin boyutları x ve y olsun. Şekildeki dik üçgende pisagor teoreminden;



$x^2 + y^2 = (2r)^2$

$y = \sqrt{4r^2 - x^2}$ bulunur.

Dikdörtgenin alanı: $A_{(x,y)} = x.y \Rightarrow A(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2}$ olur.

maksimum alanı bulmak için türev alırsak;

$$A'(x) = 1.\sqrt{4r^2 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{4r^2 - x^2}} \cdot x$$

$$A'(x) = \frac{4r^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$$

$$A'(x) = \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow -2x^2 + 4r^2 = 0$$

$$\Rightarrow -2x^2 = -4r^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 2r^2$$

$$\Rightarrow x = \mp\sqrt{2}r$$

x uzunluk olduğundan; $x = \sqrt{2}r$

$$y = \sqrt{4r^2 - \left(\sqrt{2}r\right)^2}$$

$$y = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $x, y \in R^+$ ve $x + y = 10$ ise x^2y^3 çarpımının maksimum olması için **x ve y kaç olmalıdır?**

ÇÖZÜM $x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$ $\quad Ç_{(x,y)} = x^2y^3 \Rightarrow Ç(x) = x^2.(10 - x)^3$

maksimum değerin bulunması için türev alıp köklerini bulalım.

$Ç'(x) = 2x.(10 - x)^3 + 3.(10 - x)^2.(-1).x^2$

$Ç'(x) = x(10 - x)^2(2(10 - x) - 3x)$

$= x(10 - x)^2.(20 - 5x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 10,\ x_3 = 4$

Türevin işaret tablosunu oluşturursak,

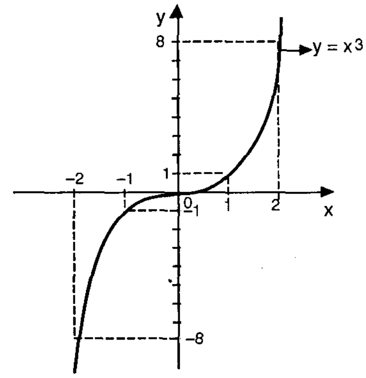
x = 4 için maksimum değer olduğunu tablodan görüyoruz.

$x + y = 10 \Rightarrow y = 6$ olur.

x		0		4		10	
Ç'(x)	–	‖	+	0	–	0	–
			↗	max.	↘		

(10 sayısı türevin 2 katlı kökü olduğundan işareti etkilemediğine dikkat ediniz.)

ÖRNEK $R \to R$, $f(x) = x^3$ fonksiyonu için $f'(0) = 0$ olduğu halde $x = 0$ noktasının bir yersel ekstremum noktası olmadığını gösteriniz.



ÇÖZÜM $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$ grafikten (0,0) noktasının yersel ekstremum noktası olmadığı açıkça görülmektedir.

ÖRNEK $f : R - \{1\} \to R$, $f(x) = \dfrac{ax+5}{x-1}$ fonksiyonunun artmayan bir fonksiyon olması için **a hangi aralıkta olmalıdır?**

ÇÖZÜM $f(x) = \dfrac{ax+5}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{a.(-1) - 1.5}{(x-1)^2} = \dfrac{-a-5}{(x-1)^2}$ olur.

fonksiyon artmayan bir fonksiyon ise sabit veya azalan bir fonksiyondur.

Buna göre, sabit fonksiyon ise $f'(0) = 0$

azalan fonksiyon ise $f'(x) < 0$ dır.

O halde, $f'(x) \leq 0$ olmalıdır. $\dfrac{-a-5}{(x-1)^2} \leq 0 \Rightarrow -a-5 \leq 0$

$-a \leq 5$

$a \geq -5$ olmalıdır.

MAKSİMUM VE MİNİMUM PROBLEMLERİ

ÖRNEK y toplam maliyeti, x üretilen mal miktarını göstermek üzere, bir malın toplam maliyeti $y = \dfrac{x}{4} + \dfrac{100}{(x+3)}$ olduğuna göre **maliyetin minimum olması için bu maldan kaç adet üretilmelidir?**

ÇÖZÜM $y' = \dfrac{1}{4} - \dfrac{100}{(x+3)^2} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{4} - \dfrac{100}{(x+3)^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{(x+3)^2 - 400}{4(x+3)^2}$

$\Rightarrow (x+3)^3 - 400 = 0$

$\Rightarrow \sqrt{(x+3)^2} = \sqrt{400}$

x mal miktarı olduğundan;

$x + 3 > 0$ dır. $\Rightarrow |x+3| = 20$

$\Rightarrow x + 3 = 20$

$\Rightarrow x = 17$ tane üretilmelidir.

ÖRNEK $f: R^+ \to R, f(x) = \ln \dfrac{2x}{x^2+1}$ fonksiyonunun **varsa yerel ekstremum değerlerini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$f(x) = \ln \frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{\dfrac{2(x^2+1)-2x.(2x)}{(x^2+1)^2}}{\dfrac{2x}{x^2+1}} \text{ olur. } \left(y = \ln f(x) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ kuralı uygulandı} \right)$$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}}{\dfrac{2x}{x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{x^2+1}{2x} = \frac{-2x^2+2}{2x(x^2+1)} \text{ olur.}$$

$f'(0) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 2 = 0,\ x^2 = 1,\ x = \mp 1$ f, fonksiyonu $x > 0$ için tanımlı olduğundan,

	0		1	
f'	‖	+		−
f	‖	↗	yerel maksimum noktası (1, 0)	↘

Yerel maksimum değer,

$f(1) = \ln \dfrac{2}{2} = \ln 1 = 0$ bulunur.

ÖRNEK $R \to R, f(x) = \dfrac{3x^2+4x-1}{2x^2+1}$ fonksiyonunun **ekstremum noktalarının apsislerinin toplamını bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$f(x) = \frac{3x^2+4x-1}{2x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(6x+4)(2x^2+1)-(4x).(3x^2+4x-1)}{\left(2x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{12x^3+6x+8x^2+4-12x^3-16x^2+4x}{\left(2x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-8x^2+10x+4}{\left(2x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-8x^2+10x+4}{\left(2x^2+1\right)^2} = 0 \Rightarrow -8x^2+10x+4 = 0$$

$\Delta = 100 - 4.(-8)\ .\ 4$

$\Delta = 100 + 128$

$\Delta = 288 > 0$ denklemimin iki farklı reel kökü vardır. Bu kökler yerel ekstremum noktalarının aspisleri olur.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde;

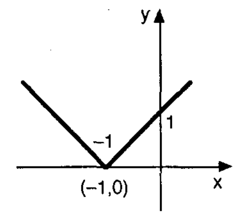
$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ olduğundan; $x_1 + x_2 = \dfrac{-10}{-8} = \dfrac{5}{4}$ bulunur.

ÖRNEK $f:R \to R,\ f(x)=\sqrt{(x-1)^2}$ fonksiyonunun **yerel minimum değerini bulunuz.**

ÇÖZÜM $f(x)=\sqrt{(x-1)^2} \Rightarrow f(x)=|x-1|$ dir. $x=1$ de fonksiyonun türevi yoktur. Bu nedenle fonksiyonun yerel ekstremum noktası kritik nokta denilen $x=1$ noktasıdır. $f(1)=0$ olduğundan yerel minimum değer sıfırdır.

Grafikte görebiliriz..

(–1, 0) noktası hem yerel minimum ve hem de mutlak minimum noktasıdır.



ÖRNEK $f: R^+ \to R,\ f(x)=x.\ln x$ fonksiyonunun **artan veya azalan olduğu aralıkları belirleyerek varsa fonksiyonun yerel ekstremum değerlerini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM $f(x)=x.\ln x \Rightarrow \quad f'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}\cdot x$

$f'(x)=\ln x+1$

$\ln x+1=0,\ \ln x=-1 \Rightarrow x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

$0<x<\dfrac{1}{e} \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f$ azalandır.

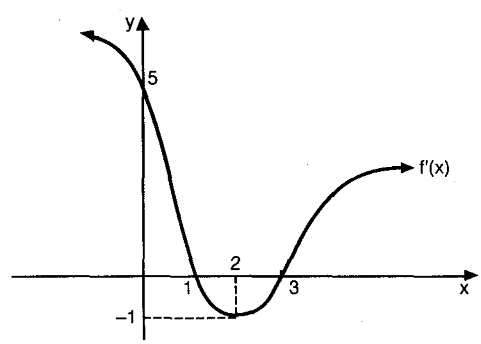
$x>\dfrac{1}{e} \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f$ artandır.

$x=\dfrac{1}{e}$ de yerel minimum var.

$f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}\cdot\ln\dfrac{1}{e} \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f'(x)	‖	–		+	

yerel minimum nok.
$\left(\frac{1}{e}, f\left(\frac{1}{e}\right)\right)$



ÖRNEK **Yanda türevinin grafiği verilen y = f(x) fonksiyonun yerel ekstremum noktalarının apsislerini belirleyiniz.**

ÇÖZÜM Türevin grafiğine göre işaret tablosunu oluşturalım.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'(x)		+	0	–	0	+	

$x=1$ noktasında türevin değeri 0 dır.

$[(+)$ dan $(-)$ ye geçtiğinden$]$ $x=1$ yerel maksimum noktasının apsisidir.

$x=3$ noktasında türevin değeri 0 dır.

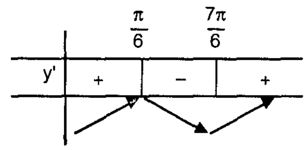
Bu noktada türev işaret değiştirdiğinden

$[(-)$ den $(+)$ ya geçtiğinden$]$ $x=3$ yerel minimum noktasının apsisidir.

ÖRNEK $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ fonksiyonunun $[0, 2\pi]$ aralığındaki **yerel ekstremum değerlerinin toplamı kaçtır?**

ÇÖZÜM $y' = \cos x - \sqrt{3}\sin x = 0 \Rightarrow \cos x = \sqrt{3}\sin x$ (Her iki tarafı cosx e bölersek)

$\Rightarrow \cot x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ veya $x = \dfrac{7\pi}{6}$



Tablodan $x = \dfrac{\pi}{6}$ da yerel maksimum $x = \dfrac{7\pi}{6}$ da yerel minimum olduğu görülüyor.

Yerel maksimum değer; $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$= 2 \text{ olur.}$$

Yerel maksimum değer; $f\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{7\pi}{6} + \sqrt{3}\cdot\cos\dfrac{7\pi}{6}$

$$= -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2 \text{ olur.}$$

Yerel ekstremum değerler toplamı: $2 + (-2) = 0$ bulunur.

ÖRNEK $y = 2\sin x + 3\cos x$ in $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ aralığındaki **en büyük değeri kaçtır?**

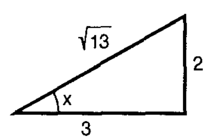
ÇÖZÜM $y' = 2\cos x - 3\sin x$ olur.

$y' = \Rightarrow 2\cos x - 3\sin x = 0 \Rightarrow 2\cos x = 3\sin x$

İki tarafı cosx e bölersek: $\tan x = \dfrac{2}{3}$ bulunur.

$\tan x = \dfrac{2}{3}$ denklemini sağlayan x ler için ekstremum vardır.

dik üçgen yardımıyla



$\sin x = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$ ve $\cos x = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$ bulunur.

$y = 2\sin x + 3\cos x$ de yerine yazılarak,

$2\cdot\dfrac{2}{\sqrt{13}} + 3\cdot\dfrac{3}{\sqrt{13}} = \dfrac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$ bulunur.

$x = 0$ için $y = 2.\sin 0 + 3\cos 0 = 3$

$x = \dfrac{\pi}{2}$ için $y = 2\cdot\sin\dfrac{\pi}{2} + 3\cdot\cos\dfrac{\pi}{2}$

$$y = 2 + 0 = 2$$

$2 < 3 < \sqrt{13}$ olduğundan $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ aralığındaki en büyük değeri $\sqrt{13}$ tür.

ÖRNEK

$f: R \to R,\ f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ fonksiyonunun **yerel ekstremum değerlerinin <u>bulunmadığını</u> gösteriniz.**

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)\cdot\left(e^x + e^{-x}\right) - \left(e^x - e^{-x}\right)\cdot\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\left(e^{2x} + 2\cdot e^0 + e^{-2x}\right) - \left(e^{2x} - 2e^x\cdot e^{-x} + e^{-2x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = 0$$

$\forall x \in R$ için $\dfrac{4}{e^x + e^{-x}} > 0$ olduğundan f fonksiyonunun yerel ekstremum değeri yoktur.

ÖRNEK

$f: R \to R,\ f(x) = -2x^3 + 6x + 1$ fonksiyonunun **artan veya azalan olduğu aralıkları belirterek varsa yerel ekstremum noktalarını bulunuz.**

ÇÖZÜM

$f(x) = -2x^3 + 6x + 1 \Rightarrow f'(x) = -6x^2 + 6$

$-6x^2 + 6 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

Tabloya göre,

$x < -1$ veya $x > 1$ için $f'(x) < 0$ olduğundan, f azalan

$-1 < x < 1$ için $f'(x) > 0$ olduğundan, f artan

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	
		↘	min $(-1, f(-1))$	↗	max $(1, f(-1))$	↘	

$x = -1$ de yerel minimum var.

$f(-1) = -2.(-1)^3 + 6.(-1) + 1$

$f(-1) = 2 - 6 + 1$

$f(-1) = -3$ ve $(-1,-3)$ yerel minimum noktasıdır.

$x = 1$ de yerel maksimum var.

$f(1) = -2.1^3 + 6.1 + 1$

$f(1) = -2 + 6 + 1$

$f(1) = 5$ ve $(1,5)$ yerel maksimum noktasıdır.

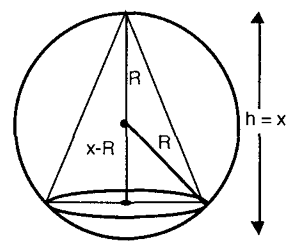
ÖRNEK $f:R \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \arctan x$ fonksiyonunun **artan veya azalan olduğu aralığı belirleyiniz.**

ÇÖZÜM $f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \neq 0$ dır.

$\frac{1}{1+x^2} > 0$ olduğundan fonksiyon R de artandır.

ÖRNEK **R yarıçaplı küre içine çizilen maksimum hacimli koninin yüksekliğini bulunuz.**

ÇÖZÜM Kürenin yarıçapı = R



Koninin taban yarıçapı = r

Koninin yüksekliği = h = x

Koninin hacmi $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ dır.

Pisagor teoreminden $r^2 = R^2 - (x-R)^2$

$r^2 = R^2 - x^2 + 2xR - R^2$

$r^2 = 2xR - x^2$ olur.

Koninin hacmi: H $H = \frac{1}{3}\pi.r^2.h$

$H_{(x)} = \frac{1}{3}\pi.(2xR - x^2).x$ (x ile çarpılarak)

$H_{(x)} = \frac{1}{3}\pi.(2x^2R - x^3)$ bulunur.

$H'_{(x)} = \frac{\pi}{3}\left(4Rx - 3x^2\right) = 0 \Rightarrow x\left(4R - 3x\right) = 0$

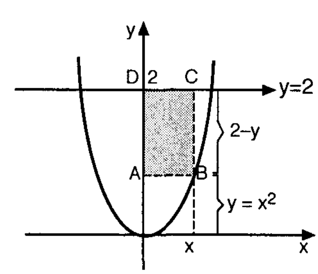
$x = 0$ veya $4R - 3x = 0$

$x = \frac{4}{3}R$

Koninin yüksekliği $= h = x = \frac{4}{3}R$ bulunur.

ÖRNEK Bir kenarı $y = 2$ doğrusunun diğer kenarı y ekseni üzerinde bir köşesi $y = x^2$ parabolü üzerinde bulunan **maksimum alanlı dikdörtgenin alanını bulunuz.**

ÇÖZÜM $B(x, y) = (x, x^2)$



$|BC| = 2 - y = 2 - x^2$

ABCD dikdörtgeninin alanı: $A(x) = |AB| \cdot |BC| = x \cdot (2 - x^2)$

$A(x) = 2x - x^3$

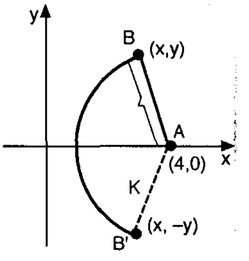
$A'(x) = 2 - 3x^2 = 0$

$= -3x^2 = -2 \Rightarrow x = \mp\sqrt{\frac{2}{3}}$ $x \in R^+$ olacağından

$A(x) = 2\sqrt{\frac{2}{3}} - \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3$ $A(x) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$ bulunur.

ÖRNEK $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolü üzenide bulunan noktalardan **A(4,0) noktasına <u>en yakın</u> olan noktasının koordinatlarının toplamını bulunuz.**

ÇÖZÜM Şekilde hiperbolün grafiğinin bir parçasını çizdik. (4,0) noktasına en yakın iki nokta vardır. Bunlardan biri B ise B′ dür.



$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow 1 \Rightarrow y^2 = x^2 - 1$ olur.

İki nokta arasındaki uzaklık formülüne göre;

$|AB| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$ $y^2 = x^2 - 1$ yerine,

$K(x) = \sqrt{(x-4)^2 + x^2 - 1} = \sqrt{2x^2 - 8x + 15}$ olur.

uzaklığın minimum olması için $K'(x) = 0$ olmalıdır.

$$K'(x) = \frac{4x-8}{2\sqrt{2x^2-8x+15}} = 0 \Rightarrow x = 2$$

$y^2 = x^2 - 1$ idi. $x = 2$ için $y = \mp\sqrt{3}$

$B(2,\sqrt{3})$ ve $B'(2,-\sqrt{3})$ noktalarının koordinatlarının toplamı 4 bulunur.

ÖRNEK $x, y \in R$ ve $x - y = 40$ olduğuna göre, **bu iki sayının çarpımının minimum değeri nedir?**

ÇÖZÜM $x - y = 40 \Rightarrow y = x - 40$ olur. Çarpım x ve y ye göre değişeceğinden x ve y nin bir fonksiyonu olarak,

$Ç(x,y) = x \,.\, y$ yazılır ve y nin x türünden değerini yerine yazarsak bu durumda çarpım fonksiyonu olan Ç yalnız x in bir fonksiyonu olarak;

$Ç(x) = x\,.\,(x-40) \Rightarrow Ç(x) = x^2 - 40x$

$Ç'(x) = 2x - 40$

$Ç'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 40 \Rightarrow x = 20$ olur.

Ç(x) de $x = 20$ yazılırsa,

$Ç(20) = 20.(20-40) = -400$ bulunur.

ÖRNEK $x, y \in R$ ve $\frac{x}{2} + y = 100$ veriliyor. $A = x.y$ ise **A nın <u>en büyük</u> değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM $\frac{x}{2} + y = 100 \Rightarrow y = 100 - \frac{x}{2}$ olur.

$A(x, y) = x\,.\,y \Rightarrow$ $A(x) = x.\left(100 - \frac{x}{2}\right)$

$A(x) = 100x - \frac{x^2}{2}$ olur.

$A'(x) = 100 - x$

$A'(x) = 0 \Rightarrow 100 - x = 0 \Rightarrow x = 100$

$A(x) = x.\left(100 - \frac{x}{2}\right)$ de $x = 100$ yazılırsa,

$A(100) = 100.(100 - 50) = 5000$ bulunur.

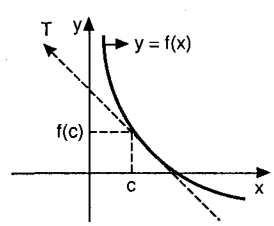
EĞRİLERİN ÇUKURLUĞU (KONKAVİTE) BÜKÜLME VE BÜKÜM(DÖNÜM) NOKTASI

TANIM: **$A \subset R$, $f : R \to R$ türevlenebilir bir fonksiyon. $c \in A$ ve T, $y = f(x)$ eğrisinin $(c, f(c))$ noktasındaki teğeti olsun.**

1) Eğri c nin en az bir komşuluğunda T teğetinin üst tarafında kalıyorsa, f, $x = c$ de yukarı bükey, konveks (çukur)dur denir.

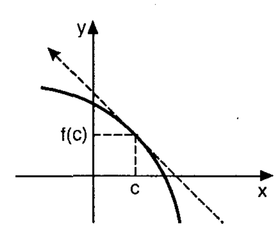
2) Eğri c nin en az bir komşuluğunda T teğetinin alt tarafında kalıyarsa, f, $x = c$ de aşağı bükey, konkav (tümsek) dir denir.

I



Şekildeki f eğrisi; $(c, f(c))$de çukur (yukarı bükey) veya konveks (içbükey) dir.

II

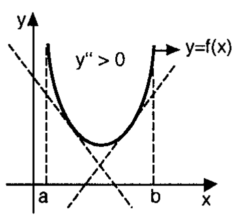


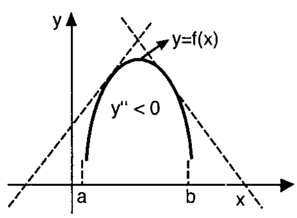
II. şekildeki f eğrisi $(c, f(c))$de tümsek (aşağı bükey) veya konkav (dış bükey) dir.

TEOREM: **$(a, b) \subset R$, $f: (a,b) \to R$, $f(x) = y$ fonksiyonun $\forall x \in (a,b)$ için birinci ve ikinci türevleri alınabiliyorsa,**

1) $\forall x$ (a,b) için $f''(x) > 0$ ise f, (a,b) aralığında yukarı bükey (çukur) dir.

2) $\forall x \in (a,b)$ için $f''(x) < 0$ ise f, (a,b) aralığında aşağı bükey (tümsek) dir.





ÖRNEK

$f: R \to R$, $f(x) = x^3 + 12x^2 + 11$ fonksiyonunun **çukur veya tümsek olduğu aralıkları bulunuz.**

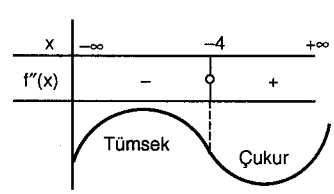
ÇÖZÜM

$f(x) = x^3 + 12x^2 + 11 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 24x \Rightarrow f''(x) = 6x + 24$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 24 = 0 \Rightarrow x = -4$

1) $\forall x \in (-\infty, -4)$ için $f''(x) < 0$ olduğundan f bu aralıkta tümsek

2) $\forall x \in (-4, \infty)$ için $f''(x) > 0$ olduğundan f bu aralıkta çukurdur.



ÖRNEK $f : R \to R$, $f(x) = x^2 - 4x$ fonksiyonunun eğrisinin $\forall x \in R$ **için çukur olduğunu gösteriniz.**

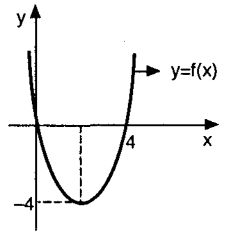
ÇÖZÜM $f(x) = x^2 - 4x \Rightarrow f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f''(x) = 2$ olur.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f''(x)$	+	+	+

$\forall x \in R$ için $f''(x) > 0$ dır.

"f eğrisi R de çukurdur" denir.

Bunu grafik çizerek görelim.

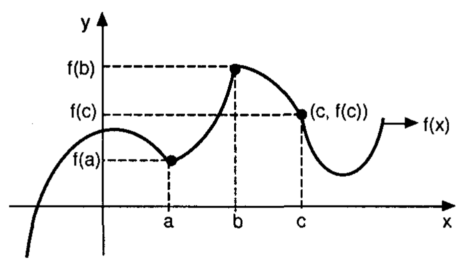


BÜKÜM (DÖNÜM) NOKTASI

TANIM: Bir f fonksiyonunun sürekli olduğu, çukurluğun yön değiştirdiği (çukur iken tümsek veya tümsek iken çukur olduğu) noktaya f nin dönüm noktası veya büküm noktası denir.

ÖRNEK Şekildeki, $f: R \to R$ $f(x) = y$ fonksiyonu için

$(a, f(a))$, $(b, f(b))$, $(c, f(c))$ dönüm noktalarıdır.



TEOREM: f fonksiyonunun $x = a$ da birinci ve ikinci türevleri var ve ikinci türev fonksiyonu $x = a$ da sürekli olsun. f fonksiyonunun belirttiği eğrinin çukurluğu a noktasında yön değiştiriyorsa $f''(a) = 0$ dır.

İSPAT: $(a-\varepsilon, a)$ aralığında çukurluk aşağı doğru,

$(a, a+\varepsilon)$ aralığında çukurluk yukarı doğru olsun.

$x \in (a-\varepsilon, a) \Rightarrow f''(x) < 0$

$x \in (a, a+\varepsilon) \Rightarrow f''(x) > 0$

$f''(a)$ fonksiyonu $x = a$ da sürekli olduğundan, $f''(a) = 0$ olacağı açıktır.

UYARI: f"(a)= 0 ise (a, f(a)) noktasının f(x)'in dönüm noktası olabilmesi için f"fx), x= a da işaret değiştirmelidir.

ÖRNEK **$f(x) = x^2.e^{-x}$ fonksiyonunun dönüm noktalarının apsisleri çarpımı kaçtır?**

ÇÖZÜM $f(x) = x^2.e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 2x.e^{-x} - x^2.e^{-x}$

$\Rightarrow f''(x) = 2.e^{-x} - 2x.e^{-x} - 2x.e^{-x} + x^2.e^{-x}$

$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$

$f''(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(x^2 - 4x + 2) = 0 \Rightarrow e^{-x} = 0$ ve $x^2 - 4x + 2 = 0$ $\quad e^{-x} \neq 0$ dır.

$x^2 - 4x + 2 = 0 \qquad \Delta = 16 - 4.2 \Rightarrow \Delta = 8$

$$x_{1,2} = \frac{+4 \mp \sqrt{8}}{2} \Rightarrow x_1 = 2 + \sqrt{2} \qquad x_2 = 2 - \sqrt{2}$$

Tablodan, $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$ ve $(2 + \sqrt{2}, +\infty)$ aralığında fonksiyonun çukur, $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ aralığında fonksiyonun tümsek olduğu görülür.

x	$-\infty$		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
f''(x)		+	0	–	0	+	

İkinci türev fonksiyonu $x = 2 - \sqrt{2}$, ve $x = 2 + \sqrt{2}$ apsisli noktalarda işaret değiştirdiğinden $2 - \sqrt{2}$ ile $2 + \sqrt{2}$ dönüm noktalarının apsisleridir.

$(2 - \sqrt{2}).(2 + \sqrt{2}) = 4 - 2 = 2$ bulunur.

ÖRNEK $[0,2\pi] \to R$, $f(x) = \sin 2x + x^2$ fonksiyonunun (varsa) **dönüm noktalarının apsislerini belirleyiniz.**

ÇÖZÜM $f(x) = \sin 2x + x^2 \Rightarrow f'(x) = 2\cos 2x + 2x$

$\Rightarrow f''(x) = -4\sin 2x + 2$ dir.

$f''(x) = 0 \Rightarrow -4\sin 2x + 2 = 0$

x	$-\infty$		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{13\pi}{12}$		$\frac{17\pi}{12}$		$+\infty$
f''(x)		+	0	–	0	+	0	–	0	+	
			D.N		D.N		D.N		D.N		

$\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in Z$ veya $2x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in Z$

$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \qquad x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$

$k = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{12} \qquad k = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{5\pi}{12}$

$k = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{13\pi}{12} \qquad k = 1 \Rightarrow x_4 = \frac{17\pi}{12}$ dir.

$x_1 = \frac{\pi}{12}, x_2 = \frac{13\pi}{12}, x_3 = \frac{5\pi}{12}$ ve $x_4 = \frac{17\pi}{12}$ fonksiyonunun dönüm noktalarının apsisleridir. Çünkü $f''(x)$ bu noktalarda işaret değiştirmektedir.

ÖRNEK $f : R \to R$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x$ fonksiyonunun **tümsek veya çukur olduğu aralıkları belirleyiniz, varsa dönüm noktasını bulunuz.**

ÇÖZÜM $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 3 \Rightarrow f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0$ için $6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

$f(2) = 2^3 - 6.2^2 + 3.2 = 8 - 24 + 6 = -10$

Tablodan, $x \in (-\infty, 2) \Rightarrow f''(x) < 0$ $\quad (-\infty, 2)$ de f tümsek,

$x \in (2, +\infty) \Rightarrow f''(x) > 0$ $\quad (2, \infty)$ de f çukur.

Dönüm noktası $(2, -10)$ bulunur.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f''(x)		–	0	+	
			–10 D.N (2,–10)		

ÖRNEK f: R →R, $f(x) = x^4 + 1$ foksiyonunun **dönüm noktasını varsa bulunuz.**

ÇÖZÜM $f(x) = x^4 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f''(x) = 12x^2$

$f''(0) = 0 \Rightarrow 12x^2 = 0$

$x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	+

x = 0 için $f''(x)$ işaret değiştirmediğinden fonksiyonun dönüm noktası yoktur.

MAKSİMUM VE MİNİMUM DEĞERLERİN BULUNUŞUNDA İKİNCİ TÜREVİN KULLANILIŞI

TEOREM: f : (a,b) → R ye bir fonksiyon, x ∈ (a,b), f nin (a,b) aralığında birinci ve ikinci türevleri var ve f′(c) = 0 olsun.

1) $f''(c) > 0$ ise (c, f(c)) f nin yerel minimum noktası f(c) minimum değeridir.

2) $f''(c) < 0$ ise (c, f(c)) f nin yerel maksimum noktası f(c) maksimum değeridir.

3) $f''(c)= 0$ ise (c, f(c)) f nin yerel ekstremum noktası değildir.

ÖRNEK f: R → R, $f(x) = x^2 + 4x - 6$ fonksiyonunu **yerel minimum değerini ikinci türev testi ile bulunuz.**

ÇÖZÜM $f'(x) = 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$ dir.

$f''(x) = 2 \Rightarrow f''(-2) = 2 > 0$ olduğundan

(–2, f(–2)) noktası fonksiyonun yerel minimum noktasıdır.

$f(-2) = 4 - 8 - 6 = -10$ olduğundan yerel minimum (–2, –10) olarak belirlenir.

ÖRNEK $f(x) = x.e^{-x}$ fonksiyonunun **ekstremum noktasını ikinci türev testi ile bulunuz.**

ÖRNEK $f(x) = x.e^{-x} \Rightarrow f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(1 - x) = 0 \Rightarrow e^{-x} = 0$ veya $1 - x = 0$

$e^{-x} \neq 0$ olduğundan $x = 1$ bulunur.

x = 1 de bir ekstremum var mıdır? Araştıralım.

$f''(x) = -e^{-x}(1 - x) - 1.e^{-x}$ olur.

$f''(x) = -e^{-x}(1 - x + 1)$

$f''(x) = -e^{-x}(2 - x)$

$f''(1) = -e^{-1}(2 - 1) = -\frac{1}{e} < 0$ olduğundan x = 1 de yerel maksimum vardır.

ÖRNEK $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ fonksiyonuna **dönüm noktasından çizilen teğetin denklemini bulunuz.**

ÇÖZÜM $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevlerini bulalım.

$f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f''(x) = 6x - 6 \qquad 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

$(1, f(1))$ dönüm noktasıdır. $f(1) = 1^3 - 3.1^2 + 3 = 1$ olduğundan dönüm noktası $(1,1)$ olarak belirlenir.

Bu noktadan çizilen teğetin eğimi; $f'(1) = 3.1^2 - 6.1 = -3$ olur.

Teğetin denklemi; $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 4$ bulunur.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f''(x)		−	0	+	
			D.N		

ÖRNEK $f(x) = \arctan x$ fonksiyonunun **dönüm noktasını bulunuz.**

ÇÖZÜM $f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{0.(1+x^2) - 2x.1}{(1+x^2)^2}$

$f''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$x = 0$ dönüm noktasının apsisidir.

ordinat, $f(0) = \arctan 0 = 0$, $(0,0)$ dönüm noktasıdır.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''(x)		+	0	−	
			D.N		

TEOREM: f fonksiyonunun (a,b) aralığında $f^{(n)}$ türevi mevcut ve (a,b) aralığının bir c noktasında,

$f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$ ve $f^{(n)} \neq 0$ olsun.

Aynı zamanda $f^{(n)}$ fonksiyonu c de sürekli olur.

1) **Eğer; n çift ve $f^{(n)}(c) > 0$ ise f nin $x = c$ de bir yerel minimumu vardır.**
2) **Eğer; n çift ve $f^{(n)}(c) < 0$ ise f nin $x = c$ de bir yerel maksimumu vardır.**
3) **Eğer; n tek ise $x = c$ de f nin ne yerel minimumu ne de yerel maksimumu vardır.**

ÖRNEK $f(x) = (x-3)^5 + 4$ eşitliği ile verilen $f: R \to R$ fonksiyonunun **extremum yerlerini ve cinslerini belirtiniz.**

ÇÖZÜM

$f'(x) = 5(x-3)^4$

$f''(x) = 20(x-3)^3$

$f'''(x) = 60(x-3)^2$

$f^{(4)}(x) = 120(x-3)$

$f' = (3) = f''(3) = f'''(3) = f^{(4)}(3) = 0$ ve $f^{(5)}(3) > 0$ olduğundan teoremde sözü geçen n sayısı 5 tir.

n tek olduğundan $f^{(5)}(3) > 0$ sağladığından f nin $x = 3$ te ne yerel minimumu ne de yerel maksimumu vardır.

ÖRNEK $f(x) = 2(x-2)^4 + 1$ fonksiyonunun varsa **extremum yerlerini ve cinslerini belirtiniz.**

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{array}{l} f^{I}(x) = 8(x-2)^3 \\ f^{II}(x) = 24(x-2)^2 \\ f^{III}(x) = 48(x-2) \\ f^{IV}(x) = 48 \end{array}\right\}$$ olduğundan $f'(2) = f^{II}(2) = f^{III}(2) = 0$ ve $f^{IV}(3) = 48 > 0$ ise $n = 4$ tür. n çift

olduğundan teoreme göre $x = 2$ de f nin bir yerel minimumu vardır.

ÖRNEK $f: R \to R$, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5$ ise $f(x) = 0$ denkleminin **kaç tane reel (gerçel) kökü vardır?**

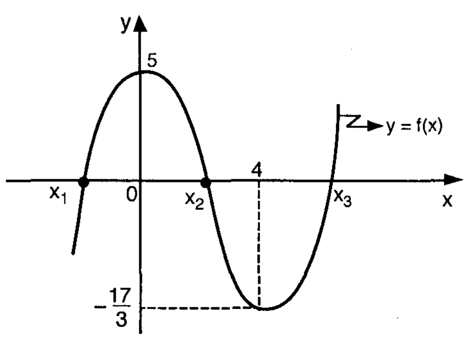
ÇÖZÜM $f'(x) = x^2 - 4x = 0$ $\quad x_1 = 0$ ve $x_2 = 4$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} = \infty$

x		0		4	
f'(x)	+	0	−	0	+
f(x)	↗	(0,5) max	↘	$(4, -\frac{17}{3})$	↗

f(x), (0,5) noktasında yerel maksimum ve

f(x), $\left(4, -\frac{17}{3}\right)$ noktasında yerel minimum değerine sahip olduğuna göre, fonksiyonun grafiği x eksenini 3 noktada kesmelidir. Bu da fonksiyonun 3 reel (gerçel) kökü olduğu anlamına gelir.



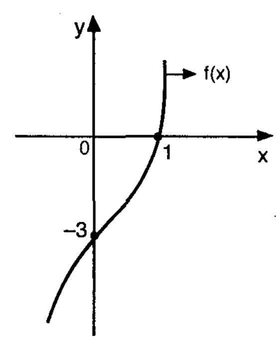
ÖRNEK $f: R \to R$, $f(x) = x^3 + 2x - 3$ fonksiyonunun **kaç tane gerçel (reel) kökü vardır?**

ÇÖZÜM $f'(x) = 3x^2 + 2 \neq 0$ olduğundan f nin yerel ekstremum noktaları yoktur.

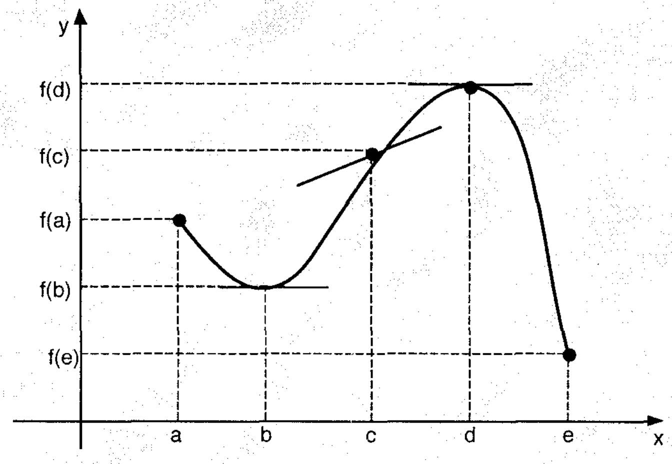
Ancak $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ olduğundan grafik x eksenini bir noktada kesmelidir.

Grafikte görüldüğü gibi f(x) x eksenini bir noktada $(x = 1)$ kesmektedir.

Dolayısıyla fonksiyonun tek gerçel kökü vardır.



UYARI – 1:



Yukarıdaki $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinden aşağıdaki yargılara varabiliriz.

1) **$a < x < b$ için f fonksiyonu azalandır. Bu aralıkta $f'(x) < 0$ ve $f''(x) > 0$ dır.**

2) **$x = b$ ve f nin yerel minimumu vardır. Yerel minimum değer f(b) dir. Bu nokta için $f'(b) = 0$ ve $f''(b) > 0$ dır.**

3) **$b < x < c$ için f fonksiyonu artandır. Bu aralıkta $f'(x) > 0$ ve $f''(x) > 0$ dır.**

4) **$b < x < c$ için $f''(x) > 0$ ve $c < x < d$ için $f''(x) < 0$ olduğundan $x = c$ noktası ikinci türevin $(f''(x))$ in işaret değiştirdiği noktadır. Dolayısıyla $(c, f(c))$ noktası f nin büküm (dönüm) noktasıdır ve $f''(c) = 0$ dır.**

5) **$c < x < d$ için f fonksiyonu artandır. Bu aralıkta $f'(x) > 0$ ve $f''(x) < 0$ dır.**

6) **$x = d$ de f nin yerel maksimumu vardır. Yerel maksimum değer f(d) dir.**

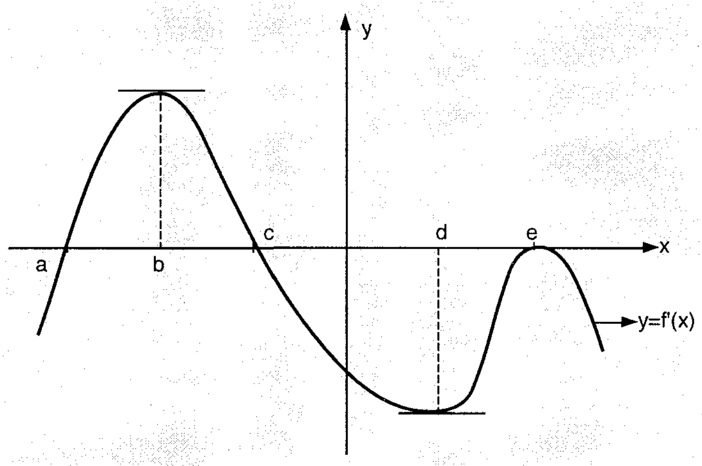
   Bu nokta için $f'(d) = 0$ ve $f''(d) < 0$ dır.

7) **$d < x < e$ için f fonksiyonu azalandır. Bu aralıkta $f'(x) < 0$ ve $f''(x) < 0$ dır.**

8) **$\forall x \in [a, e]$ için $f(x) \leq f(d)$ dir. Dolayısıyla $(d, f(d))$ noktası f fonksiyonunun mutlak maksimum noktasıdır.**

   $\forall x \in [a, e]$ için $f(x) \geq f(e)$ olduğundan $(e, f(e))$ noktası f fonksiyonunun mutlak minimum noktasıdır.

UYARI – 2:



$y = f'(x)$ fonksiyonunun grafiğinden aşağıdaki yargılara varabiliriz.

1) **$x < a$ için $f'(x) < 0$ ve $a < x < c$ için $f'(x) > 0$ olduğundan $x = a$ noktası I. türevin işaret değiştirdiği noktadır. Dolayısıyla $(a, f(a))$ noktası f nin yerel minimum noktasıdır ve $f'(a) = 0$ dır.**

2) **$x = b$ noktası f' fonksiyonunun yerel maksimum noktasıdır. Dolayısıyla $f''(b) = 0$ dır.**

   Ayrıca $(b, f(b))$ noktası f nin dönüm (büküm) noktasıdır.

3) **$a < x < c$ için $f'(x) > 0$ ve $c < x < e$ için $f'(x) < 0$ olduğundan $x = c$ noktası I. türevin işaret değiştirdiği noktadır. Dolayısıyla $(c, f(c))$ noktası f nin yerel maksimum noktasıdır ve $f'(c) = 0$ dır.**

4) **$x = d$ noktası f' fonksiyonunun yerel minimum noktasıdır. Dolayısıyla $f''(d) = 0$ dır.**

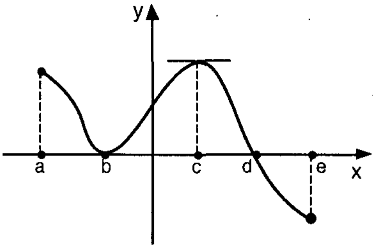
   Ayrıca $(d, f(d))$ noktası f nin dönüm (büküm) noktasıdır.

5) **$x = e$ noktası f' fonksiyonunun çift katlı köküdür. Aynı zamanda $x = e$ noktası f'' fonksiyonunun da köküdür.**

   $d < x < e$ için f' artan $\Rightarrow f''(x) > 0$ ve $x > e$ için f' azalan $\Rightarrow f''(x) < 0$ olduğundan $x = e$ noktası II. türevin işaret değiştirdiği noktadır. O halde $(e, 0)$ noktası f nin dönüm (büküm) noktasıdır ve $f''(e) = 0$ dır.

ÖRNEK

Yanda $[a,e] \to R$ ye tanımlı f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?**



A) $a < x < b$ için $f'(x) < 0$

B) $f'(b) = 0$

C) $b < x < c$ için $f(x).f'(x) < 0$

D) $c < x < d$ için $f(x).f'(x) < 0$

E) f(e) mutlak minimum değerdir.

ÇÖZÜM Seçenekleri tek tek inceleyelim.

A) $a < x < b$ için f azalan olduğundan $f'(x) < 0$ dır. Doğru

B) $x = b$ noktası f nin yerel minimum noktasıdır. $f'(b) = 0$ dır. Doğru

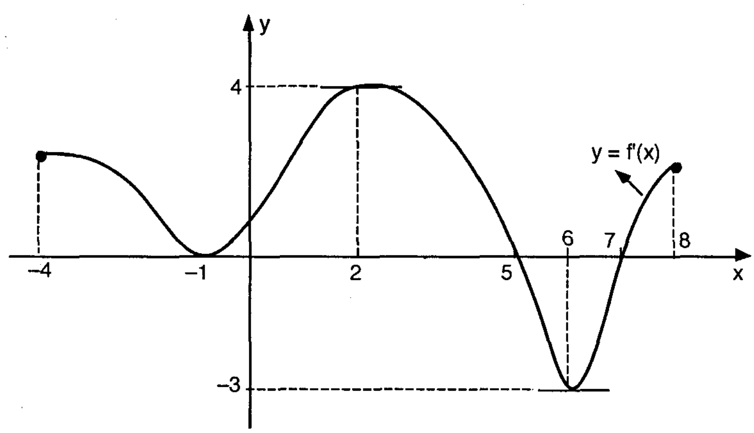
C) $b < x < c$ için $f(x) > 0$ ve $f'(x) > 0$ (Çünkü f bu aralıkta artandır.)

O halde $f(x).f'(x) > 0$ dır. C seçeneği yanlıştır.

D) $c < x < d$ için $f(x) > 0$ ve $f'(x) < 0$ dolayısıyla $f(x).f'(x) < 0$ dır. Doğru.

E) f(e) mutlak minimum değerdir. Doğru.

ÖRNEK



Yukarıda $y = f'(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) $x = 2$ de f nin yerel maksimumu vardır.

B) $x = 6$ da f nin yerel minimumu vardır.

C) $x = -1$ de f nin yerel minimumu vardır.

D) $2 < x < 5$ için $f''(x) > 0$ dır.

E) $x = 6$ da f nin dönüm noktası vardır.

ÇÖZÜM Seçenekleri tek tek inceleyelim.

A) $x = 2$ de $f'(2) > 0$ dır. I. türev işaret değiştirmez. Dolayısıyla $x = 2$ de yerel ekstremum yoktur. Yanlış.

B) $5 < x < 7$ için $f'(x) < 0$, bu aralıkta I. türevi işaret değiştirmez. O halde $x = 6$ da yerel ekstremum yoktur. Yanlış.

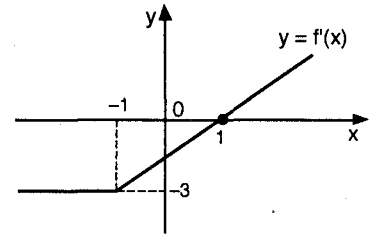
C) $-4 < x < 5$ için $f'(x) > 0$ Aynı şekilde bu aralıkta yerel ekstremum yoktur. Yanlış.

D) $2 < x < 5$ için f' azalan o halde $f''(x) < 0$ dır. Yanlış.

E) $5 < x < 6$ için f' azalan $f''(x) < 0$ ve $6 < x < 8$ için f' artan $f''(x) > 0$ o halde $x = 6$ II. türevin işaret değiştirdiği noktadır. Doğru

$x = 6$ f' nin yerel minimum noktasının apsisidir. Dolayısıyla $x = 6$ fonksiyonun dönüm noktasıdır.

ÖRNEK Yanda $y = f'(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $x > 1$ için f azalandır.

B) $x = 0$ da f nin yerel maksimumu vardır.

C) $x < -1$ için f sabit fonksiyondur.

D) $x = 1$ de f nin yerel maksimumu vardır.

E) $-1 < x < 1$ için f azalandır.

ÇÖZÜM Seçenekleri tek tek inceleyelim.

A) $x > 1$ için $f'(x) > 0 \Rightarrow$ f artandır. Yanlış

B) $-1 < x < 1$ için $f'(x) < 0$ dolayısıyla $x = 0$ da f' işaret değiştirmez. $x = 0$ noktası yerel ekstremum olamaz. Önerme yanlıştır.

C) $x < -1$ için f' fonksiyonu sabittir. $f'(x) = -3$ tür. Dolayısıyla f sabit olamaz. f eğimi negatif olan bir doğrudur. Önerme yanlıştır.

D) $x = 1$ noktası f' nin (–) den (+) ya geçtiği noktadır. Yani f nin azalanlıktan artanlığa geçtiği noktadır. O halde $x = 1$ de f nin yerel minimumu vardır. Önerme yanlıştır.

E) $-1 < x < 1$ için $f'(x) < 0$ dolayısıyla f azalandır. Doğru

O halde yanıt "E" dir.

FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Bir fonksiyonun grafiği eğri veya doğrudur. $f(x) = ax + b$ biçiminde ise doğru bunun dışındaki durumlarda grafik eğridir.

Analitik düzlemde bütün noktaları bulmamız ve çizim yapmamız olanaksız olduğu için fonksiyonun özel noktalarını ve fonksiyonun özelliklerini bularak grafiğini çizeriz.

Fonksiyonların grafiklerinin çiziminde bize yardımcı olacak verilerden en önemlilerinden biri de fonksiyonun asimptotlarıdır. Şimdi bunları göreceğiz.

TANIM: **$y = f(x)$ eğrisine sonsuzda teğet olan doğruya ya da eğriye asimptot denir.**

Bu doğru veya eğri K olsun.

K, x eksenine dik bir doğru ise düşey asimptot

K, y eksenine dik bir doğru ise yatay asimptot

K, x ve y eksenlerinin hiçbirine dik olmayan bir doğru ise eğik asimptot

K, doğru değil ise eğri asimptot adını alır.

Bir fonksiyonun grafiği düşey asimptotunu kesmez. Bunun dışındaki asimptotlarını kesebilir.

YATAY ASİMPTOT

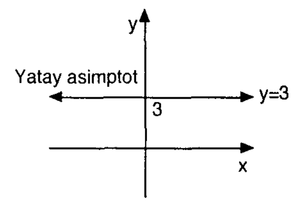
TANIM: y = f(x) fonksiyonu verilsin.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ veya $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$ ise $(a \in R)$

y = a doğrusu f fonksiyonunun yatay asimptotudur denir.

ÖRNEK $y = \dfrac{6x^3+2x+1}{2x^3+7}$ fonksiyonunun **yatay asimtotunu bulunuz.**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x\to\mp\infty} = \dfrac{6x^3+2x+1}{2x^3+7} = \dfrac{6}{2} = 3$ olduğundan $y = 3$ yatay asimptottur.



ÖRNEK $y = \dfrac{2x+1}{3x-4} + \dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun **yatay asimptotunu bulunuz.**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x\to\mp\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-4}+\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\mp\infty}\dfrac{2x+1}{3X-4} + \lim\limits_{x\to\mp\infty}\dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{3}+0 = \dfrac{2}{3}$ olduğundan,

$y = \dfrac{2}{3}$ yatay asimptottur.

ÖRNEK $y = \sqrt{\dfrac{x^3+2x}{5x+1}}$ fonksiyonunun **yatay asimptotunu bulunuz.**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x\to\mp\infty}\sqrt{\dfrac{x^3+2x}{5x+1}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to\mp\infty}\dfrac{x^3+2x}{5x+1}} = \sqrt{+\infty} = +\infty \notin R$ olduğundan yatay asimptot yoktur.

UYARI: $f(x) = \dfrac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$ gibi iki polinomun bölümünden oluşmuş bir fonksiyon olsun.

- $n = m$ ise $y = \dfrac{a_n}{b_m}$ doğrusu yatay asimptotdur.
- $n > m$ ise yatay asimptot yoktur. (Eğik veya eğri asimptot vardır.)

ÖRNEK $y = x.\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ fonksiyonunun **yatay asimptotunu bulunuz.**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow \infty.0$ belirsizdir.

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{0}{0}$$ olur. L′ Hospital teoremi uygulanırsa,

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{\dfrac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}\cdot(-x)^2 = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x}{x+1}\cdot(-x^2) = 1$$ bulunur.

O halde, y = 1 yatay asimptotdur.

DÜŞEY ASİMPTOT

TANIM: **y = f(x) fonksiyonu verilsin.**

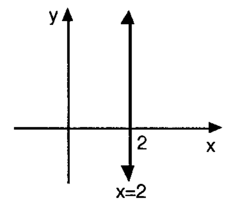
1) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \mp\infty$

2) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \mp\infty$

koşullarından en az birini sağlayan bir a sayısı varsa x = a, f fonksiyonun düşey asimptotudur.

ÖRNEK $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ fonksiyonunun **düşey asimptotunun denklemini bularak grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty$ ve $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty$ olduğundan x = 2 fonksiyonun düşey asimptotudur. Grafiği



dir.

ÖRNEK $f(x) = x^3 + 7x^2$ fonksiyonunun **düşey asimptotunu varsa bulunuz.**

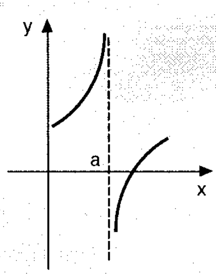
ÇÖZÜM $\forall a \in R$ için $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq \mp\infty$ olacağından düşey asimptot yoktur.

UYARI: **1)** y = f(x) için f(x) polinom fonksiyon ise düşey asimptot yoktur.

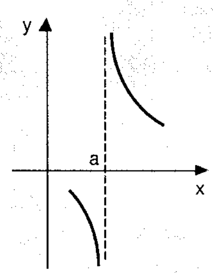
2) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ şeklindeki fonksiyonlar için

g(a) = 0 iken f(a) ≠ 0 ise x = a düşey asimptotdur.

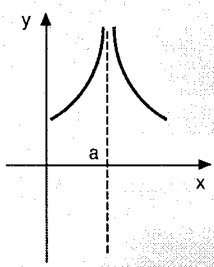
x = a, denklemin tek katlı bir kökü ise



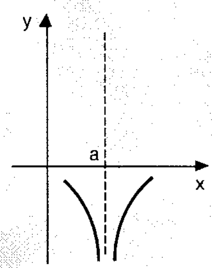
veya



x = a çift katlı kök ise



veya



f(x) in grafiği şekillerde görüldüğü gibi asimptota yaklaşır veya uzaklaşır.

ÖRNEK $y = \dfrac{x-1}{x^2+3x-4}$ fonksiyonun (varsa) **düşey asimptotlarını bulunuz.**

ÇÖZÜM $x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x = -4$

$x = 1$ ve $x = -4$ doğruları düşey asimptot olabilirler.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x^2+3x-4} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+4)}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{(x-1)(x+4)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{5}$$

Sağdan ve soldan limitlerden hiçbiri ($\mp\infty$) olmadığından $x = 1$ düşey asimptot değildir.

Çünkü $x = 1$ paydayı sıfır yaptığı gibi payı da sıfır yapmaktadır.

$$\lim_{x\to -4^+} f(x) = \lim_{x\to -4^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+4)}$$

$$= \lim_{x\to 4^+} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{0^+} = +\infty \text{ olur.}$$

Bu, $x = -4$ doğrusunun düşey asimptot olması için yeterlidir.

ÖRNEK $y = \ln x$ fonksiyonunun düşey asimptotunun **$x = 0$ (y ekseni) olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ olduğunda $x = 0$ fonksiyonunun düşey asimptotudur.

ÖRNEK $f : [0, 2\pi] \to R$, **$f(x) = \tan x$ fonksiyonunun düşey asimptotlarını bulunuz.**

ÇÖZÜM $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ dir.

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ veya $x = \dfrac{3\pi}{2}$ dir.

paydayı sıfır yapan $x = \dfrac{\pi}{2}$ ve $x = \dfrac{3\pi}{2}$ değerleri payı sıfır yapmadığından (limit almadan)

$x = \dfrac{\pi}{2}$ ve $x = \dfrac{3\pi}{2}$ doğruları düşey asimptottur diyebiliriz.

EĞİK VE EĞRİ ASİMPTOT

TANIM: **y = f(x) fonksiyonu ve y = g(x) fonksiyonu verilsin.**

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=0$ **veya** $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=0$ **olsun.**

a) y = g(x) in grafiği bir doğru ise,
y = g(x) f fonksiyonunun eğik asimptotudur.

b) y = g(x) in grafiği eğri ise,
y = g(x) f fonksiyonunun eğri asimptotudur.

$y=f(x)=\dfrac{P(x)}{g(x)}$ biçiminde bir rasyonel fonksiyon verilsin. (P(x) ve g(x) bir polinom)

1) Payın derecesi paydanın derecesinden 1 büyük ise f(x) in y = mx + n biçiminde bir eğik asimptotu vardır.

2) Payın derecesi paydanın derecesinden 2 veya daha fazla büyük ise f(x) in eğri asimptotu vardır.

Eğik ya da eğri asimptotun denklemi bulunurken,

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} - \quad\quad & T(x) \\ \hline R(x) & \end{array}$$

biçiminde bölme işlemi yapılır. Bölüm T(x) eğik ya da eğri asimptotun denklemini verir.

ÖRNEK $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-7}{x+3}$ fonksiyonunun **eğik asimptotunu bulunuz.**

ÇÖZÜM Payı paydaya bölelim.

$$\begin{array}{rl|l} & 3x^2+4x-7 & x+3 \\ \cline{3-3} \mp & \mp 3x^2 \mp 9x & 3x-5 \\ \cline{1-2} & -5x-7 & \\ \mp & \mp x \mp 15 & \\ \cline{1-2} & 8 & \end{array}$$

Bölüm y = T(x) = 3x – 5 eğik asimptot olur.

ÖRNEK $y=\dfrac{2x^3+5x^2-4x+1}{x+1}$ fonksiyonunun **eğri asimptotunu bulunuz.**

ÇÖZÜM Payı paydaya horner metoduyla bölelim.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & 5 & -4 & 1 \\ -1 & \downarrow & -2 & -3 & 7 \\ \hline & 2 & 3 & -7 & 8 \end{array}$$

Bölüm $B(x) = y = 2x^2 + 3x - 7$ eğri asimptotun denklemidir.

Eğik Asimptotların Başka Bir Yoldan Bulunuşu

KURAL: $y = f(x)$, a_1, a_2, b_1, b_2 birer gerçel sayı olmak üzere;

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a_1$ **ve** $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - a_1x] = b_1$ **ise** $y = a_1x + b_1$ **birinci asimptotun denklemidir.**

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a_2$ **ve** $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - a_2x] = b_2$ **ise** $y = a_2x + b_2$ **ikinci asimptotun denklemidir.**

ÖRNEK $y = 2x \arctan x$ fonksiyonunun **eğik asimptotlarını bulunuz.**

ÇÖZÜM Yukarıdaki kurala göre bulalım.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x\arctan x}{x} = \lim_{x\to\infty} 2\arctan x = 2\frac{\pi}{2} = \pi = a_1$$

$$\lim_{x\to\infty} (2x\arctan x - \pi x) = \lim_{x\to\infty} x(2\arctan x - \pi) = \infty\left(2\cdot\frac{\pi}{2} - \pi\right) = \infty.0 \text{ belirsiz olur.}$$

$$\lim_{x\to\infty} x(2\arctan x - \pi) = \lim_{x\to\infty} \frac{2\arctan x - \pi}{\frac{1}{x}} \to \frac{0}{0} \text{ dır.}$$

L′ Hospital teoremi uygulanırsa,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2}{1+x^2} = -2 = b_1$$

I. eğik asimptot $y = a + b_1 \Rightarrow y = \pi x - 2$ olur.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} (2\arctan x) = \frac{-2\pi}{2} = -\pi = a_2$$

$$= \lim_{x\to-\infty} [2x\arctan x - (-\pi x)] = \lim_{x\to-\infty} x.[2\arctan x + \pi] = \infty.0$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2\arctan x + \pi}{\frac{1}{x}} \to \frac{0}{0}$$

L′ Hospital Teoremi uygulanarak belirsizlik giderilir.

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^2}{1+x^2} = -2$$

II. eğik asimptot, $y = a_2x + b_2 \Rightarrow y = -\pi x - 2$ bulunur.

ÖRNEK $y = 2x - \arccos\frac{1}{x}$ fonksiyonunun **bir eğik asimptotunu bulunuz.**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x - \arccos\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(2 - \frac{\arccos\frac{1}{x}}{x}\right) = 2 = a_1$ olur.

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - 2x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2x - \arccos\frac{1}{x} - 2x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} -\left(\arccos\frac{1}{x}\right) = \frac{-\pi}{2} = b_1$$

$a_1 = 2$, $b_1 = \frac{-\pi}{2}$, Eğik asimptot $y = 2x - \frac{\pi}{2}$ olur.

ÖRNEK **$a > 0$ için $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ fonksiyonun eğik asimtotunun $y = \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\sqrt{ax^2 + bx + c} = \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{ax^2 + bx + c}{x^2}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^2 + bx + c}{x^2}} = \sqrt{a}$

$a_1 = \sqrt{a}$ olur.

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - \sqrt{a}x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{a}x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{a}x\right)\left(\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a}x\right)}{\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a}x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{ax^2 + bx + c - ax^2}{\sqrt{x^2\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right)} + \sqrt{a}x} = \frac{b + 0}{\sqrt{a + 0 + 0} + \sqrt{a}} = \frac{b}{2\sqrt{a}} \quad \text{bulunur.}$$

eğik asimptot, $y = a_1x + b_1 \Rightarrow a_1 = \sqrt{a}$, $b_1 = \frac{b}{2\sqrt{a}}$

$$y = \sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \Rightarrow y = \sqrt{a}x + \frac{b\sqrt{a}}{2a}$$

$$y = \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right) \text{ olduğu görülür.}$$

ÖRNEK $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x - 2}$ fonksiyonunun **asimptotlarının kesim noktasını bulunuz.**

ÇÖZÜM Düşey asimptot, $x - 2 = 0$, $x = 2$ dir.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2 + 3x - 1}{x - 2} = +\infty$ olduğundan, yatay asimptot yok, eğik asimptot vardır.

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 + 3x - 1 & x-2 \\ \cline{2-2} \mp \; \mp 2x^2 \mp 4x & 2x + 7 \\ \hline 7x - 1 & \\ \mp \; \mp 7x \mp 14 & \\ \hline 13 & \end{array}$$

$y = 2x + 7$ eğik asimptot olur.

$x = 2 \Rightarrow y = 2 \,.\, 2 + 7$

$x = 2 \Rightarrow y = 2 \,.\, 2 + 7 \Rightarrow y = 11$

asimptotların kesim noktası (2, 11) olur.

POLİNOM FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

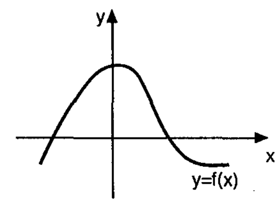
$y = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + n_0$ biçimindeki polinom fonksiyonların grafiklerinin çiziminde aşağıdaki yollar izlenir.

1) Polinom fonksiyonların tanım kümesi $(-\infty, +\infty)$ dur.

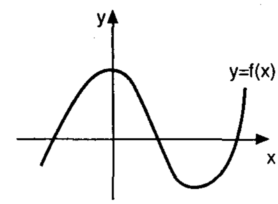
2) Bu işlem yapılırken en yüksek dereceli terim olan $\lim\limits_{x \to \mp\infty} a_nx^n$ limit bulunur. Bu limit $+\infty$ veya $-\infty$ olur.

Bulduğumuz bu değerler grafiğin hangi bölgeden gelip, hangi bölgeye gideceğini gösterir.

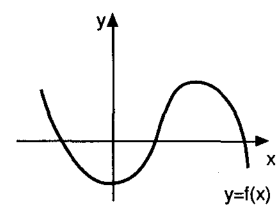
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ ve $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$ ise grafik, III. bölgeden gelir, IV. bölgeye gider.



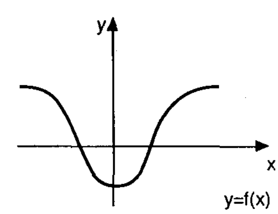
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ ve $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$ ise grafik, III. bölgeden gelir, I. bölgeye gider.



c) $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$ ve $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$ ise grafik, II. bölgeden gelir, IV. bölgeye gider.



d) $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$ ve $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$ ise grafik, II. bölgeden gelir, I. bölgeye gider.



3) Fonksiyonun x ve y eksenlerini kestiği noktalar bulunur. x = 0 için y bulunarak y eksenini kestiği nokta, y = 0 için bulunarak x eksenini kestiği nokta veya noktalar (varsa) belirlenir.

y = 0 denkleminin tek katlı köklerinde eğri x eksenini keser, çift katlı köklerinde eğri x eksenine teğettir.

4) I. türev alınarak, fonksiyonun artan veya azalan olduğu aralıklar ile ekstremum noktalarını belirlemek için y′ = 0 denkleminin kökleri bulunur.

5) II. türev alınarak (gerekiyorsa) fonksiyonun dönüm noktaları bulunur.

6) Elde edilen veriler değişim tablosunda gösterilir.

7) Bu tablodaki bilgilere göre grafik çizilir.

ÖRNEK $y = 4x^3 - 3x$ fonksiyonunun **değişimini inceleyiniz ve grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

1) Tanım kümesi $(-\infty, +\infty)$ dur.

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 4.(-\infty)^3 = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} y = (+\infty)^3 = +\infty$ o halde grafik III. bölgede başlar, I. bölgede biter.

3) $x = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = 0 \Rightarrow 4x^3 - 3x = 0 \quad x(4x^2 - 3) = 0 \quad x = 0 \quad x = \mp\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4) $y = 4x^3 - 3x \Rightarrow y' = 12x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \quad x = \mp\dfrac{1}{2}$

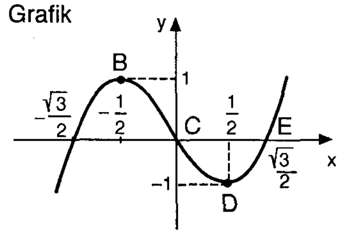
$x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1$

$x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 4\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1$

5)

		A	B		C	D	E
x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		0	1 max.	0	−1 min	0	$+\infty$

Grafik



ÖRNEK $y = x^4 - 2x^2 + 10$ fonksiyonunun **grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

1) Tanım kümesi $(-\infty, +\infty)$ dur.

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} y = (-\infty)^4 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} y = (+\infty)^4 = +\infty$ olduğunda grafik II. bölgede başlar I. bölgede biter.

3) Eksenleri kestiği noktalar, $x = 0$ ise $y = 10$

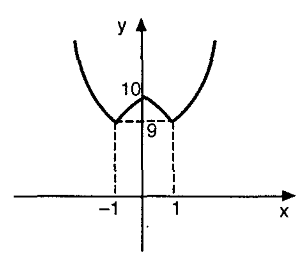
$y = 0$ ise $x^4 - 2x^2 + 10 = 0 \qquad x^2 = t$

$t^2 - 2t + 10 = 0$

$\Delta = 4 - 4.1.10$

$\Delta = -36 < 0 \qquad t \in R$

denklemin çözüm kümesi $\varnothing$



4) $y' = 4x^3 - 4x = 0 \qquad 4x(x^2 - 1) \Rightarrow x = 0, x \pm 1$

$x = 0 \Rightarrow y = 10$

$x = 1 \Rightarrow y = 9 \qquad x = -1 \Rightarrow y = 9$

5)

		A		B		C	
x	$-\infty$	−1		0		1	$+\infty$
y'	−	0	+	0	−	0	+
y		min		max		min	

POLİNOM FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİNİN PRATİK OLARAK ÇİZİMİ

$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ verilsin.

1) Grafiğin hangi bölgede başlayıp hangi bölgede bittiğine bakılır.

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} y = -\infty$ ise grafik III. bölgede başlar.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} y = +\infty$ ise birinci bölgede biter.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} y = -\infty$ ise IV. bölgede biter.

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} y = +\infty$ ise grafik II. bölgede başlar
- $\lim\limits_{x\to +\infty} y = +\infty$ ise I. bölgede biter.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} y = -\infty$ ise I. bölgede biter

2) $P(x) = 0$ denkleminin kökleri bulunur.

Denklemin tek kat kökleri için x eksenini konkavlığın yönünü değiştirmeden keser.

Denklemin çift kat köklerinde x eksenine teğet olur. Bu noktalar yersel ekstremum noklatarıdır.

3) m, 3 veya 3 ten büyük tek sayı olmak kaydıyla

P(x) in $(x - a)^m$ gibi bir çarpanı varsa $x = a$

P(x) in grafiğinin bir dönüm noktasıdır.

Şimdi yukarıdaki bilgileri kullanarak grafik çizimine örnekler verelim.

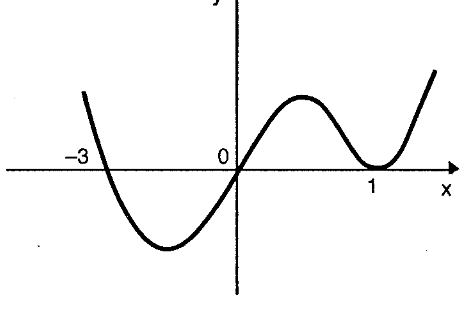
ÖRNEK $y = x(x-1)^2(x+3)$ fonksiyonunun **grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

1) $\lim\limits_{x\to -\infty} y = \infty$ grafik ikinci bölgede başlar, $\lim\limits_{x\to +\infty} y = +\infty$ birinci bölgede biter.

2) $x(x-1)^2(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $x_1 = 0,\ x_2 = x_3 = 1,\ x_3 = -3$ olduğundan $x = 0$ ve $x = -3$ te x eksenini keser, $x = 1$ de x eksenine teğet olur. $x = 1$ de yersel ekstremum vardır.

Grafik



ÖRNEK $y = x^2(x-2)^2$ fonksiyonunun **grafiğini çiziniz.**

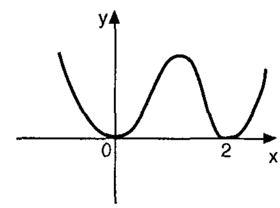
ÇÖZÜM

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$ ve $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$ olduğundan grafik ikinci bölgede başlar, birinci bölgede biter.

2) $x^2(x-2)^2 = 0 \Rightarrow$ $x_1 = 0$ $x_3 = 2$

$x_2 = 0$ $x_4 = 2$

$x = 0$ ve $x = 2$ çift katlı köktür. Bu noktalarda yerel ekstremum vardır.

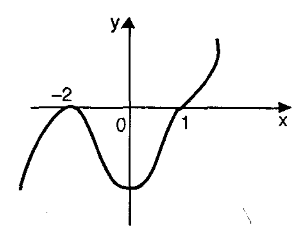


ÖRNEK $y = 2(x-1)^3(x+2)^2$ fonksiyonunun **grafiğini çiziniz.**

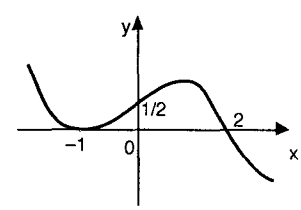
ÇÖZÜM

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ ve $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$ olduğundan grafik üçüncü bölgede başlar, birinci bölgede biter.

2) $2(x-1)^3.(x+2)^2 = 0$, $x = 1$ üç katlı $x = -2$ iki katlı köktür. $x = 1$ dönüm noktasıdır. $x = -2$ de yerel maksimumu vardır.



ÖRNEK **Yanda grafiği verilen $y = f(x)$ üçüncü dereceden polinom fonksiyonunu bulunuz.**



ÇÖZÜM Eğri, x eksenine $x = -1$ de teğet olduğu için $(x+1)^2$ çarpanına, x eksenini $x = 2$ de kestiği için $(x-2)$ çarpanına sahiptir.

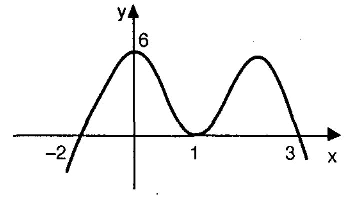
O halde denklem;

$f(x) = a(x+1)^2\,(x-2)$ olur. y ekseni $\frac{1}{2}$ de kestiğinden $f(0) = \frac{1}{2}$ dir.

$f(0) = a(1).(-2) = \frac{1}{2}$ den $a = -\frac{1}{4}$ bulunur.

Bu durumda fonksiyon; $f(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^2(x-2)$ olarak bulunur.

ÖRNEK Yanda grafiği verilen $y = f(x)$ dördüncü dereceden polinom fonksiyonunun **denklemini bulunuz.**



ÇÖZÜM Fonksiyon: x eksenini $x = -2$ de kestiğinden $(x + 2)$

x eksenine $x = 3$ de kestiğinden $(x - 3)$

x eksenine $x = 1$ de teğet olduğundan $(x - 1)^2$ çarpanlarına sahiptir.

y eksenini $y = 6$ da kestiğinden $f(0) = 6$ dır. Buna göre denklem

$f(x) = a(x + 2)(x - 1)^2.(x - 3)$ $\quad f(0) = 6 \Rightarrow a.(2).(-1).(-3) = 6 \Rightarrow a = 1$ dir.

$f(x) = (x + 2)(x - 1)^2.(x - 3)$ olur.

RASYONEL FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Rasyonel fonksiyonların grafikleri çizilirken polinom fonksiyonların çiziminde yapılan işlemler aynen uygulanır. Yalnız burada fazladan birde asimptot bulma işlemleri yapılır.

ÖRNEK $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ fonksiyonunun **grafiği çiziniz.**

ÇÖZÜM

1) $x + 1 = 0$, $x = -1$ de tanımsız, tanım kümesi $= R - \{-1\}$ dir.

2) $\lim\limits_{x \to -1} y = \infty \Rightarrow x = -1$ düşey asimptot

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ yatay asimptot

3) $x = 0 \Rightarrow y = -1 \qquad y = 0 \Rightarrow x = 1$

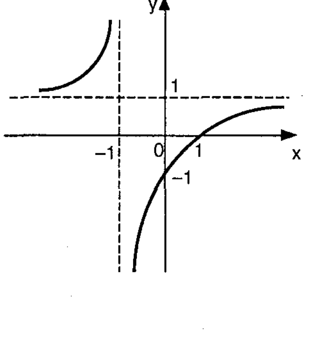
4) $y' = \dfrac{1.1 - 1.(-1)}{(x+1)^2} \Rightarrow y' = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0$

$\forall x \in R$ için $y' > 0$ olduğundan grafik her yerde artandır.

5)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'	+	+	‖	+ +	+
y	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

6) Grafik



ÖRNEK $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ fonksiyonunun **grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

1) $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1$ veya $x = 3$

tanım kümesi $R - \{-1, 3\}$

2) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1} y = \infty \\ \lim\limits_{x \to 3} y = \infty \end{array}\right\} x = -1$ ve $x = 3$ Düşey asimptot

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ Yatay asimptot

3) $x = 0 \Rightarrow y = -1$

$y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0$ denkleminin kökü olmadığından grafik x eksenini kesmez.

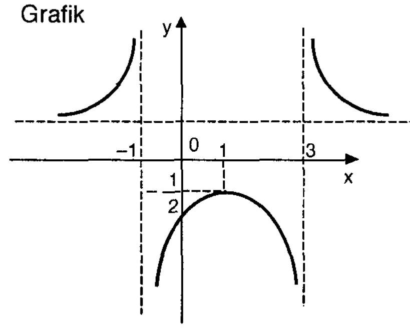
4) $y' = \dfrac{(2x-2)(x^2-2x-3) - (2x-2)(x^2-2x+3)}{(x^2-2x-3)^2} \Rightarrow y' = -6(2x-2) = 0 \Rightarrow x = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}$

5)

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		+	‖	+	0	−	‖	−	
y	1	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$-\frac{1}{2}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	

6) Grafik



ÖRNEK $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$ fonksiyonunun **grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

1) $x^2 + x + 1 = 0$, $\Delta < 0$, $Ç = \varnothing$ fonksiyonunun tanımsız olduğu değer yok.

Tanım kümesi = R

2) Paydayı sıfır yapan değer yok, düşey asimptot yok.

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} y = 1$, $y = 1$ yatay asimptot

3) $x = 0 \Rightarrow y = 1$, $y = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$ $x^2 \neq -1$

Denklemin çözüm kümesi $\varnothing$, grafik x eksenini kesmez.

4) $y' = \dfrac{2x(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2+1)}{(x^2+x+1)^2} \Rightarrow y' = \dfrac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$

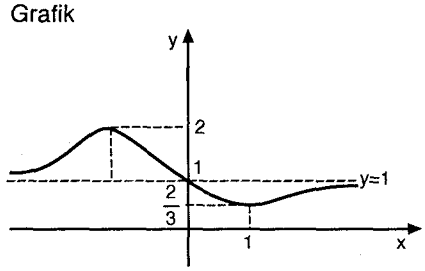
$y' = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \qquad x = -1 \text{ ise } y = 2$

$x = \pm 1 \qquad x = 1 \text{ ise } y = \dfrac{2}{3}$

5) Tablo

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+		−		−		+	
y	1	↗	2 (max.)	↘	1	↘	$\frac{2}{3}$ (min)	↗	1

6) Grafik



ÖRNEK $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ fonksiyonunun **grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

1) $1 + x^2 \neq 0$ fonksiyon R de tanımlı

2) Paydanın kökü olmadığından düşey asimptot yok.

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} y = 0$ olduğundan yatay asimptot $y = 0$ (x eksenidir.)

3) $x = 0 \Rightarrow y = 1$, $y = 0 \Rightarrow$ kök yok.

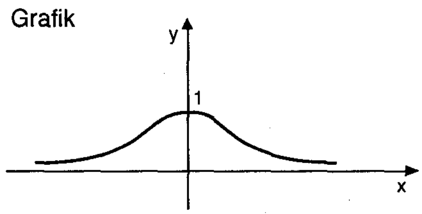
4) $y' = -\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

$y(0) = 1$

5) Tablo

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+	0	−	
y	0	↗	1 (max.)	↘	0

6) Grafik



ÖRNEK $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ fonksiyonunun **grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

1) $(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$ de tanımsız. $R - \{2\}$ de tanımlı

2) $\lim\limits_{x \to 2} y = \infty$ $\quad x = 2$ düşey asimptot

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} y = 0$ $\quad y = 0$ (x ekseni) yatay asimptot

3) $x = 0$ için $y = \dfrac{1}{4}$; $y = 0$ için $\dfrac{1}{(x-2)^2} \neq 0$ kök yok, grafik x eksenini kesmez.

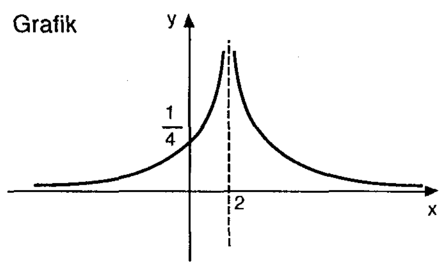
4) $y' = \dfrac{0.(x-2)^2 - 2(x-2).1}{(x-2)^4} \Rightarrow y' = \dfrac{-2(x-2)}{(x-2)^4}$

$y' = \dfrac{-2}{(x-2)^3}$ $\quad y' = \dfrac{-2}{(x-2)^3}$ kök yok.

5) Tablo

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		+	‖	−	
y	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

6) Grafik



ÖRNEK $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ fonksiyonunun **grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

1) $x - 1 = 0$, $x = 1$ olduğundan $R - \{1\}$ de tanımlı

2) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$ olduğundan $x = 1$ düşey asimptot

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = \mp\infty$ olduğundan Eğik asimptot var.

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 2x + 2 & x - 1 \\ \cline{2-2} \pm\ x^2 \pm x & x - 1 \\ \hline -x + 2 & \\ +\quad \pm x \pm 1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$y = x - 1$ Eğik asimptot

3) $x = 0 \Rightarrow y = -2$, $y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$

$\Delta < 0$ kök yok, eğri x eksenini kesmez.

4) $y' = \dfrac{(2x-2)(x-1) - 1(x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2} \Rightarrow y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

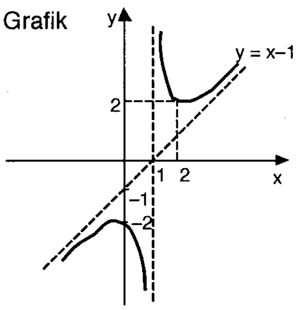
$y' = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2,\ x = 0 \Rightarrow y = -2$

$x = 2 \Rightarrow y = 2$

5) Tablo

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+		−	‖	−		+	
y	$-\infty$		-2 max		$-\infty$ ‖ $+\infty$		2 min		$+\infty$

6) Grafik



ÖRNEK $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ fonksiyonunun **grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

1) $x^2-1=0 \Rightarrow x=\mp 1$ Tanım kümesi $R-\{-1,1\}$

2) $\lim\limits_{x\to 1} y=\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to -1} =-\infty$ olduğundan

$x=1$ ve $x=-1$ düşey asimptot

$\lim\limits_{x\to\mp\infty} y=\mp\infty$ olduğundan yatay asimptot yok, eğik asimptot vardır.

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2-1 \\ \cline{2-2} \underset{+}{\ } \pm x^3 \pm x & x \\ \hline x & \end{array}$$

$y=x$ eğik asimptot

3) $x=0 \Leftrightarrow y=0$ grafik x ve y eksenlerini orijende keser.

4) $y'=\dfrac{3x^2\left(x^2-1\right)-2x\left(x^3\right)}{\left(x^2-1\right)^2} \Rightarrow y'=\dfrac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$

$y'=0 \Rightarrow x^4-3x^2=0 \Rightarrow x^2\left(x^2-3\right)=0$

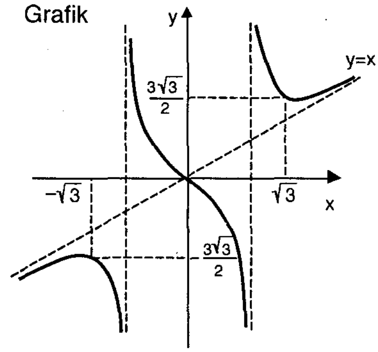
$x=-\sqrt{3} \Rightarrow y=\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \underbrace{x=0}_{\text{çift katlı kök}}$ $\qquad x=\mp\sqrt{3}$

$x=\sqrt{3} \Rightarrow y=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

5) Tablo

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$		$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ max.		$-\infty$ ‖ $+\infty$				$-\infty$ ‖ $+\infty$		$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ min		

6) Grafik



İRRASYONEL FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

İrrasyonel fonksiyonların grafikleri daha önce uyguladığımız çizim planına göre çizilir.

Özel olarak $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ şeklindeki fonksiyonlar için,

1) Tanım kümesi;

$ax^2+bx+c\geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesidir.

2) Eğik asimptot:

$a>0$ ise $y=\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$ ile bulunur. Tanım kümesi sınırlı fonksiyonların eğik ya da yatay asimptotu yoktur.

ÖRNEK $y=\sqrt{x^2-4x+3}$ fonksiyonunun **grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM Tanım kümesi;

1) $x^2-4x+3\geq 0$ eşitsizliğinin kümesidir.

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
x^2-4x+3	+				+

$T.K=(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$ dır.

2) Düşey ve yatay asimptot yoktur.

Eğik asimptot, $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ için $y=\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$ olduğuna göre,

$y=\sqrt{x^2-4x+3}$ te $a=1, b=-4$ için $y=\sqrt{1}\left|x+\frac{-4}{2}\right|$

$y=|x-2| \Rightarrow x>3$ için $y=x-2$

$x<1 \Rightarrow y=-x+2$ dır.

3) Eksenleri kestiği noktalar, $x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{3}$

$y = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = 3$

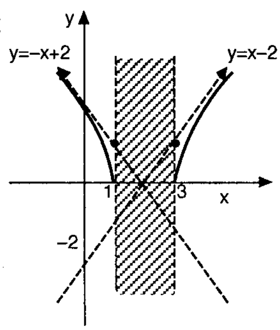
4) $y' = \dfrac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$ $\qquad y' = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0$

$x = 2$

5) Tablo

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
y'	−		tanımsız		+
y	↘	0	tanımsız	0	↗

6) Grafik



ÖRNEK $y = \sqrt{-x^2 + 4x}$ fonksionunun **grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM **1)** Tanım kümesi;

$-x^2 + 4x \geq 0 \qquad -x^2 + 4x = 0,\ x = 0,\ x = 4$

x	$-\infty$	0		4	$+\infty$
y'	tanımsız		+		tanımsız

$T.K = [0, 4]$

2) Düşey ve yatay asimptot yoktur.

Tanım kümesi [0, 4] olduğundan eğik asimptotda yoktur.

3) $x = 0 \Rightarrow y = 0 \qquad y = 0 \Rightarrow x = 0$ veya $x = 4$

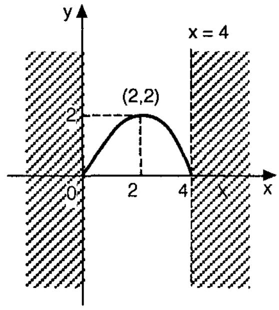
4) $y' = \dfrac{-2x + 4}{2\sqrt{-x^2 + 4x}}$ $\qquad y' = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \qquad x = 2 \Rightarrow y = 2$

$x = 2$

5) Tablo

x	$-\infty$	0		2		4	$+\infty$
y'			+	0	−		
y		0	↗	2 max.	↘	0	

6) Grafik



ÖRNEK $y=\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ fonksiyonunun **grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

1) Tanım kümesi; $\dfrac{x}{x+1}\geq 0$ olmalı $x=0,\ x=-1$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
y'	+		− (tanımsız)		+

$T.K=(-\infty,\ -1)\cup[0,+\infty)$

2) $\lim\limits_{x\to -1} y=\infty$ Düşey asimptot $x=-1$

$\lim\limits_{x\to\mp\infty} y=1$ Yatay asimptot $y=1$

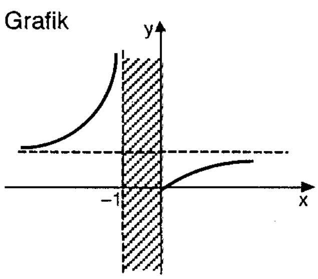
3) $x=0 \Leftrightarrow y=0$, x ve y eksenlerini aynı noktada, (0,0) da keser.

4) $y'=\dfrac{\dfrac{1}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}}$ tanım aralığındaki $x\neq 0$ için $y'>0$ dır.

5) Tablo

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
y'	+		(tanımsız)		+
y	1 ↗	$+\infty$	tanımsız	0	↗ 1

6) Grafik



ÖRNEK $y = x + \sqrt{x^2 + 4x}$ fonksiyonunun **grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM **1)** Tanım kümesi; $x^2 + 4x \geq 0$ olmalı $x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -4$

x	$-\infty$	-4		0	$+\infty$
x^2+4x	+		− (tanımsız)		+

$T.K = (-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$

2) Asimptotlar:

Fonksiyonlar kesirli olmadığından düşey asimptot yoktur.

$$\lim_{x \to \mp\infty} y = \lim_{x \to \mp\infty} \left(x + \left| x + \frac{4}{2} \right| \right) = \lim_{x \to \mp\infty} \left(x + |x + 2| \right)$$

$$\left(\lim_{x \to \mp\infty} \sqrt{x^2 + 4x} = \sqrt{1} \left| x + \frac{4}{2.1} \right| = |x + 2| \right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} (x - x - 2) \Rightarrow y = -2 \text{ yatay asimptotdur.}$$

Fonsiyonun eğik asimptotu f(x) olsun.

$$\lim_{x \to \infty} [y - f(x)] = \lim_{x \to \infty} [x + |x + 2| - f(x)]$$

$$= \lim_{x \to \infty} [2x + 2 - f(x)] = 0$$

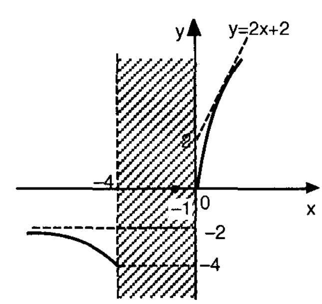
$f(x) = 2x + 2$ eğik asimptotdur.

3) Eksenleri kestiği noktalar:

$x = 0 \Leftrightarrow y = 0$ x ve y eksenlerini aynı noktada (0,0) da keser.

4) $$y' = 1 + \frac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x}} \Rightarrow y' = 1 + \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}$$



$$y' = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 4x} + x + 2 = 0$$

$$\left(\sqrt{x^2 + 4x} \right)^2 = (-x - 2)^2$$

$$x^2 + 4x = x^2 + 4x + 4$$

$0 \neq 4$ Türevin kökü yoktur.

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Trigonometrik fonksiyonların grafikleri çizilirken aşağıdaki çizim planı uygulanır.

1) Periyot bulunur. Periyodun genişliğinde bir aralıkta fonksiyonun değişimi incelenir. Bu aralıkta grafik çizilir. Daha sonra periyodun genişliği kadar olan aralıklarda elde edilen grafik tekrarlanarak çizim tamamlanır.

2) Grafiğin eksenleri kestiği noktalar bulunur.

3) Seçtiğimiz aralıkta değişkene özel değerler verilerek özel noktalar belirlenir. (gerekirse)

4) Fonksiyon rasyonel ise düşey asimptot araştırılır.

5) Birinci türev alınır, türevin işareti incelenir.

6) Değişim tablosu yapılır.

7) Grafik çizilir.

ÖRNEK $y = 2\cos x + 1$ fonksiyonun **grafiğini çiziniz.**

1) Periyot $= T = 2\pi$

2) Eksenleri kestiği noktalar,

$y = 0$ için $x = ?$ $\qquad x = 0$ için $y = ?$

$2\cos x + 1 = 0 \qquad y = 2.\cos 0 + 1$

$\cos x = \dfrac{-1}{2} \qquad y = 2 + 1$

$x = \dfrac{2\pi}{3}$ veya $x = \dfrac{4\pi}{3} \qquad y = 3$

3) $y' = -2\sin x \Rightarrow -\sin x = 0 \quad x=0\ ,\ x = \pi,\ x = 2\pi$

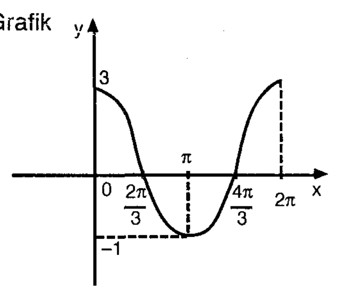
$x = \pi$ için $y = -1 \qquad x = 2\pi$ için $y = 3$

4) Asimptotları yoktur.

5) Tablo(değişimi $[0, 2\pi]$ aralığında inceleyeceğiz.)

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	2π
y'		$-$		$+$	
y	3	0	-1 $(\pi,-1)$	0	3

6) Grafik



grafik $[0, 2\pi]$ aralığındaki şeklin tekrarı yapılarak sürdürülebilir.

ÖRNEK $y = \sin^2 x$ fonksiyonunun **grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

1) Periyot = T = π

2) Eksenleri kestiği noktalar

$y = 0$ için $x = ?$

$\sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi$

$x = 0$ için $y = ?$

$y = \sin^2 0 \Rightarrow y = 0$

3) $y' = 2\sin x.\cos x \Rightarrow y' = \sin 2x$

$y' = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow \quad 2x = 0, \quad 2x = \pi, \quad 2x = 2\pi$

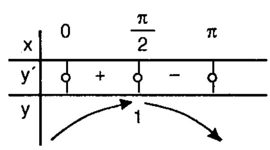
$x = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{2} \quad x = \pi$

$x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow y = \sin^2 \dfrac{\pi}{2} = 1$

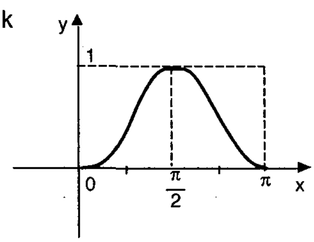
4) Asimptotları yok.

5) Tablo

Değişim tablosunu $[0, \pi]$ için yapalım.



6) Grafik



Grafik $[0, \pi]$ aralığındaki şekil tekrarlanarak sürdürülür.

ÖRNEK $y = \dfrac{2\sin x + 1}{\sin x + \cos x}$ fonksiyonunun **grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

1) Periyot = T = 2π

2) Eksenleri kestiği noktalar

$x = 0$ için $y = ?$

$x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{2\sin 0 + 1}{\sin 0 + \cos 0} = 1$

$y = 0$ için $x = ?$

$y = 0 \Rightarrow 2\sin x + 1 = 0$

$\sin x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{7\pi}{6}$ veya $x = \dfrac{11\pi}{6}$

3) Asimptotlar.

Düşey asimptotları bulmak için paydanın köklerini araştıralım.

$\sin x + \cos x = 0$

$\sin x = -\cos x \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{4}$ veya $x = \dfrac{7\pi}{4}$

$\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{4}^-} y = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to \frac{7\pi}{4}^-} y = +\infty$ olduğundan

$x = \dfrac{3\pi}{4}$ ve $x = \dfrac{7\pi}{4}$ Düşey asimptot olur .

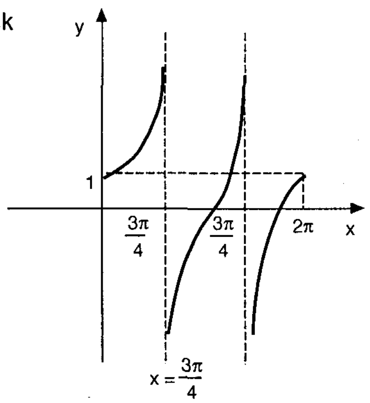
4) $y' = \dfrac{2\cos x.(\sin x + \cos x) - (\cos x - \sin x)(2\sin x + 1)}{(\sin x + \cos x)^2}$

$y' = \dfrac{\sin x - \cos x + 2}{(\sin x + \cos x)^2}$ $\forall x \in R$ için $y' > 0$ dır.

5) Tablo: [0, 2π] aralığında fonksiyonun değişimini inceleyelim.

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{4}$		$\frac{11\pi}{6}$	2π
y′		+	‖	+		‖	+		
y	1	$+\infty$	‖	$-\infty$		$+\infty$ ‖	$-\infty$		1

6) Grafik



fonksiyon periyodik olduğundan [0, 2π] aralığındaki grafiğin tekrarı yapılarak çizim sürdürülür.

ÖRNEK $y = \dfrac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

1) Periyot = T = π

2) Eksenleri kestiği noktalar

$x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{\tan 0 - 1}{\tan 0 + 1} = -1$ $\quad y = 0 \Rightarrow \tan x - 1 = 0 \Rightarrow \tan x = 1$

$\Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} \quad x = \dfrac{5\pi}{4}$

3) Asimptotlar:

Düşey asimptotları bulmak için paydanın köklerini araştıralım.

$\tan x + 1 = 0$

$\tan x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{4}$ veya $x = \dfrac{7\pi}{4}$ düşey asimptotlardır .

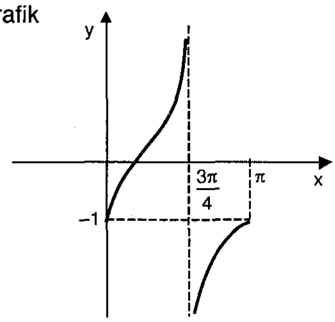
4) $y' = \dfrac{(1+\tan^2 x)(\tan x + 1) - (1+\tan^2 x)\cdot(\tan x - 1)}{(\tan x + 1)^2}$ işlemleri yapılarak

$y' = \dfrac{2(1+\tan^2 x)}{(\tan x + 1)^2}$ bulunur. Fonksiyonun tanım kümesindeki $\forall x \in R$ için $y'>0$ dır.

5) Tablo: (Fonksiyonun $[0, \pi]$ aralığındaki değişimini inceleyeceğiz.)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$		π
y'		+	‖	+	
y	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1

6) Grafik



Fonksiyon periyodik olduğundan $[0, \pi]$ aralığındaki grafiğin tekrarı yapılarak çizim sürdürülür.

ÖRNEK $f: [0, 9] \to R$, $f(x) = \cos \pi\sqrt{x}$ fonksiyonunun **grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

1) Periyot, $f(x) = \cos \pi(x)^{\frac{1}{2}}$ olduğundan fonksiyon periyodik değil.

2) Asimptotlar.

f, [0,9] aralığında tanımlı oluğu için limiti söz konusu olamaz. Bu nedenle yatay, eğri veya eğik asimptot yoktur. f kesirli olmadığından düşey asimptottu da yoktur.

3) Eksenleri kestiği noktalar,

$x = 0$ için $y = ?$ $f(0) = \cos \pi\sqrt{0} \Rightarrow f(0) = \cos 0 \Rightarrow f(0) = 1$

$y = 0$ için $f(x) = 0 \Rightarrow \cos \pi\sqrt{x} = 0$

$$\pi\sqrt{x} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\pi\sqrt{x} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{9}{4}$$

$$\pi\sqrt{x} = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{25}{4}$$

4) $y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}}\pi.\sin \pi\sqrt{x}$

$y' = 0 \Rightarrow \sin \pi\sqrt{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$

$\pi\sqrt{x} = \pi \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$

$\pi\sqrt{x} = 2\pi \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$

5) Özel değerler.

$f(0) = 1$ idi. $\quad f(9) = \cos \pi\sqrt{9}$

$f(9) = \cos \pi\sqrt{9}$

$f(9) = \cos 3\pi = -1$

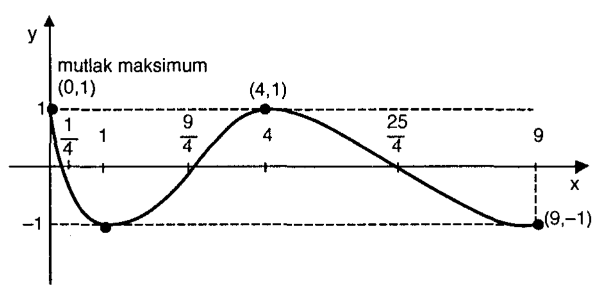
$f(4) = \cos \pi\sqrt{4} = 1$

$f(1) = \cos \pi = -1$

6) Tablo:

x	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	9
y′		−	0	+	0	−	
y		0	−1	0	1	0	
			min. nok. (1,−1)		max. (4,1)		

Grafik



LOGARİTMİK VE ÜSTEL FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Logaritmik ve üstel fonksiyonların grafiklerinin çiziminde de genel çizim planına göre hareket edilir. Genellikle büküm noktalarını bulmak için ikinci türevin işareti de incelenir.

ÖRNEK $\quad y = \ln\dfrac{1}{1+x^2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM **1)** Tanım kümesi:

$x = 0 \Rightarrow \forall x \in R$ için $\dfrac{1}{1+x^2} > 0$ olduğundan $T.K = R$

2) Eksenleri kestiği noktalar:

$x = 0 \Rightarrow y = \ln\dfrac{1}{1+0^2} \Rightarrow y = \ln 1 \Rightarrow y = 0$

$y = 0 \quad$ ise $\quad x = 0$

3) Asimptotlar;

Fonksiyonun paydasının kökü olmadığından düşey asimptot yok.

$$\lim_{x\to\mp\infty} y = \ln \lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \ln 0$$ tanımsız yatay asimptot, eğri veya eğik asimptot yok.

4) I. Türev.

$$y' = \frac{\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}}{\dfrac{1}{1+x^2}} = \frac{-2x}{1+x^2} \qquad y' = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

5) II. Türev.

$$y' = \frac{-2x}{1+x^2} \Rightarrow y'' = \frac{-2\left(1+x^2\right) - 2x(-2x)}{\left(1+x^2\right)^2} \Rightarrow y'' = \frac{-2 - 2x^2 + 4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{2x^2 - 2}{\left(1+x^2\right)^2} \qquad y'' = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \mp 1$$

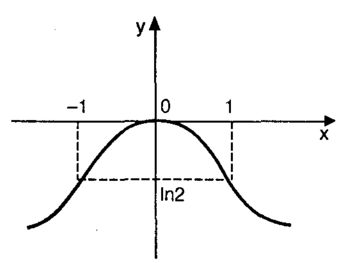
$x = 1$ ve $x = -1$ için $\qquad y = \ln\left(\frac{1}{1+1}\right)$

$$y = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

6) Tablo

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+		+	0	−		−	
y''		+	0	−		−	0	+	
y		çukur	Dönüm nok. (−1,ln2)	tümsek	max.nok.	tümsek	Dönüm nok. (1, ln2)	Çukur	

7) Grafik



ÖRNEK $y = \ln(x-1)$ fonksiyonunun **grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM–1 **1)** Tanım kümesi,

$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ için yani $(1, +\infty)$ aralığında tanımlıdır.

2) Eksenleri kestiği noktalar,

$x = 0$ tanım kümesinde olmadığından fonksiyonun grafiği y eksenini kesmez.

$y = 0$ için $\ln(x-1) = 0 \Rightarrow x - 1 \Rightarrow x = 2$

3) Asimptotlar.

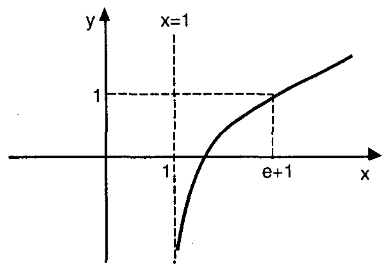
$\lim\limits_{x\to 1} y = -\infty \Rightarrow x = 1$ doğrusu düşey asimptottur . Yatay eğri veya eğik asimptot yoktur.

4) $y' = \dfrac{1}{x-1}$ tanım aralığındaki $\forall x \in R$ için $y' > 0$ dır.

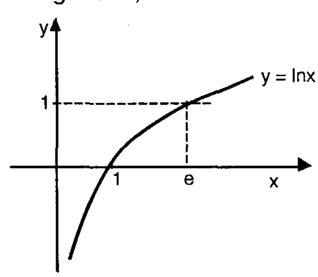
5) Tablo:

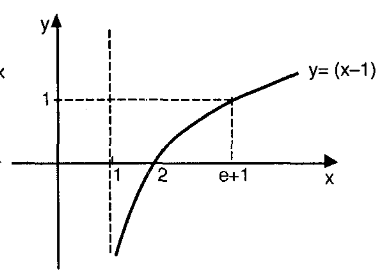
x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		+ + + +	
y	Tanımsız		

6) Grafik:



ÇÖZÜM–2 $y = f(x-1)$ grafiği $y = f(x)$ grafiğinin x ekseninin pozitif yönünde 1 birim sağa ötelenmesi olduğundan;





olur.

ÖRNEK $y = e^{x^2}$ fonksiyonunun **grafiğini çiziniz.**

ÇÖZÜM

1) $f: R \to R^+$ olduğu görülebilir.

2) $x = 0 \Rightarrow y = 1$ (0, 1) kesim noktasıdır.

Grafik, $\forall x \in R$ için $e^{x^2} \neq 0$ olduğundan x eksenini kesmez.

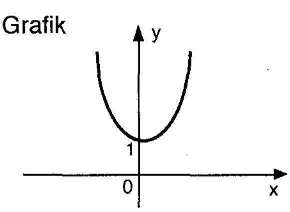
3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$

4) $y' = 2x \cdot e^{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$ olmalı

5)

x		0	
f'	–	0	+
f	↘	min (0,1)	↗

6) Grafik



ÇÖZÜMLÜ TEST – 4

1. $f:[-2,4]\to R,\ f(x)=\left|x^2-16\right|+2x$ veriliyor. **f′(x) aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 0 B) –4x C) 4x

D) 6x E) –2x + 2

ÇÖZÜM

x	$-\infty$	-4		4		$+\infty$
x^2-4	+	0	−	0	+	

olduğundan;

$f(x)=-x^2+16+2x$

$f'(x)=-2x+2$ olur.

YANIT "E"

2. $f(x)=\cos e^x$

$g(x)=\sin\ln x$ ise **$(fog)'(1)$ kaçtır?**

A) e B) –sin1 C) cos1

D) 1 E) e^e

ÇÖZÜM

$f(x)=\cos e^x \Rightarrow f'(x)=-e^x.\sin e^x$

$g(x)=\sin\ln x \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{x}\cdot\cos\ln x$

$(fog)'(1)=g'(1).f'(g(1))$

$g'(x)=\frac{1}{x}\cdot\cos\ln x \Rightarrow g'(1)=\cos\ln 1=\cos 0=1$

$g(1)=\sin\ln 1 \quad \Rightarrow g(1)=0$

$f'(g(1))=f'(0)=e^0.\sin e^0$

$=-\sin 1$

bulunan değerler yerine yazılırsa,

$(fog)'(x)=g'(1).f'(0)$

$=1.(-\sin 1)=-\sin 1$

YANIT "B"

3. $f(x)=x^3+3x^2$ ise **$\left(f^{-1}\right)'(4)$ kaçtır?**

A) $\frac{1}{9}$ B) 1 C) 9 D) 18 E) 36

ÇÖZÜM

$y=f(x)$ olmak üzere;

$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ idi

$f(x)=y=x^3+3x^2=4$

$=x^3+3x^2-4=0\Rightarrow x=1$

$f(x)=x^3+3x^2\Rightarrow f'(x)=3x^2+6x$

$f'(1)=3+6=9$

$\left(f^{-1}\right)'(4)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{9}$ olur.

YANIT "A"

4. $f(x)=5\cos^3\left(\frac{4}{5}x+8\right)$ ise **f′(x) fonksiyonunun periyodu kaçtır?**

A) $\frac{2\pi}{5}$ B) $\frac{5\pi}{2}$ C) $\frac{5\pi}{4}$

D) $\frac{10\pi}{3}$ E) $\frac{35\pi}{2}$

ÇÖZÜM

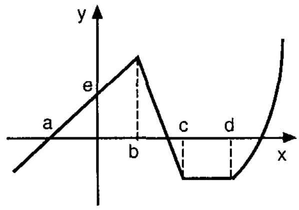
$f(x)=\cos^n(ax+b)$ şeklinde verilen fonksiyonların periyotları n tek ise

$T=\frac{2\pi}{a}$ ve $y=f(x)$ in periyodu T ise f′(x) in periyoduda T idi. Bu durumda $n=3$, $a=\frac{4}{5}$ olduğundan f′(x) in periyodu

$T=\frac{2\pi}{\frac{4}{5}}=\frac{10\pi}{4}=\frac{5\pi}{2}$ olur.

YANIT "B"

5. Grafiği verilen y = f(x) fonksiyonu için **aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?**



A) $(-\infty, b)$ aralığında $f'(x) > 0$

B) Fonksiyon x = b de türevsizdir.

C) $x \in (c,d)$ ise $f'(0) = 0$

D) $x \in (d, +\infty)$ ise $f''(x) > 0$

E) $f'(c) = f'(d)$

ÇÖZÜM

Seçenekleri tek tek inceleyelim.

A) $(-\infty,b)$ aralığında fonksiyon artandır. Bu nedenle $f'(x) > 0$ dir.

B) x = b fonksiyonunun grafiğinin kırıldığı noktadır. Sol ve sağ türevler farklı olduğundan x = b de türev yoktur.

C) (c,d) aralığında fonksiyon sabittir. Sabit fonksiyonların türevleri sıfır olduğundan,

$x \in (c,d) \Rightarrow f'(x) = 0$ doğrudur.

D) $(d, +\infty)$ aralığında f nin grafiği çukur (konveks) olduğundan $f''(x) > 0$ doğrudur.

E) x = c ve x = d noktalarında fonksiyon kırıldığından türevsizdir.

$f'(c) = f'(d)$ yanlıştır.

YANIT "E"

6. **(a,b) aralığında pozitif, türevli, artan bir y = f(x) fonksiyonu için hangisi daima doğrudur?**

A) $a.f(x).f'(x) > 0$

B) $\frac{a}{f(x)} < 0$

C) $a.f(x).f'(x) < 0$

D) $y = f^2(x) - f(x)$ artandır.

E) $y = f^2(x) + f(x)$ artandır.

ÇÖZÜM

$f(x) > 0$ verilmiştir.

$y = f(x)$ artan olduğundan $f'(x) > 0$ bu belirlemelere göre seçeneklere bakalım.

A) a = 0 için $a.f(x).f'(x) = 0$ olabileceğinden önerme her zaman doğru değildir.

B) a = 0 için $\frac{0}{f(x)} = 0$ olacağından önerme her zaman doğru değildir.

C) a = 0 için $a.f(x).f'(x) = 0$ olacağından önerme her zaman doğru değildir.

D) $y = f^2(x) - f(x)$ için $y' > 0$ çıkarsa önerme doğrudur.

$$y' = \underset{(+)}{\underset{\downarrow}{2}} \,.\, \underset{(+)}{\underset{\downarrow}{f(x)}} \,.\, \underset{(+)}{\underset{\downarrow}{f'(x)}} - \underset{(+)}{\underset{\downarrow}{f'(x)}}$$

bu belirlemelere göre,

$y' > 0$, $y' = 0$, $y' < 0$ olabilir.

Önerme her zaman doğru değildir.

E) $y = f^2(x) + f(x)$ için $y'>0$ ise önerme doğrudur.

$$y' = \underbrace{\underset{(+)}{\underset{\downarrow}{2}} \,.\, \underset{(+)}{\underset{\downarrow}{f(x)}} \,.\, \underset{(+)}{\underset{\downarrow}{f'(x)}} + \underset{(+)}{\underset{\downarrow}{f'(x)}}}_{+}$$

$\forall x \in (a,b)$ için $y > 0$ olduğundan önerme doğrudur.

YANIT "E"

7. $f(x) = 2^{(2^x)}$ ise **f′(1) kaçtır?**

A) ln 4 B) 2ln4 C) 3ln4

D) $8(\ln 2)^2$ E) 8ln5

ÇÖZÜM

$f(x) = a^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = u'(x).a^{u(x)}.\ln a$

$f(x) = 2^{2^x} \Rightarrow f'(x) = \left(2^x\right)'.2^{2^x}.\ln 2$

$\left(2^x\right)' = 1.2^x.\ln 2$

$\Rightarrow f'(x) = 2^x.\ln 2.2^{(2^x)}.\ln 2$

$\Rightarrow f'(x) = 2^x.2^{(2^x)}.(\ln 2)^2$

$\Rightarrow f'(1) = 8.(\ln 2)^2$ olur.

YANIT "D"

8. $y = -x^3 + 3x^2 - 2(m+2)x$ fonksiyonunun daima azalan olması için **m hangi aralıkta olmalıdır?**

A) $m > -\frac{1}{2}$ B) $m < -\frac{1}{2}$ C) $m > \frac{1}{2}$

D) $m < \frac{1}{2}$ E) $m \le \frac{1}{2}$

ÇÖZÜM

Fonksiyonun daima azalan olması için $f'(x) < 0$ olmalıdır.

$y' = -3x^2 + 6x - 2m - 4$ olur.

$$\Delta < 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 4(-3)(-2m-4) < 0$$
$$\Rightarrow \Delta = 36 + 12(-2m-4) < 0$$
$$\Rightarrow \Delta = 3 - 2m - 4 < 0$$
$$\Delta = -2m - 1 < 0$$
$$m > -\frac{1}{2} \text{ dir.}$$

$m > -\frac{1}{2}$ için $y' < 0$ dır.

YANIT "A"

9. $x, y \in R^+$ $x + y = 12$ ise

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ **nin <u>en küçük</u> değeri nedir?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 D) 2

ÇÖZÜM

$x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - x$

$T(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{12-x}$ olur. Toplamının en küçük değer aldığı noktada $T'(x) = 0$ olduğundan,

$$T'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(12-x)^2}$$

$$T'(x) = \frac{x^2 - (12-x)^2}{x^2.(12-x)^2}$$

$$T'(x)=0 \Rightarrow x^2 - (12-x)^2 = 0$$
$$x^2 - 144 + 24x - x^2 = 0$$
$$24x = 144$$
$$x = \frac{144}{24}$$
$$x = 6 \text{ olur.}$$

$x = 6$ ise $y = 6$ olur.

$\max(T(x)) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ dür.

YANIT "B"

10. $f(x) = \dfrac{mx^2 + n}{nx + m}$ veriliyor. $f'(0) = -4$ ise $\dfrac{n^2}{m^2}$ **kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \frac{2mx(nx+m) - n(mx^2+n)}{(nx+m)^2}$$

$$f'(0) = \frac{2m.0(n.0+m) - n(m.0^2+n)}{(n.0+m)^2} = -4$$

$$\Rightarrow \frac{-n^2}{m^2} = -4 \Rightarrow \frac{n^2}{m^2} = 4 \text{ bulunur.}$$

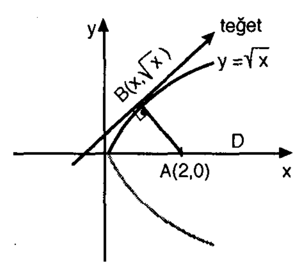
YANIT "D"

11. $y = \sqrt{x}$ eğrisi üzerindeki noktalardan hangisi **A(2, 0) noktasına <u>en yakındır?</u>**

A) (1, 2) B) $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ C) $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

D) (1, 1) E) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

ÇÖZÜM



Şekle göre

$m_{AB}.m_T = -1$ dir.

$$m_{AB} = \frac{\sqrt{x}}{x-2}, \quad m_T = y'_{(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{x-2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -1$$

$$\frac{1}{x-2} \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$x - 2 = -\frac{1}{2}$ ise $x = \frac{3}{2}$

$B(x, \sqrt{x}) \Rightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ olur.

YANIT "C"

12. $f(3x+2) = x^3 + x^2 + x + 1$ dir.

$y = f(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ deki teğetinin denklemi nedir?

A) $\frac{1}{3}(x+1)$ B) $y = 2x$ C) $y = \frac{1}{2}x + 1$

D) $y = \frac{3}{2}x$ E) $y = \frac{1}{2}x - 2$

ÇÖZÜM

$f(3x+2) = x^3 + x^2 + x + 1$

$x = 0$ için

$f(3.0+2) = 0^3 + 0^2 + 0 + 1 \Rightarrow f(2) = 1$

Teğetin çizildiği nokta A(2, 1) olur.

Teğetin eğimini bulmak için verilen eşitliğin her iki yanının x e göre türevini alırsak,

$(3x+2)'f'(3x+2) = 3x^2 + 2x + 1$

$3.f'(3x+2) = 3x^2 + 2x + 1$

$f'(2)$ Eğim olacağından $x = 0$ için

$3\,f'(0+2) = 3.0^2 + 2.0 + 1$

$3f'(2) = 1 \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{3}$ olur.

O halde teğetin denklemi;

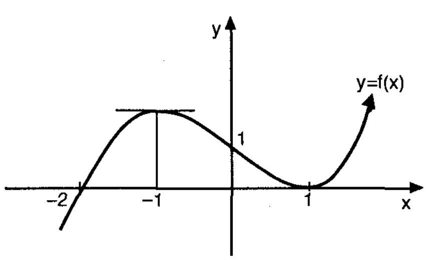
$y - 1 = \frac{1}{3}(x-2)$

$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + 1$

$y = \frac{1}{3}(x+1)$ bulunur.

YANIT "A"

13.



Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre,

$f(x) \,.\, f'(x) > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

A) $(-\infty,-2) \cup (-1,+\infty)$ B) $(-2,-1) \cup (1,+\infty)$

C) $(-\infty,-1)$ D) $(-1, 1)$

E) $(-2, 1)$

ÇÖZÜM

$f(x) \,.\, f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ ve $f'(x) > 0$

veya $f(x) < 0$ ve $f'(x) < 0$ olmalıdır.

f(x) in grafiğine göre f(x) ve f′(x) in işaret tablosunu oluşturalım.

x	$-\infty$ … -2	-2 … -1	-1 … 1	1 … $+\infty$
f(x)	−	+	+	+
f′(x)	+	+	−	+

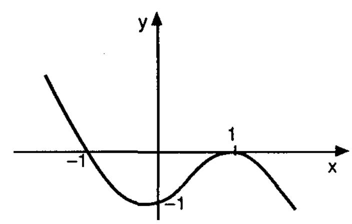
Tabloya göre,

$(-2, -1)$ ile $(1, +\infty)$ aralıklarında $f(x) > 0$ ve $f'(x) > 0$ sağlandığında çözüm kümesi:

$Ç = (-2, -1) \cup (1, +\infty)$

YANIT "B"

14.



Şekildeki $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ fonksiyonunun grafiği çizilmiştir. Buna göre, **c + d kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

ÇÖZÜM

$f(x) = a(x+1).(x-1)^2$ ve $f(0) = -1$ dir.

$f(0) = a(0+1).(0-1)^2 \Rightarrow a = -1$ olur.

$f(x) = -(x+1)\,(x-1)^2$

$f(x) = -(x+1)\,(x^2 - 2x + 1)$

$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x - x^2 + 2x - 1$

$f(x) = -x^3 + x^2 + x - 1$ bulunur.

$-x^3 + x^2 + x - 1 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ yazılarak,

$c = 1,\ d = -1 \Rightarrow c + d = 1 + (-1) = 0$ bulunur.

YANIT "C"

15. $x = e^t$, $y = 3e^{-t}$ parametrik denklemleri ile verilen $y = f(x)$ eğrisinin **x = 1 deki teğetinin eğimi kaçtır?**

A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 1

ÇÖZÜM

$x = 1 \Rightarrow e^t = 1,\ t = 0$ olur.

Bu durumda; $\frac{dy}{dx}$ in t = 0 için değeri x = 1 deki teğetinin eğimi olur.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3e^{-t}}{e^t}$$

$t = 0$ için $\frac{dy}{dx} = \frac{-3.e^{-0}}{e^0} = -3 = m_{\text{Teğet}}$ olur.

YANIT "A"

16. $x = e^t\cos t$, $y = e^t.\sin t$ parametrik denklemleri ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için, $\frac{d^2y}{dx^2}$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\dfrac{3}{e^t(\cos t + \sin t)^2}$ B) $e^t.\cos^2 t$

C) $\dfrac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^2}$ D) $\dfrac{2}{e^t(\cos t - \sin t)}$

E) $\dfrac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^3}$

ÇÖZÜM

$$\frac{dx}{dt} = e^t.\cos t - \sin t \cdot e^t = e^t(\cos t - \sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t.\sin t + \cos t \cdot e^t = e^t(\sin t + \cos t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t(\sin t + \cos t)}{e^t(\cos t - \sin t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t} \text{ olur.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} \text{ idi}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}\right)\cdot\frac{1}{e^t.(\cos t - \sin t)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\cos t - \sin t)^2 - (-\sin t - \cos t)(\sin t + \cos t)}{(\cos t - \sin t)^2 e^t(\cos t - \sin t)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos^2 t - 2\sin t\cos t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2\sin t\cdot\cos t + \cos^2 t}{e^t(\cos t - \sin t)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(\cos^2 t + \sin^2 t)}{e^t(\cos t - \sin t)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^3} \text{ bulunur.}$$

YANIT "E"

17. $x = \tan t$, $y = \sin t.\cos t$

parametrik denklemi ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için $\frac{d^2y}{dx^2}$ ifadesinin **t = 0 da değeri nedir?**

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM

$$x = \tan t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 1 + \tan^2 t$$

$$y = \sin t.\cos t \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sin 2t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \cos 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos 2t}{1 + \tan^2 t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} \text{ olduğundan}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\cos 2t}{1 + \tan^2 t}\right)\cdot\frac{1}{1 + \tan^2 t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2\sin 2t(1 + \tan^2 t) - 2\tan t(1 + \tan^2 t)\cdot\cos 2t}{(1 + \tan^2 t)^3}$$

t = 0 için

$$= \frac{-2\cdot\sin 0(1 + \tan^2 0) - 2\tan 0(1 + \tan^2 0)\cdot\cos 0}{(1 + \tan^2 0)^3}$$

= 0 bulunur.

YANIT"B"

18. $x = 2t^2$, $y = t^3 + 3$ parametrik denklemleri ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ **nedir?**

A) t B) $\dfrac{3}{16t}$ C) t^2

D) $\dfrac{1}{t^2}$ E) $2t$

ÇÖZÜM

$$\frac{dx}{dt} = 4t\,,\ \frac{dy}{dt} = 3t^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3t^2}{4t} = \frac{3}{4}t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{olduğundan}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{4}t\right)\cdot\frac{1}{4t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4t} = \frac{3}{16t} \quad \text{bulunur.}$$

YANIT "B"

19. $f(x) = x^2 + 6x + 5$ eğrisinin x eksenini kestiği noktalardan çizilen **teğetler arasındaki açılardan birinin tanjantı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\dfrac{1}{15}$ B) $\dfrac{2}{15}$ C) $\dfrac{4}{15}$ D) $\dfrac{7}{15}$ E) $\dfrac{8}{15}$

ÇÖZÜM

Önce eğrinin x eksenini kestiği noktaları bulalım.

$x^2 + 6x + 5 = 0$, $(x + 5)(x + 1) = 0$

$x = -5$, $x = -1$

$f'(x) = 2x + 6$

$f'(-5) = 2(-5) + 6 = -4 = m_1$(I. teğetin eğimi)

$f'(-1) = 2.(-1) + 6 = 4 = m_2$(II. teğetin eğimi)

teğet arasındaki açılardan biri α ise

$$\tan\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{-4-4}{1+(-4)\cdot 4} = \frac{-8}{-15} = \frac{8}{15}$$

YANIT "E"

20. $f(x) = x^2.e^{-x}$ fonksiyonunun yerel **maksimum değeri kaçtır?**

A) $\dfrac{1}{e^2}$ B) $\dfrac{2}{e^2}$ C) $\dfrac{3}{e^2}$ D) $\dfrac{4}{e^2}$ E) e^2

ÇÖZÜM

$f'(x) = 2x.e^{-x} - e^{-x}.x^2$

$f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$

$e^{-x}(2x - x^2) = 0 \Rightarrow e^{-x} = 0$ ve $2x - x^2 = 0$

$\forall x \in R$ için $e^{-x} > 0$ olduğundan $e^{-x} = 0$ denkleminin kökü yoktur.

$2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0$

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$

Türevin işaretini inceleyelim.

x	$-\infty$	0	2	
f'(x)	−	+	−	
	↘	↗	↘	
		min. nok. (0,f(0))	max.nok. (2,f(2))	

maksimum değer $= f(2) = 2^2.e^{-2} = \dfrac{4}{e^2}$

YANIT "D"

21. $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 2x + 5 \\ g(x) = -x^2 + 2x + 10 \end{array}\right\}$ fonksiyonlarının

x = a daki teğetleri paralel ise **a kaçtır?**

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM

$f'(x) = 2x - 2 \quad \Rightarrow \quad m_1 = f'(a) = 2a - 2$

$g'(x) = -2x + 2 \quad \Rightarrow \quad m_2 = g'(a) = -2a + 2$

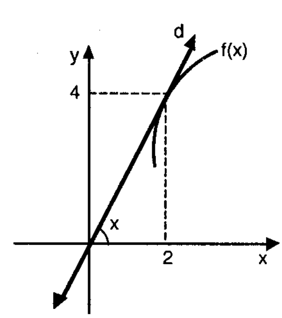
teğetler paralel ise $m_1 = m_2$ dir.

Buna göre, $2a - 2 = -2a + 2$

$4a = 4 \Rightarrow a = 1$ olur.

YANIT "C"

22. Şekilde, $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ deki teğeti görülmektedir.



$g(x+1) = \dfrac{x}{f(x)}$ ise

g′(3) kaçtır?

A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

ÇÖZÜM

$g(x+1)=\dfrac{x}{f(x)}$ eşitliğin iki yanının x e göre türevini alırsak,

$(x+1)'g'(x+1)=\dfrac{(x)'.f(x)-f'(x).x}{f^2(x)}$ olur.

$g'(x+1)=\dfrac{f(x)+f'(x).x}{f^2(x)}$ olur.

grafikten; $f(2)=4$, $f'(2)=\tan\alpha=\dfrac{4}{2}=2$

olduğu belirlenir.

$g'(3)=\dfrac{4-2.2}{4^2}=0$ olur.

YANIT "A"

23. $f(x)=\sin 2x$ ise $\left(\dfrac{d^{222}f}{dx^{222}}\right)$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $2^{222}\sin2x$ B) $\cos2x$

C) 0 D) $-2^{222}.\sin2x$

E) $\cos^{222}2x$

ÇÖZÜM

$f(x)=\sin(ax+b)\Rightarrow$

$\dfrac{d^nf}{dx^n}=a^n\sin\left(n\cdot\dfrac{\pi}{2}+ax+b\right)$ idi

$f(x)=\sin2x\Rightarrow$

$\dfrac{d^{222}f}{dx^{222}}=2^{222}\sin\left(\dfrac{222\pi}{2}+2x\right)$

$=2^{222}\sin(111\pi+2x)$

$=2^{222}\sin(\pi+2x)$

$=-2^{222}\sin2x$ olur.

$(\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ idi$)$

YANIT "D"

24. $f(x)=x^{[\![2x+\frac{7}{2}]\!]}$ **eğrisinin x = 1 deki teğetinin eğimi kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

$x=1$ için $2x+\dfrac{7}{2}$

$2.1+\dfrac{7}{2}=\dfrac{11}{2}\notin Z$ olduğundan, $x=1$ de türevlidir. $\left(f(x)=x^n\Rightarrow f'(x)=n.x^{n-1}\text{ idi}\right)$

$f'(x)=[\![2x+\frac{7}{2}]\!]\,x^{[\![2x+\frac{7}{2}]\!]-1}$

$f'(1)=[\![2.1+\frac{7}{2}]\!]\,.\,1^{[\![2x+\frac{7}{2}]\!]-1}$

$f'(1)=5.1^{5-1}\Rightarrow f'(1)=5$ dir.

$m_t=f'(1)=5$ olur.

YANIT "E"

25. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ve $g(x)=x^2$ eğrilerinin **kesim noktasındaki teğetleri arasındaki dar açının sinüsü kaçtır?**

A) $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ B) $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$ C) $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

D) 3 E) $\dfrac{1}{2}$

ÇÖZÜM

Önce kesim noktasını bulalım.

$\dfrac{1}{x}=x^2\Rightarrow x^3=1\Rightarrow x=1$ dir.

I. teğetin eğimi $m_1=f'(1)$

II. teğetin eğimi $m_2=g'(1)$ olduğundan,

$f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}\Rightarrow f'(1)=\dfrac{-1}{1}=-1=m_1$

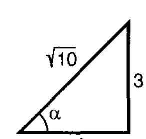
$g'(x)=2x\Rightarrow g'(1)=2.1=2=m_2$

teğetler arasındaki açılardan biri α olsun

$\tan\alpha=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1.m_2}$ ye göre

$\tan\alpha=\dfrac{-1-2}{1+(-1).(2)}=\dfrac{-3}{-1}=3$ olur.

$\tan\alpha=3>0$ olduğundan α dar açıdır.



Şekildeki dik üçgene göre

$\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ olur.

YANIT "C"

ÇÖZÜMLÜ TEST – 5

1. $f(x) = x^3\sqrt{x}$ ise $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ **kaçtır?**

A) $7\sqrt{2}$ B) $14\sqrt{2}$ C) $21\sqrt{2}$
D) $28\sqrt{2}$ E) $35\sqrt{2}$

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ idi,

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$ dir.

$$f(x) = x^3 \cdot \sqrt{x} \Rightarrow f(x) = x^3 . x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow f'(2) = \frac{7}{2} \cdot 2^{\frac{5}{2}} = \frac{7}{2}\sqrt{2^4 .2}$$

$$f'(x) = \frac{4.7}{2}\sqrt{2} \Rightarrow f'(x) = 14\sqrt{2}$$

YANIT "B"

2. $y = \left|(x-3)^2(x+7)\right|$ fonksiyonunun **x in kaç farklı değeri için türevi yoktur?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

ÇÖZÜM

$(x-3)^2(x+7) = 0$ denklemimin tek katlı kökleri için fonksiyonun türevi yoktur.

$(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$ çift katlı kök,

$(x+7) = 0 \Rightarrow x = -7$ tek katlı kök olduğundan fonksiyonun $x = -7$ de türevi yoktur.

Yani; x in bir tek değeri için türevi yoktur.

YANIT "B"

3. $f : R^+ \to R^+$, $f(x) = x^3$ ise $\left(f^{-1}\right)'(27)$ **neye eşittir?**

A) $\dfrac{1}{243}$ B) $\dfrac{1}{81}$ C) $\dfrac{1}{27}$ D) $\dfrac{1}{9}$ E) $\dfrac{1}{3}$

ÇÖZÜM

$f(x) = x^3$ ise $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ dir.

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \qquad \left(y = \sqrt[3]{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{3\sqrt[3]{f(x)^2}}\right)$$

$$\left(f^{-1}\right)'(27) = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{3^6}} = \frac{1}{3.3^2} = \frac{1}{27} \text{ olur.}$$

YANIT "C"

4. $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & x < 1 \text{ ise} \\ \left|x^2 - 9\right| & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.

f(x) in x = 2 deki teğetinin eğimi kaçtır?

A) –4 B) $\dfrac{1}{2}$ C) 1 D) 4 E) 6

ÇÖZÜM

x = 2 deki teğetin eğimi = f′(2) dir.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2.1}{2\sqrt{x}} & x < 1 \quad \text{ise} \\ -2x & 1 < x < 3 \quad \text{ise} \\ +2x & x > 3 \quad \text{ise} \end{cases}$$

$1 < 2 < 3$ olduğnudan;

$f'(2) = -2.2 = -4 \Rightarrow m_{Teğet} = -4$ olur.

YANIT "A"

5. $f(x) = x^2 + [\![x]\!] + sgn(x-1)$ ise, $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ **kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) Yok

ÇÖZÜM

$x = \dfrac{1}{2}$ f fonksiyonu için kritik nokta değildir.

$x \notin Z \Rightarrow [\![x]\!]' = 0$

$x \neq 1 \Rightarrow (sgn(x-1))' = 0$ olduğundan,

$f(x) = 2x + 0 + 0$

$f'(x) = 2x \Rightarrow f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$ olur.

YANIT "D"

6. $f\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)=\dfrac{x-3}{x+2}$ ise $f'\left(-\dfrac{2}{3}\right)$ **kaçtır?**

A) $-\dfrac{40}{9}$ B) –3 C) $-\dfrac{9}{4}$

D) 1 E) 2

ÇÖZÜM

$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$ idi. (Zincir kuralı)

$f\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)=\dfrac{x-3}{x+2}$ eşitliğinde (1)

$g(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$ alınarak $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

kuralına göre,

$g'(x)=\dfrac{-3.1-2.1}{(x-3)^2}=\dfrac{-5}{(x-3)^2}$ (2) bulunur.

1. eşitliğin her iki yanının x e göre türevini zincir kuralına göre alırsak,

$$g'(x).f'(g(x))=\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)'$$

$$\dfrac{-5}{(x-3)^2}\cdot f'\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)=\dfrac{+2+3}{(x+2)^2}$$

$$\dfrac{-5}{(x-3)^2}\cdot f'\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)=\dfrac{5}{(x+2)^2}$$

x yerine 0 yazılarak

$$\dfrac{-5}{9}\cdot f'\left(\dfrac{-2}{3}\right)=\dfrac{5}{4}$$

$f'\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{9}{4}$ bulunur.

YANIT "C"

7. $f:R\to R,\ f(x)=\begin{cases} x^2.\sin\dfrac{1}{x} & ;\ x\neq 0 \\ 0 & ;\ x=0 \end{cases}$ ise

f′(0) nedir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Yok

ÇÖZÜM

x =0 da sağdan ve soldan türevlerini bulalım.

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}-0}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}x.\sin\dfrac{1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{0^+}{\dfrac{1}{0^+}}=0$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\lim_{x\to 0^-}\dfrac{x}{\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{0^-}{\dfrac{1}{0^-}}=0$$

$f'(0^+)=f'(0^-)=f'(0)=0$ bulunur.

YANIT "A"

8. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ise $xf'(x)+f(x)$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $-x^2f'(x)$ B) $2xf(x)$ C) 0

D) 1 E) $f(x)$

ÇÖZÜM

$$f(x)=\dfrac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}\ \text{dir.}$$

$$x.f'(x)+f(x)=x\cdot\dfrac{-1}{x^2}+\dfrac{1}{x}$$

$$=\dfrac{-1}{x}+\dfrac{1}{x}=0\ \text{bulunur.}$$

YANIT "C"

9. $f(x)=\ln x$, a x in bir fonksiyonu ve $\tan a=f'(x)$ ise $\dfrac{da}{dx}$ **in x = 1 için değeri kaçtır?**

A) $-\dfrac{7}{2}$ B) $-\dfrac{5}{2}$ C) $-\dfrac{3}{2}$ D) $-\dfrac{4}{7}$ E) $-\dfrac{1}{2}$

ÇÖZÜM

$\tan a=f'(x)\Rightarrow a=\arctan f'(x)$ olur.

$y=\arctan f(x)\Rightarrow y'=\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$ olduğundan

$a=\arctan f'(x)\Rightarrow\dfrac{da}{dx}=\dfrac{f''(x)}{1+(f'(x))^2}$ olur.

$$f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x}\Rightarrow f'(1)=1$$

$$f'(x)=\dfrac{1}{x}\Rightarrow f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow f''(1)=-1\ \text{olur.}$$

$$\left.\dfrac{da}{dx}\right]_{x=1}=\dfrac{f''(1)}{1+(f'(1))^2}=-\dfrac{1}{1+1^2}=-\dfrac{1}{2}\ \text{olur.}$$

YANIT "E"

10. $f(x) = \frac{1}{10}x^5$ ise $T(x) = f''(x) + f'''(x)$

toplamının **yerel minimum noktasının apsisi kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

ÇÖZÜM

$f(x) = \frac{1}{10}x^5 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^4 \Rightarrow$

$f''(x) = 2x^3 \Rightarrow f'''(x) = 6x^2$

$T(x) = 2x^3 + 6x^2$

$T'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 + 12x = 0$

$\Rightarrow 6x(x+2) = 0$

$\Rightarrow x = 0,\ x = -2$

x		–2		0	
f(x)	+		–		+
	↗	max	↘	min	↗

x = –2 de yerel maksimum

x = 0 da yerel minimum vardır.

YANIT "C"

11. $f'(x) = \sin e^x$, $y = f(3-x)$ ise

$\frac{dy}{dx}$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $e\sin e^{-x}$ B) $\frac{e^2}{2}\sin e^{3-x}$

C) $-2\sin e^{3-x}$ D) $2\sin e^{3+x}$

E) $-\sin e^{3-x}$

ÇÖZÜM

Türevde zincir kuralını uygulayalım.

$\frac{dy}{dx} = (3-x)'.f'(3-x)$

$= -f'(3-x)$ olur.

$f'(x) = \sin e^x \Rightarrow f'(3-x) = \sin e^{3-x}$ dir.

$\frac{dy}{dx} = -\sin e^{3-x}$ bulunur.

YANIT "E"

12. $y > 0$ olmak üzere,

$\left.\begin{array}{l} x = 5\cos t \\ y = 5\sin t \end{array}\right\}$ parametrik denklemleri ile verilen

fonksiyonun **x = 4 deki teğetinin eğimi nedir?**

A) –2 B) $-\frac{4}{3}$ C) $-\frac{3}{4}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

ÇÖZÜM–1

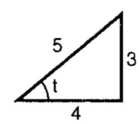
$x = 5\cos t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -5\sin t$

$y = 5\sin t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 5\cos t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{5\cos t}{-5\sin t} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\cot t$

$x = 4$ ise $4 = 5\cos t \Rightarrow \cos t = \frac{4}{5}$

$\cot t = \frac{4}{3}$; $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=4} = \frac{-4}{3}$



teğetin eğimi $m_T = -\frac{4}{3}$ bulunur.

YANIT "B"

ÇÖZÜM–2

$\left.\begin{array}{l} x = a\sin t \\ y = a\cos t \end{array}\right\}$ iken $x^2 + y^2 = a^2$ idi

$\begin{array}{l} x = 5\cos t \\ y = 5\sin t \end{array}$ ise $x^2 + y^2 = 25$

$x^2 + y^2 - 25 = 0$ kapalı fonksiyonların türevi kuralına göre türevlenirse,

$f'_{(x,y)} = \frac{-f'(x)}{f'(y)} = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$

$x = 4$ için $4^2 + y^2 = 25$

$y^2 = 9$

$y = \mp 3$

$y > 0$ verildiğinden $y = 3$ olur.

$m_T = \frac{-4}{3}$ bulunur.

13. $y = x^2 - 4x$ fonksiyonunun **koordinatlarının toplamının <u>en küçük</u> değeri nedir?**

A) -3 B) $\frac{-8}{3}$ C) -2 D) $\frac{-9}{4}$ E) 0

ÇÖZÜM

Verilen fonksiyonların koordinatlar toplamı

$T = x + y = x + x^2 - 4x = x^2 - 3x$ dir.

$T' = 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

x		$\frac{3}{2}$	
T'	$-$	0	$+$
T	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$ (min)	$\nearrow$

Koordinatları toplamının en küçük değeri

$$T\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4} \text{ dür.}$$

YANIT "D"

14. $y = \sin 3x$ ise, $\frac{d^{15}y}{dx^{15}}$ **nedir?**

A) $3^{15}.\cos 3x$ B) $3^{15}.\sin 3x$

C) $-3^{15}.\cos 3x$ D) $-3^{15}.\tan 3x$

E) $3^{15}.\cot 3x$

ÇÖZÜM

$y = \sin(ax + b) \Rightarrow$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = a^n \sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2} + ax + b\right) \text{ idi.}$$

$y = \sin 3x$ ise $a = 3,\ b = 0,\ n = 1$

$$\frac{d^{15}y}{dx^{15}} = 3^{15}\sin\left(15\cdot\frac{\pi}{2} + 3x\right)$$

$$= 3^{15}\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 3x\right)$$

$$= -3^{15}\cos 3x \text{ olur.}$$

YANIT "C"

15. $x = t^2 + 1,\ y = t^3 + 2t$

parametrik denklemleri ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonu ve **$t = 1$ için $\frac{d^2y}{dx^2}$ aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{2}$ E) 1

ÇÖZÜM

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2+2}{2t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} \text{ idi.}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{3t^2+2}{2t}\right)\cdot\frac{1}{2t}$$

$$= \frac{6t.2t - 2(3t^2+2)}{(2t)^2}\cdot\frac{1}{2t}$$

$$= \frac{12t^2 - 6t^2 - 4}{4t^2}\cdot\frac{1}{2t}$$

$$= \frac{6t^2-4}{8t^3}$$

$$t = 1 \text{ için } \frac{6.1^2-4}{8.1^3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

YANIT "C"

16. $f(x) = a\cos x + b.\sin x$ ise **$f''(\pi)$ kaçtır?**

A) $a - b$ B) $-a + b$ C) $-a$

D) a E) b

ÇÖZÜM

$f'(x) = -a.\sin x + b.\cos x$

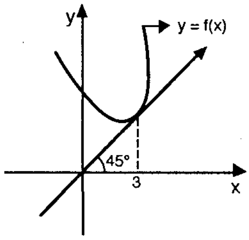
$f''(x) = -a.\cos x - b.\sin x$

$f''(\pi) = -a.\cos\pi - b.\sin\pi$

$f''(\pi) = -a.(-1) - b.0 = a$ bulunur.

YANIT "D"

17. Şekilde grafiği verilen $y = x^2 + bx + c$ fonksiyonuna d doğrusu $x = 3$ noktasında teğet olduğuna göre, **c kaçtır?**



A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

ÇÖZÜM

$y' = 2x + b$

$y'(3) = 1 \qquad 2.3 + b = 1$

$b = -5$ olur.

d doğrusu orijinden geçtiğine göre $y = mx$ şeklindedir.

$m = \tan 45 = 1 \Rightarrow y = x$ d doğrusunun denklemidir.

$y(3) = 3$ tür.

$y = x^2 + (-5)x + c$ eşitliğine $x = 3$ için $y = 3$ uygulanırsa,

$3 = 9 - 15 + c \Rightarrow c = 9$ olur.

YANIT "B"

18. $x^2y^2 - 3x^3 + 5y^2 + 4x - 7 = 0$

fonksiyonu için $\frac{dy}{dx}$ in **(1, 1) noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?**

A) $-\frac{5}{12}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{7}{12}$

ÇÖZÜM

$$f'_{(x,y)} = -\frac{f'(x)}{f'(y)}$$

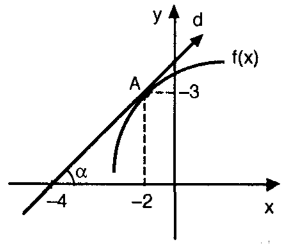
$$f'_{(x,y)} = -\frac{2xy^2 - 9x^2 + 4}{2x^2y + 10y}$$

$$f'_{(1,1)} = -\frac{2\cdot1\cdot1^2 - 9\cdot1^2 + 4}{2\cdot1^2\cdot1 + 10\cdot1}$$

$$f'_{(1,1)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad \text{bulunur.}$$

YANIT "C"

19. Şekilde $y = f(x)$ eğrisi ve $A(-2, 3)$ noktasındaki teğeti görülmektedir.



$g(x+1) = \frac{f(x)}{x}$ olduğuna göre,

g′(–1) kaçtır?

A) –4 B) –2 C) $-\frac{3}{2}$ D) 1 E) $\frac{3}{2}$

ÇÖZÜM

Her iki tarafın x e göre türevini alırsak,

$$(x+1)'.g'(x+1) = \frac{f'(x).x - 1.f(x)}{x^2}$$

$$g'(x+1) = \frac{f'(x).x - f(x)}{x^2} \quad \text{olur.}$$

$x = 2$ için

$$g'(-2+1) = \frac{f'(-2).(-2) - f(-2)}{(-2)^2}$$

$$g'(-1) = \frac{-2f'(-2) - f(-2)}{(-2)^2} \quad \text{olur.}$$

d doğrusunun eğimi $f'(-2)$ dir.

$f'(-2) = \tan\alpha = \frac{3}{2}$ dır.

$f(-2) = 3$ değerlerini yerlerine yazarak,

$$g'(-1) = \frac{-2\cdot\frac{3}{2} - 3}{4}$$

$$g'(-1) = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \quad \text{bulunur.}$$

YANIT "C"

20. $f(x) = |x^3 - 10| - 2x^2 + 5$ fonksiyonu için **f″(–2) kaçtır?**

A) –8 B) –4 C) 2 D) 4 E) 8

ÇÖZÜM

$x^3 - 10$, $x = -2$ için

$(-2)^3 - 10 = -18 < 0$ olduğunda

$f'(x) = -(3x^2) - 4x$

$f''(x) = -6x - 4$ olur.

$f''(-2) = -6.(-2) - 4 = 8$ bulunur.

YANIT "E"

21. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ fonksiyonunun üzerindeki A(1, –1) noktasından çizilen teğeti, eğriyi bir başka B noktasında kestiğine göre, **|AB| kaç birimdir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

Önce x = 1 deki teğetinin denklemini bulalım.

$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(1) = 3.1^2 - 3 = 0$

$m_{Teğet} = f'(1) = 0$ dır.

teğetin denklemi; $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 1 = 0(x - 1)$

$y = -1$ olur.

$y = x^3 - 3x + 1$ ile $y = -1$ ortak çözülerek

$-1 = x^3 - 3x + 1$

$x^3 - 3x + 2 = 0$ denkleminin köklerinden biri x = 1 olduğundan,

$x^3 - 3x + 2$, $x - 1$ ile tam bölünür.

Bölmeyi Horner metodu ile yapalım.

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0

O halde $(x^3 - 3x + 2) = (x - 1)(x^2 + x - 2)$

$x - 1 = 0$ $x^2 + x - 2 = 0$

$x = 1$ $x = -2,\ x = 1$

$f(1) = 1 - 3 + 1$ $f(-2) = -8 + 6 + 1$

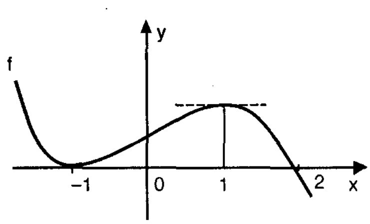
$f(1) = -1$ $f(-2) = -1$

A(1, –1) B(–2,–1)

|AB| = 3 bulunur.

YANIT "C"

22.



Şekildeki f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?**

A) $f(-2) . f'(-2) < 0$ B) $f(0).f'(0) > 0$

C) $f'(1) . f(1) < 0$ D) $f(2) . f'(2) = 0$

E) $f(3) . f'(3) > 0$

ÇÖZÜM

Seçenekleri tek tek inceleyelim.

A) $f(-2) > 0$ $f'(-2) < 0$ olduğundan
$f(-2) . f'(-2) < 0$ doğru

B) $f(0) > 0$, $f'(0) > 0$ olduğundan
$f(0) . f'(0) > 0$ doğrudur.

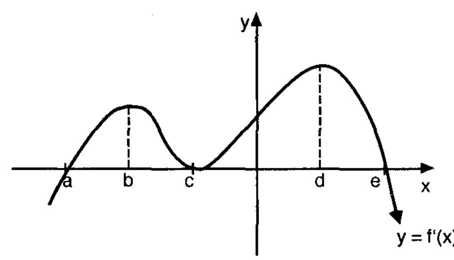
C) x = 1 noktasında yerel maksimum olduğundan $f'(1) = 0$ dır.
$f'(1) . f(1) < 0$ yanlıştır.

D) $f(2) = 0$ dır.
$f(2) . f'(2) = 0$ doğrudur.

E) $f(3) < 0$ ve $f'(3) < 0$ olduğundan,
$f'(3) . f(3) > 0$ doğrudur.

YANIT "C"

23.

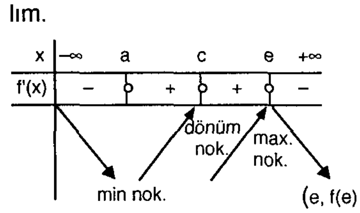


Türevinin grafiği verilen y = f(x) fonksiyonun yerel maksimum değeri **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) f(a) B) f(b) C) f(c) D) f(d) E) f(e)

ÇÖZÜM

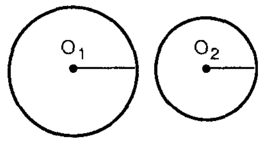
Grafiğe göre türevin işaret tablosunu oluşturalım.



tablodan $(e, f(e))$ yerel maksimum noktası f(e) nin yerel maksimum değeri olduğu görülür.

YANIT "E"

24. Şekildeki O_1 ve O_2 merkezli dairelerin çevreleri toplamı 10π olduğuna göre, **alanları toplamının maksimum değeri kaçtır?**



A) $\frac{10\pi}{3}$ B) $\frac{15\pi}{4}$ C) $\frac{25\pi}{4}$

D) $\frac{25\pi}{2}$ E) $\frac{50\pi}{3}$

ÇÖZÜM

$$Ç_1 + Ç_2 = 2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 10\pi$$

$$2\pi(r_1 + r_2) = 10\pi$$

$$r_1 + r_2 = 5 \text{ olur.}$$

$r_1 + r_2 = 5 \Rightarrow r_2 = 5 - r_1$ olur.

$$A_1 + A_2 = \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$$= \pi . r_1^2 + \pi(5 - r_1)^2$$

$$A_1 + A_2 = \pi\left[r_1^2 + (5 - r_1)^2\right]$$

$$= \pi\left[2r_1^2 - 10r_1 + 25\right]$$

minimum değer sorulduğu için türev alırsak,

$$(A_1 + A_2)'(r) = \pi(4r_1 - 10)$$

$$(A_1 + A_2)'(r) = 0 \Rightarrow 4r_1 - 10 = 0$$

$$r_1 = \frac{5}{2}$$

$r_2 = 5 - r_1$ den,

$$r_2 = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \text{ olur.}$$

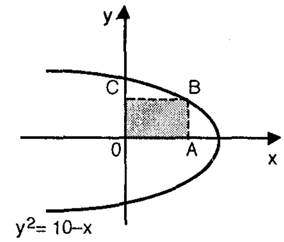
$$A_1 + A_2 = \pi . \left(\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{25}{4} + \frac{25}{4}\right)$$

$$= \pi \cdot \frac{25}{2} \text{ olur.}$$

YANIT "D"

25. Şekilde verilen $y^2 = 10 - x$ eğrisi içine çizilen **OABC dikdörtgeninin alanının <u>en büyük</u> değeri kaçtır?**



A) $10\sqrt{2}$ B) 10 C) 19

D) $\frac{20}{3} \cdot \sqrt{\frac{10}{3}}$ E) $\frac{19\sqrt{2}}{2}$

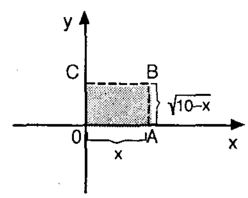
ÇÖZÜM

$y^2 = 10 - x \Rightarrow y = \mp\sqrt{10 - x}$ olur.

Biz $y = \sqrt{10 - x}$ olacağız. Çünkü OABC dikdörtgeni birinci bölgede çizilmiştir.

B noktası eğri üzerinde olduğundan

$B(x, \underbrace{\sqrt{10 - x}}_{y})$ dir.



$$A(OABC) = x . \sqrt{10 - x}$$

maksimum alan;

$$A'(x) = 1 . \sqrt{10 - x} + \frac{-1}{2\sqrt{10 - x}} x$$

$$A'(x) = \frac{2(10 - x) - x}{2\sqrt{10 - x}} = 0$$

$$20 - 3x = 0$$

$$x = \frac{20}{3}$$

$$y = \sqrt{10 - \frac{20}{3}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

maksimum alan $= \frac{20}{3} \cdot \sqrt{\frac{10}{3}}$ olur.

YANIT "D"

ÇÖZÜMLÜ TEST – 6

1. $y = f(x)$ fonksiyonu için **aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?**

I. f, $x = a$ da tanımsız ise türevsizdir.
II. f, $x = a$ da tanımlı ise türevlidir.
III. f, $x = a$ da sürekli ise türevlidir.
IV. f, $x = a$ da türevli ise süreklidir.
V. f, $x = a$ sürekli ise tanımlıdır.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

I. Doğrudur.
II. Tanımlı olduğu noktalarda fonksiyon türevsiz olabilir. Yanlıştır.
III. Bir fonksiyon sürekli olduğu noktada türevsiz olabilir. Yanlıştır.
IV. Doğrudur.
V. Doğrudur.

YANIT "C"

2. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & ; \ x < 1 \ \text{ise} \\ x^3 & ; \ x \geq 1 \ \text{ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı fonksiyon için

$\mathbf{f'(0) + f'\left(\frac{1}{6}\right) + f'(2)}$ **toplamı kaçtır?**

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \begin{cases} 6x & x < 1 \\ 3x^2 & x > 1 \end{cases}$$

$$f'(0) = 6.0 = 0$$

$$f'\left(\frac{1}{6}\right) = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$$

$$f'(2) = 3.2^2 = 12$$

+

$$f'(0) + f'\left(\frac{1}{6}\right) + f'(2) = 0 + 1 + 12 = 13$$

YANIT "B"

3. $|x| < 1$ ve

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

$1 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots$ **toplamının sonucu nedir?**

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

ÇÖZÜM

$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$ eşitliğinin her iki tarafının türevini alırsak,

$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + n \cdot x^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$ olur,

$x = \frac{1}{2}$ yazılırsa,

$$1 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdots = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

YANIT "B"

4. $y = f(x) = \sqrt{a + 4x^2}$ fonksiyon $x = 2$ deki teğetin eğimi $\frac{8}{5}$ ise **a kaçtır?**

A) 1 B) 3 C) 6 D) 9 E) 12

ÇÖZÜM

$$f(x)=\sqrt{a+4x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{(4x^2+a)'}{2\sqrt{a+4x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{8x}{2\sqrt{a+4x^2}}=\frac{4x}{\sqrt{a+4x^2}} \text{ olur.}$$

$$m_{\text{teğet}}=f'(2)=\frac{4.2}{\sqrt{a+16}}=\frac{8}{5}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a+16}}=\frac{1}{5}\Rightarrow\sqrt{a+16}=5$$

$$=a+16=25$$

$$=a=9 \text{ olur.}$$

YANIT "D"

5. $f(x)=\dfrac{x^2+2}{2-x^2}$ ise

$\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ **kaçtır?**

A) –12 B) –8 C) 4 D) 8 E) 10

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2) \text{ dir.}$$

$$f'(x)=\frac{2x\left(2-x^2\right)-(-2x)\left(x^2+2\right)}{\left(2-x^2\right)^2}$$

$$f'(2)=\frac{2.2\left(2-2^2\right)+2.2.\left(2^2+2\right)}{\left(2-2^2\right)}$$

$$f'(2)=4$$

YANIT "C"

6. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\left|x^2-1\right|+\operatorname{sgn}(x^2-9)$ fonksiyonu **kaç noktada türevsizdir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

$\dfrac{1}{x-1}\to x=1$ de tanımsız olduğundan f, $x=1$ de türevsizdir.

$\left|x^2-1\right|$, mutlak değer için x^2-1 in tek katlı kökleri olan $x=\pm 1$ için türevsiz olduğundan f bu apsisli noktalarda türevsizdir.

$\operatorname{sgn}(x^2-9)$, $x^2-9=0$, $x=\pm 3$ için süreksiz olduğundan türevsizdir.

f, $x=-3$, $x=-1$, $x=1$, $x=3$ apsisli noktalarında türevsizdir.

YANIT "D"

7. $f(3x)=x^2.g(x-2)$

$f'(3)=4$, $g(-1)=6$ ise

$f(3)+g'(-1)$ toplamı kaçtır?

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

ÇÖZÜM

$f(3x)=x^2.g(x-2)$ eşitliğin her iki yanının x 'e göre türevini bileşke fonksiyonun türevi kuralına göre alırsak,

$3.f'(3x)=2x.g(x-2)+1.g'(x-2)x^2$ olur.

$3.f'(3)=2.g(-1)+g'(-1).1$

$3.4=2.6+g'(-1)\Rightarrow g'(-1)=0$

$f(3x)=x^2.g(x-2)$ eşitliğinden $x=1$ için,

$f(3)=1^2.g(-1)$

$f(3)=6$ bulunur.

$f(3)+g'(-1)=6+0=6$ bulunur.

YANIT "A"

8. $x>0$ için, $f(x)=x\sqrt{8-x^2}$ fonksiyonunun **hangi noktadaki teğeti x eksenine paraleldir?**

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

ÇÖZÜM

Teğet x eksenine paralel ise eğimi sıfırdır. Bu yüzden f′(x) = 0 denkleminin köklerini araştıralım.

$$f'(x) = 1.\sqrt{8-x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{8-x^2}}\cdot x$$

$$f'(x) = 8 - x^2 - x^2 = 0$$

$$= 2x^2 = 8 \Rightarrow x = \mp 2$$

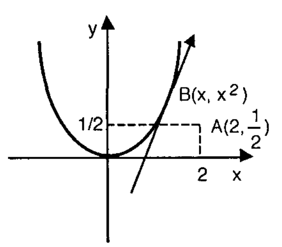
$x > 0$ olduğundan $x = 2$ bulunur.

YANIT "B"

9. $y = x^2$ eğrisinin $A\left(2, \frac{1}{2}\right)$ noktasına <u>**en yakın**</u> **noktasının koordinatlarının toplamı kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM



$$m_{AB} = \frac{\frac{1}{2} - x^2}{2 - x}, \quad m_{teğet} = y'(x) = 2x$$

noktanın en yakın olması için $m_{AB} \cdot m_T = -1$ olmalıdır.

$$m_{AB} = \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{x-2}, \; m_T = y'(x) = 2x \text{ buna göre,}$$

$$\frac{x^2 - \frac{1}{2}}{x-2}\cdot 2x = -1 \Rightarrow 2x^3 - x = -x + 2$$

$$2x^3 = 2 \Rightarrow x = 1 \text{ olur.}$$

$B(x, x^2) = (1, 1^2) = (1, 1)$ olur.

$1 + 1 = 2$ bulunur.

YANIT "B"

10. $4x^2 + 9y^2 = 40$ eğrisinin eğimi $-\frac{2}{9}$ olan **teğetlerden birinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $2x + 9y = 20$ B) $-2x + 4y = 20$

C) $2x + 9y = 0$ D) $2x + 8y = 20$

E) $2x + 10y = 25$

ÇÖZÜM

Teğetin değme noktası $A(x_0, y_0)$ olsun.

$4x_0^2 + 9y_0^2 = 40$ dır. (1)

Teğetin eğimi $= \frac{-4.2.x_0}{9.2.y_0} = -\frac{2}{9}$ ise

$y_0 = 2x_0$ (2), (1) denkleminde yerine yazılarak,

$$4x_0^2 + 9(2x_0)^2 = 40$$

$$4x_0^2 + 36x_0^2 = 40$$

$$40x_0^2 = 40$$

$$x_0^2 = 1$$

$$x_0 = \mp 1 \text{ bulunur.}$$

teğetin alabileceği noktalar

A(1, 2), B(−1, −2) olur.

A noktasından çizilen teğetin denklemi;

$$y - 2 = -\frac{2}{9}(x-1)$$

$$9y - 18 = -2x + 2$$

$2x + 9y = 20$ bulunur.

YANIT "A"

11. $x^2 + 6xy + 25y^2 = 6$ eğrisinin düşey teğetlerinin değme noktalarının apsisleri çarpımı **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-\frac{36}{5}$ B) $-\frac{75}{8}$ C) $-\frac{16}{3}$

D) $\frac{25}{8}$ E) $\frac{36}{5}$

ÇÖZÜM

$$m_{Teğet} = y'_{(x,y)} = -\frac{2x+6y}{6x+50y} \text{ dir.}$$

Teğet düşey ise eğimi tanımsız olmalıdır. O halde,

$6x + 50y = 0 \Rightarrow 6x = -50y$

$$y = -\frac{6}{50}x$$

$$y = -\frac{3}{25}x \text{ olur.}$$

$x^2 + 6xy + 25y^2 - 6 = 0$ denkleminde y yerine x türünden değerini yazarsak,

$$x^2 + 6x\left(\frac{-3x}{25}\right) + 25\cdot\left(\frac{3x}{25}\right)^2 - 6 = 0$$

$$x^2 - \frac{18x^2}{25} + \frac{9x^2}{25} - 6 = 0$$

$$25x^2 - 18x^2 + 9x^2 - 150 = 0$$

$$16x^2 - 150 = 0$$

denkleminin kökler çarpımı

$$x_1.x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1.x_2 = \frac{-150}{16} = \frac{-75}{8} \text{ bulunur.}$$

YANIT "B"

12. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktaları A ve B ise **|AB| kaç birimdir?**

A) 1 B) $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{5}$

D) $3\sqrt{5}$ E) 5

ÇÖZÜM

$y' = 0$, $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = 3$ bu köklerde türev işaret değiştireceğinden koordinatlar yerel ekstremum noktalarının apsisleridir.

$y(1) = 1–6.1 + 9.1$ ve $y(3) = 3–6.3 + 9.3$

$y(1) = 4$ ve $y(3) = 0$ olur.

A(1, 4) ve B(3, 0) ise

$$|AB| = \sqrt{(1-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4+16}$$

$$|AB| = 2\sqrt{5} \text{ olur.}$$

YANIT "C"

13. $f(x) = \dfrac{2x+1}{-x+3}$ eğrisinin **x = 2 deki normalinin denklemi hangisidir?**

A) $x + y = 37$ B) $x + 7y = 37$

C) $y = 37x$ D) $x + 37y = 7$

E) $x + y = 7$

ÇÖZÜM

Teğetin eğimi f′(2) dir.

$$f'(x) = \frac{2.3-(-1)-(1)}{(-x+3)^2}$$

$$f'(2) = \frac{6+1}{(-2+3)^2} = 7 \text{ olur.}$$

$$f(2) = \frac{2.2+1}{-2+3} = 5$$

Teğet normale dik olduğundan;

$m_T . m_N = -1$

$7.m_N = -1 \Rightarrow m_N = \dfrac{-1}{7}$ dir.

Normalin çizildiği nokta

(2, 5) $m_N = -\dfrac{1}{7}$ olduğundan

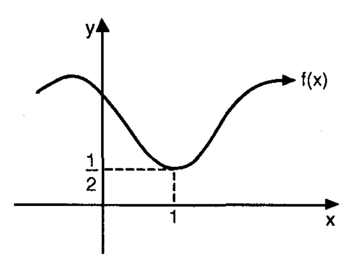
$$y - 5 = -\frac{1}{7}(x-2) \text{ olur.}$$

$$7y - 35 = -x + 2$$

$$x + 7y = 37 \text{ bulunur.}$$

YANIT "B"

14.



Şekildeki f fonksiyonu için x = 1 de yerel minimum vardır.

$g(x) = x^2.f(x)$ ise

g′(1) + g(1) toplamı kaçtır?

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

ÇÖZÜM

$g(x) = x^2.f(x) \Rightarrow g'(x) = 2x.f(x) + f'(x)x^2$

$g(1) = 1^2.f(1)$

$g'(1) = 2.1.f(1) + f'(1).1^2$

Şekilden

$f(1) = \frac{1}{2}$ $\qquad g'(1) = 2\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot 1$

$f'(1) = 0$ $\qquad g'(1) = 1$

$g'(1) + g(1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ bulunur.

YANIT"D"

15. $f(x) = x^2 - 4x + k - 10$

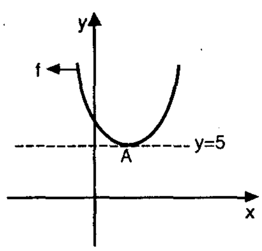
$y = 5$ doğrusuna teğet ise **k kaçtır?**

A) –7 B) –5 C) –1 D) 0 E) 19

ÇÖZÜM

f in herhangi bir noktası,

A(x, $x^2 - 4x + k–10$) olsun.



y = 5 doğrusunun eğimi olduğundan $f'(x) = 0$ dır.

$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

$f(2) = 5 \Rightarrow 2^2 - 4.2 + k - 10 = 5$

$k = 19$

YANIT "E"

16. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$

eğrisinin x eksenine paralel teğetlerinin apsislerinin toplamı hangisidir?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM

x eksenine paralel teğetlerin eğimleri 0 olacağından $f'(x) = 0$ denkleminin kökleri toplamını bulalım.

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ya göre

$x_1 + x_2 = \frac{-(-6)}{6} = 1$ dir.

YANIT "C"

17. $f(x) = x^3 + 1$ fonksiyonunun **$x + 12y - 2 = 0$ doğrusuna dik teğetlerinin değme noktalarının ordinatları çarpımı nedir?**

A) –72 B) –63 C) –45 D) 45 E) 63

ÇÖZÜM

$x + 12y - 2 = 0$ doğrusunun eğimi;

$m_1 = -\frac{1}{12}$ dir.

Bu doğruya dik olan teğetlerin eğimleri $m_T.m_1 = -1$ olduğundan,

$m_T = f(x) = 12$ dır.

$f'(x) = 3x^2 = 12$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \mp 2$ olur.

$A(2, f(2))$, $B(-2, f(-2))$

$A(2, 2^3 + 1)$, $(-2, (-2)^3 + 1)$

$A(2, 9)$, $(-2, -7)$

Ordinatlar çarpımı da $9.(-7) = -63$ olur.

YANIT "B"

18. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ fonksiyonunun $x = -1$ de dönüm noktası vardır. **Buna göre $x = -3$ teki yerel ekstremum değeri kaçtır?**

A) –28 B) –25 C) 0 D) 25 E) 28

ÇÖZÜM

$x = -1$ dönüm noktası ise

$f''(-1) = 0$ dır.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$f''(-1) = -6 + 2a = 0 \Rightarrow a = 3$ olur.

$x = -3$ te yerel ekstremum olduğu verildiğine göre $f'(-3) = 0$ dır.

$3.(-3)^2 + 2.3.(-3) + b = 0$

$27 - 18 + b = 0 \Rightarrow b = -9$

$f(-3)$ yerel ekstremum değerdir.

$f(-3) = (-3)^3 + 3.(-3)^2 - 9.(-3) + 1$

$f(-3) = -27 + 27 + 27 + 1 = 28$

YANIT "E"

19. $f(x) = ax^3 + x^2 + 5x + 7$ fonksiyonunun daima artan olması için, **a hangi aralıkta olmalıdır?**

A) $a > -2$ B) $a < -1$ C) $a < 0$

D) $a > \frac{1}{15}$ E) $a > \frac{3}{7}$

ÇÖZÜM

f nin daima artan olması için $f'(x) > 0$ olmalıdır.

$f'(x) = 3ax^2 + 2x + 5 > 0$ olması için,

$3a > 0$ ve $3ax^2 + 2x + 5 = 0$ denklemi için, $\Delta < 0$ olmalıdır.

$3a > 0 \Rightarrow a > 0$

$$\Delta < 0 \Rightarrow 2^2 - 4.3a.5 < 0$$
$$4 - 60a < 0$$
$$-60a < -4$$
$$a > \frac{1}{15}$$

YANIT "D"

20. $f(x) = x^2 + [\![x]\!] + \text{sgn}(x - 2)$

fonksiyonunun üzerindeki $x = \frac{5}{2}$ apsisli noktasından çizilen teğetin **y eksenini kestiği noktanın ordinatı kaçtır?**

A) $-\frac{13}{4}$ B) $-\frac{81}{4}$ C) $-\frac{21}{4}$

D) 0 E) $\frac{81}{4}$

ÇÖZÜM

$x = \frac{5}{2}$ için $f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + [\![\frac{5}{2}]\!] + \text{sgn}\left(\frac{5}{2} - 2\right)$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} + 2 + 1$$
$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{37}{4} \text{ olur.}$$

$f'(x) = 2x + 0 + 0 = 2x$

$f'\left(\frac{5}{2}\right) = 2\cdot\frac{5}{2} = 5 = m_{teğet}$ buna göre teğet denklemi

$y - \frac{37}{4} = 5\left(x - \frac{5}{2}\right)$ dir.

$x = 0$ için

$y - \frac{37}{4} = 5\cdot\frac{-5}{2} \Rightarrow y = \frac{-25}{2} + \frac{37}{4} = \frac{-13}{4}$ olur.

YANIT "A"

TÜREV

TEST 1

1. $f(x)=\sqrt[5]{(x+1)^2} \Rightarrow$ **f′(0) kaçtır?**

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{5}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

2. $f(x)=\frac{2}{9}\left(x^3+4\right)^{\frac{3}{2}}$ fonksiyonunun **x = 1 deki teğetinin eğimi kaçtır?**

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{5}$

3. $f(x)=\frac{\sin^3 x}{3}$ fonksiyonunun x = a daki türevi $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ise **a aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{3\pi}{2}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{6}$

4. $f(x)=\frac{\tan^2 x}{a}$ fonksiyonunun türevi $\tan x.\sec^2 x$ ise **a kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5. $y=\sin e^x$ fonksiyonunun türevi **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $e^x \sin e^x$ B) $e^x \cos e^x$
C) $e^x \tan e^x$ D) $e^x \sin x$
E) $e^x \cot x$

6. $y=\frac{1}{5}\ln\sec 5x$ ise $\frac{dy}{dx}$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) sin5x B) cos5x C) tan5x
D) –sin5x E) cot5x

ZAFER YAYINLARI

7. $f(x)=\frac{1}{2}\ln(1-\cos 2x)+5$ ise $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) $\sqrt{5}$

8. $f(x)=\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}+x$ ise $\frac{d^2f}{dx^2}$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{x}{9+x^2}$ B) $\frac{1}{9+x^2}$ C) $\frac{x}{(9+x^2)^2}$
D) $\frac{-2x}{(9+x^2)^2}$ E) $\frac{-18}{(9+x^2)^2}$

9. $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{x-2}{x+2}$ fonksiyonu veriliyor. f′(x) in tanımsız olduğu noktaların apsisleri **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x=2$ B) $x=0$
C) $x=-2$ D) $x=2$ ve $x=-2$
E) $x=5$

10. $f(x)=\frac{2(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{3b}$ fonksiyonunun x = 0 daki teğetin eğimi **nedir?**

A) a B) $\sqrt{a}$ C) $\sqrt[3]{a}$ D) 2a E) 3a

11. $\frac{d}{dx}(\tan x-\cot x)$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) tanx B) 0
C) tanx + cotx D) $(\tan x+\cot x)^2$
E) $(\tan x+\cot x)^3$

12. $f(x) = \ln(1 + \sin x)$ ise $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi}$ **kaçtır?**

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) ∞

13. $f(x) = \dfrac{a^x . e^x}{\ln a + 1}$ ise **f′(1) aşağıdakilerden hangisidir?**

A) e B) a C) a.e D) $\dfrac{1}{a.e}$ E) $\dfrac{a}{e}$

14. $f(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{3\tan x + 1}$ fonksiyonunun $x = \pi$ deki teğeti $y = mx$ doğrusuna dik ise **m kaçtır?**

A) –1 B) 0 C) $\dfrac{1}{2}$ D) 1 E) $\sqrt{3}$

15. $f(x) = \begin{cases} x + \operatorname{sgn} x &, \ x < 0 \ \text{ ise} \\ |2x - x^2| &, \ 0 \le x \le 3 \ \text{ ise} \\ \dfrac{x^2+1}{x-3} &, \ x > 3 \ \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı f(x) fonksiyonu, x in kaç değeri için türevsizdir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16. $f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+x+2}$ ve $f'(x) = \dfrac{mx^2+nx+p}{(x^2+x+2)^2}$ olduğuna göre **m+n+p toplamı kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

17. $f(x) = \ln\left(x^2 + 2x + 5\right) + \dfrac{3}{2}\arctan\dfrac{x+1}{2}$ ise **f′(0) aşağıdakilerden hangisidir?**

A) –1 B) $-\dfrac{1}{3}$ C) $-\dfrac{1}{2}$ D) 0 E) 1

18. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{a^2}\cos ax + \dfrac{x}{a}\sin ax\right)$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) xsinx B) xcosx C) xcosax

D) xsinax E) cosax

19. $y = \operatorname{arccot} x$ fonksiyonuna $x = 1$ de teğet olan doğrunun denklemi **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $y = -\dfrac{1}{2}x$ B) $y = \dfrac{-1}{2}x + \dfrac{\pi+8}{8}$

C) $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{2+\pi}{4}$ D) $y = \dfrac{1}{2}x + 2 + \pi$

E) $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2+\pi}{4}$

20. $\dfrac{d^3}{dx^3}(\arctan x)$ ifadesinin **x = 1 için değeri kaçtır?**

A) $-\dfrac{1}{2}$ B) 0 C) $\dfrac{1}{2}$ D) 1 E) 2

21. $x^2 + 3xy + y^2 = 5$ eğrisinin (1,1) noktasındaki teğetinin denklemi **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x + y = 2$ B) $x - y = 2$ C) $x + y = -2$

D) $x - y = 1$ E) $x + y = 1$

22. $x^2 - xy + y^2 = 27$ fonksiyonu veriliyor. $\dfrac{dy}{dx}$ in eşiti **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\dfrac{x+2y}{x+y}$ B) $\dfrac{x-2y}{x+2}$ C) $\dfrac{x+y}{x-y}$

D) $\dfrac{x+2y}{x+3}$ E) $\dfrac{y-2x}{2y-x}$

TÜREV

TEST 2

1. $f(x) = (x^2-2)^6.(x^3+1)^3$ fonksiyonu için, **$f'(1)$ kaçtır?**

A) –132 B) –60 C) 0 D) 60 E) 132

2. $f(x) = \dfrac{x^4-2}{x^2+1}$ fonksiyonu için, **$f'(-1)$ kaçtır?**

A) $-\frac{3}{5}$ B) $-\frac{5}{2}$ C) $-\frac{5}{3}$ D) $-\frac{7}{3}$ E) $-\frac{6}{5}$

3. $f(x) = (x^2-3x+1)^{10}$ fonksiyonu için **$f'(1)$ nedir?**

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

4. $f(x) = [[x]]\,x^2 - 3x + 1$ ise, $f'\left(-\frac{7}{2}\right)$ **kaçtır?**

A) 25 B) 24 C) 23 D) 22 E) 21

5. $f(x) = 3 - \dfrac{4}{x+1}$ ise, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ ifadesi **neye eşittir?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 3

6. $f(x) = \sqrt{x^3+\frac{1}{x}}$ için, **$f'(1)$ neye eşittir?**

A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

7. $f(3x-1) = x\,g(x+1)$ dir. $g(3) = -4$
$f'(5) = 6$ ise, **$g'(3)$ kaçtır?**

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

8. $x = 3t - 1$ ve
$y = t^2 + 4t + 1$ olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ **in $x = 5$ için değeri kaçtır?**

A) $\frac{8}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{7}{5}$ E) $\frac{8}{3}$

9. $x^2 + y^2 = 10$ olduğuna göre, $\frac{dx}{dy}$ **nin A(–1, 3) noktasındaki değeri nedir?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

10. $f(x) = \arcsin^3(\sqrt{x})$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{1}{4}\right)$ **kaçtır?**

A) $\frac{\pi^2\sqrt{3}}{15}$ B) $\frac{\pi\sqrt{3}}{8}$ C) $\frac{\pi^2\sqrt{3}}{18}$ D) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ E) $\frac{\pi^2\sqrt{3}}{6}$

11. $f(x) = e^x \sin x \cos x$ olduğuna göre, **$f'(0)$ kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{1}{3}$ D) 2 E) $\frac{2}{3}$

12. $f(x) = \arctan^2(e^x)$ olduğuna göre, **$f'(0)$ nedir?**

A) π B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{6}$

13. $f(x) = |6 - x^2| + 3x + 1$ olduğuna göre, **$f'(1)$ nedir?**

A) 1 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

14. $x = 3t$ ve
$y = 6t^2 - 3t + 1$
olduğuna göre, $\frac{d^2y}{dx^2}$ **nin $t = 1$ için değeri nedir?**

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

15. $f(x) = x^3 + 2x + 2$ fonksiyonu için, f^{-1} fonksiyonunun **$x = -1$ deki türevinin değeri nedir?**

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

16. $xy^2 + x + \sqrt{y} - 5 = 0$ olmak üzere, **$\frac{dy}{dx}$ in A(2,1) noktasındaki değeri nedir?**

A) $\frac{5}{9}$ B) $\frac{1}{7}$ C) $-\frac{3}{7}$ D) $-\frac{4}{9}$ E) $-\frac{1}{7}$

17. $f(x) = \sin(\cos 6x) + 3$ olduğuna göre,

$f'\left(\frac{\pi}{12}\right)$ **nin değeri nedir?**

A) –7 B) –6 C) –5 D) –4 E) –3

18. $f(x) = x^x$ için **$f'(1)$ neye eşittir?**

A) 3 B) 2 C) 1 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

19. $\frac{d^2}{dx^2}(\sin^2 6x)$ ifadesinin **$x = \frac{\pi}{36}$ için değeri nedir?**

A) 36 B) 25 C) 24 D) 12 E) 0

20. $y^2 + y = x^3 - x + 2$ olduğuna göre, **$\frac{dy}{dx}$ in A(1,1) noktasındaki değeri nedir?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

21. $x^2e^y + e^y = 6$ olduğuna göre, **$\frac{dy}{dx}$ in $x = 1$ için değeri nedir?**

A) $-\frac{2}{3}$ B) –2 C) $-\frac{1}{4}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) –1

22. $f(x) = x + \sin x + 6$ ise, **$\frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d^3}{dx^3}(f(x))$ neye eşittir?**

A) 1 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 2 E) 3

23. $f(x) = \frac{e^x - 3^x}{1 + \sin x}$ ise, **$f'(0)$ nedir?**

A) $\ln\frac{1}{3e}$ B) $\ln\frac{e}{3}$ C) $\ln\frac{3}{e}$

D) $\ln\frac{1}{e}$ E) $\ln 3e$

24. $f(x) = \ln(\arcsin x)$ olduğuna göre, **$f'\left(\frac{1}{2}\right)$ nedir?**

A) $\frac{5\sqrt{3}}{\pi}$ B) $\frac{4\sqrt{3}}{\pi}$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

D) $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

25. $f(x) = |x^2 - 6x + 9| + 4x - 1$ olduğuna göre, **$f'(3)$ kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

26. $\sin x + \cos y = \sqrt{3}$ olduğuna göre, **$\frac{dy}{dx}$ in $x = \frac{\pi}{3}$ için değeri nedir?**

A) 2 B) $\frac{4}{3}$ C) 1 D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{3}$

27. $y = \sin 2x$ ise, **$\frac{d^6y}{dx^6}$ ifadesinin $x = \frac{\pi}{4}$ için değeri nedir?**

A) 64 B) 32 C) 16 D) –32 E) –64

28. $\left.\begin{aligned} x &= 3t^2 + 2 \\ t &= -2v^2 + 3 \\ v &= 3z + 4 \end{aligned}\right\}$ sistemi için **$\frac{dx}{dz}$ nin $v = -1$ için değeri nedir?**

A) –72 C) –36 C) 0 D) 36 E) 72

29. $f(x) = |x^2 - 3| - 3x + 1$ fonksiyonu için **$f''(1)$ neye eşittir?**

A) –1 B) –2 C) –3 D) –4 E) –6

30. $xy - 3x + 4y - 5 = 0$ olduğuna göre, **$\frac{dy}{dx}$ in $x = 2$ için değeri nedir?**

A) $\frac{7}{36}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{7}{9}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{9}$

31. $\frac{d}{dx}(e^{-x} \cdot \sin 3x)$ ifadesinin **$x = 0$ için değeri kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

TÜREV

TEST 3

1. $f(x) = 2x^3 + x - 3$ fonksiyonu için,

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ **ifadesinin değeri nedir?**

A) 7 B) 14 C) 22 D) 25 E) 28

2. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 &, x<0 \text{ ise} \\ -x^2 - 3 &, x>0 \text{ ise} \end{cases}$

f′(−1) + f′(2) = f(x) denkleminin kökü nedir?

A) −2 B) −1 C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

3. $f: R \to R$; $f(x) = x.|x^2 - 9|$ veriliyor. **Buna göre, f′(1) + f′(4) nedir?**

A) 0 B) 28 C) 31 D) 45 E) 48

4. $f(x) = [\![x]\!]\, x^2 - 3$ fonksiyonu için $f'\left(\frac{3}{2}\right)$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 6 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

5. $f(x) = \left(x^2 - x\right)^2 \left[\frac{x}{3} + 2\right]$ fonksiyonu veriliyor.

f′(2) nin eşiti nedir?

A) 11 B) 18 C) 20 D) $\frac{91}{3}$ E) $\frac{100}{3}$

6. f fonksiyonu,

$f(x) = x \operatorname{sgn}(\cos x) + (x+1)\, [\![\sin x]\!]$ ile tanımlıdır. $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ **nin değeri nedir?**

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

7. $f(x) = \dfrac{|x^2 - 1|}{\operatorname{sgn}(x^2 + 3x - 3)}$ fonksiyonu için **f′(2) nedir?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 2 D) 3 E) 4

8. $f(x) = \big|2x - |x - 3|\big|$ fonksiyonu veriliyor.

f′(2) + f′(4) nin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9. $f(x) = x.\cos\frac{1}{x}$ fonksiyonu veriliyor.

$f'\left(\frac{2}{\pi}\right)$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-\frac{2}{\pi}$ B) −1 C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{2}{\pi}$ E) $\frac{\pi}{4}$

10. $f(x) = e^{\sin^2(3x)}$ fonksiyonu için,

$\dfrac{f'(x)}{\sin 6x}$ **in f(x) türünden değeri nedir?**

A) 3f(x) B) 2f(x) C) f(x)
D) $\frac{f(x)}{3}$ E) $\frac{f(x)}{\sin 3x}$

11. $f(x) = x^2 + 2x + 3$ ve $g(x) = 2x + 1$ fonksiyonları veriliyor. $(fog)'(x) = (gof)'(2)$ ise, **x aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) 2 E) 3

12. $f(x) = \ln\sqrt{\tan x}$ fonksiyonu için, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ **ün eşiti nedir?**

A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
D) $4\sqrt{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

13. $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$ ise, **f(x) in f′(x) cinsinden ifadesi nedir?**

A) 2.f′(x) sin x B) $\frac{f'(x)}{\sin x}$
C) f′(x) cos x D) $\frac{f'(x)}{2\cos x}$
E) f′(x) + sin x

14. $f(x) = \sin x$ ve $g(x) = \pi \cos x$ ise $(fog)'(x)$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{3}$ **için değeri nedir?**

A) -1 B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 1

15. f ve g fonksiyonları için $g(2) = 3$, $g'(2) = 6$ ve $f'(3) = 5$ ise $(fog)'(2)$ **nin değeri nedir?**

A) 15 B) 18 C) 20 D) 30 E) 45

16. $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$ veriliyor. $\left[f^{-1}(x)\right]' = -\frac{1}{5}$ ise **x in alabileceği değerlerin toplamı nedir?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

17. f ve g fonksiyonları için
$f^{-1}(3x-1) = 6x + 4$ ve $(gof)(x) = x^2 + 3x$
$g'(a) = 6$ ise **a nedir?**

A) -1 B) -2 C) -3 D) -4 E) -5

18. $f(x) = x^{2x}$ ise **f'(e) nin eşiti nedir?**

A) $4e^{2e}$ B) $3e^{2e}$ C) $2e^{2e}$
D) e^{2e} E) 0

19. $y = t^2 - 1$ ve $x = 3t + 1$ ise $\frac{d^2y}{dx^2}$ **nin eşiti nedir?**

A) $\frac{2t}{3}$ B) $\frac{4t}{9}$ C) $\frac{3}{2t}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{2}{9}$

20. $\left.\begin{array}{l} x = \ln t \\ y = \sin t \end{array}\right\}$ ise, $t = \pi$ için $\frac{d^2y}{dx^2}$ **nin eşiti nedir?**

A) $-\pi$ B) -1 C) 0 D) $\frac{1}{\pi}$ E) $\frac{\pi}{2}$

21. $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^{10}$ olduğuna göre, **f'(–1) in değeri nedir?**

A) -2 B) -3 C) -4 D) -5 E) -6

22. $f(x) = x \arcsin x$ ve $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ fonksiyonları için $\left[f(x) + g(x)\right]'$ nün eşiti **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ B) $\arcsin x$
C) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ D) $\sqrt{1-x^2}\arcsin x$
E) $x \operatorname{arc\,sin} x$

23. $f(x,y) = y - x + \operatorname{arccot} y = 0$ ise $\frac{dy}{dx}$ **in eşiti nedir?**

A) $\frac{1}{1+y^2}$ B) $\frac{2y}{1+y^2}$ C) $\frac{1+y^2}{y^2}$
D) $\frac{-2}{1+y^2}$ E) $\frac{-2y^2}{1+y^2}$

24. $\left.\begin{array}{l} y = 3v^2 + 2 \\ v = 2t + 1 \\ t = x^2 - 1 \end{array}\right\}$ ise $\frac{dy}{dx}$ **in eşiti nedir?**

A) $24x(2x^2 - 1)$ B) $18x(2x^2 - 1)$
C) $x(2x^2 - 1)$ D) $3x(x^2 - 1)$
E) $12x(2x^2 + 3)$

25. $f(x) = x^2 + \arcsin\left(\cos\frac{2}{x}\right)$ ise **f'(1) in eşiti nedir?**

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{4}$ D) 4 E) 9

26. $y^x - x^y = 0$ eğrisinin A(1,1) noktası için, $\frac{dx}{dy}$ **nin değeri nedir?**

A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

27. $R^+ \to R^+$, $f(x) = x^3 + 2x$ fonksiyonu veriliyor. f^{-1} **fonksiyonunun x = 3 apsisli noktasındaki türevinin değeri nedir?**

A) -1 B) 0 C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{7}$

28. $f(x) = e^x \ln x$ ise **f'(1) kaçtır?**

A) $\frac{1}{e}$ B) e C) 0 D) 1 E) e^2

29. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ olduğuna göre, $(f^{-1})'(-4)$ **ün değeri kaçtır?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) $\frac{3}{2}$

TÜREV

TEST 4

1. $f(x) = x^2 + |2x + 1|$ fonksiyonunun grafiği üzerindeki apsisi $x = 1$ olan noktadan çizilen teğetin denklemi **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $y = 4x + 1$ B) $y = 4x - 1$
C) $y = -4x + 2$ D) $y = 4x$
E) $y = 1 - 4x$

2. $f(x) = \ln(\ln x)$ fonksiyonunun grafiğinin **x eksenini kestiği noktadan fonksiyona çizilen teğetin denklemi nedir?**

A) $x + ey = e$ B) $y - ex = e$
C) $x - ey = e$ D) $y + ex = e$
E) $x = ey$

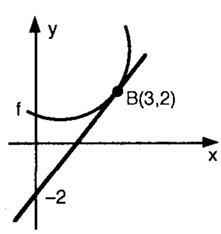
3. $y = x^2 + mx + n$ parabolünün $y = x + 3$ doğrusuna $x = 1$ apsisli noktada teğet olması için, **m – n ne olmalıdır?**

A) 5 B) 4 C) 3 D) –3 E) –5

4. $f(x) = -x^2 + 3x$ parabolü üzerindeki $A(1, n)$ ve $B(p, q)$ noktalarından çizilen teğetler birbirine dik ise **p + q nun eşiti nedir?**

A) 5 B) 4 C) 3 D) 1 E) 0

5. Şekilde f fonksiyonun grafiğinin bir parçası ile B(3, 2) noktasındaki teğeti çizilmiştir.



$g(x^2 - 1) = \dfrac{x}{f(x)}$ ise **g′(8) in eşiti nedir?**

A) $-\frac{1}{12}$ B) $-\frac{1}{6}$ C) $-\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) 4

6. $y = x^2 - 4x$ parabolünün hangi noktası, **$y = 2x - 12$ doğrusuna en yakındır?**

A) (3, –4) B) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}\right)$ C) (3,–3)
D) (2, –3) E) (3, –2)

7. $f(x) = ax^2 - (3a + b)x - 7$ fonksiyonunun A(1, 2) noktasındaki teğeti $y = x + 2$ doğrusuna paralel ise **a – b nedir?**

A) –17 B) –15 C) –12 D) 27 E) 29

8. $f(x) = 3x^2$ eğrisinin $A(x_1, y_1)$ noktasındaki teğeti x eksenini $B\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ noktasında kestiğine göre, **y_1 neye eşit olabilir?**

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{4}{5}$

9. $x^2 - y^2 - 2x - 2 = 0$ eğrisinin **x= 3 apsisli noktasındaki pozitif eğimli normalinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $2x - y - 5 = 0$ B) $x - 2y - 5 = 0$
C) $x - 2y + 5 = 0$ D) $x + y + 1 = 0$
E) $2x + y + 5 = 0$

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x}$ ifadesinin **eşiti nedir?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

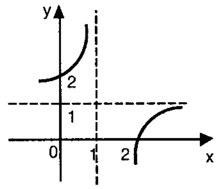
11. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{1}{1 - \sin x} - \dfrac{2}{\cos^2 x}\right)$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

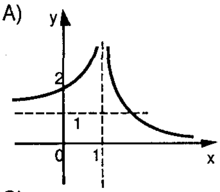
A) 2 B) 1 C) 0 D) –1 E) $-\frac{1}{2}$

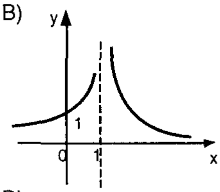
12. $f(x) = (x-2)^3$ eğrisine üzerindeki $x = 1$ apsisli noktadan çizilen teğet, eğriyi başka bir noktada kesiyor. Bu noktanın apsisi kaçtır?

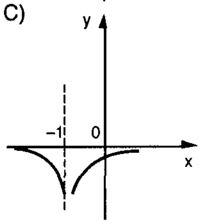
A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

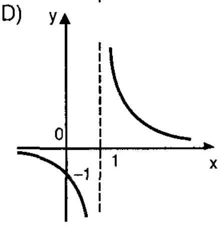
13. Şekil $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonunun grafiğidir. Buna göre, **f′ türev fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

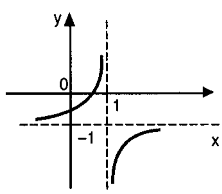


A)


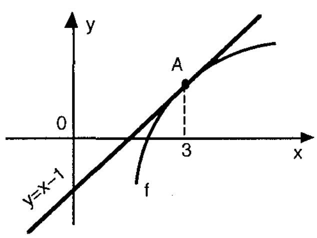
B)


C)


D)


E)


14. Şekilde f fonksiyonunun grafiğinin bir kısmı ve onun A daki teğeti olan $y=x-1$ doğrusu çizilmiştir. Buna göre,



$\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2 f(3)-3x f(x)}{x^2-9}\right)$ **eşiti nedir?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

15. $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x-m}$ fonksiyonunda $x\neq m$ dir. **Buna göre, m hangi aralıkta olmalı ki, fonksiyon daima artan olsun?**

A) (0, 1) B) (–1, 0) C) (1, 2)
D) (2, 3) E) (3, 4)

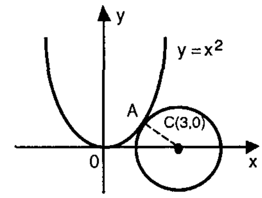
16. $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x^2+2}$ fonksiyonunun **yerel ekstremum değerlerinin toplamı nedir?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) $2\sqrt{2}$ E) 4

17. $f(x)=5^{x^2+2x}-\dfrac{16}{5}$ fonksiyonunun görüntü kümesinin <u>**en küçük**</u> **elemanı nedir?**

A) $-\frac{11}{5}$ B) $-\frac{14}{5}$ C) –3 D) –5 E) –7

18. Şekildeki C(3, 0) merkezli çember $y=x^2$ parabolüne A da teğettir. **C merkezli çembersel bölgenin alanı nedir?**



A) π B) 2π C) 3π D) 4π E) 5π

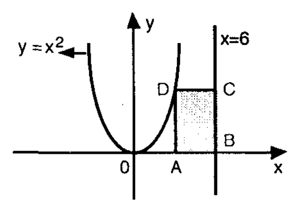
19. $f(x)=x^3+nx^2+x-6$ eğrisinin dönüm (büküm) noktasının apsisi 1 ise, **ordinatı kaçtır?**

A) –8 B) –7 C) –6 D) –5 E) –4

20. $f(x)=x^3+mx^2-4x+7$ eğrisinin yerel ekstremum noktalarının apsislerinin toplamı 6 ise, **m kaçtır?**

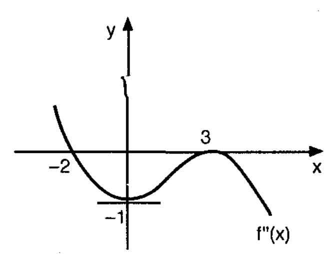
A) –5 B) –6 C) –7 D) –8 E) –9

21. Şekilde köşeleri, $y=x^2$, $x=6$ ve x ekseni üzerinde bulunan **ABCD dikdörtgeninin alanı en çok kaç birim kare olur?**



A) 32 B) 24 C) 18 D) 16 E) 12

22.



İkinci türevinin grafiği verilen **f(x) fonksiyonu için dönüm noktasının apsisi kaç olur?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 3

TÜREV

TEST 5

1. $[0, \sqrt{2}]$ aralığında tanımlı $f(x)= x^3 - 2x$ **fonksiyonu için Rolle teoremini sağlayan x sayısı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ D) 2 E) $2\sqrt{2}$

2. [1, 2] aralığında tanımlı $f(x) = 3x^2+4x-3$ fonksiyonu için ortalama değer teoremini **sağlayan x sayısı hangisidir?**

A) 1 B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

3. $f:\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]\to[-1,1]$, $f(x) = \cos x$ fonksiyonu için Rolle teoremini sağlayan x sayısı **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{2\pi}{3}$ B) $\frac{5\pi}{6}$ C) π D) $\frac{7\pi}{6}$ E) $\frac{5\pi}{4}$

4. $f: [x_1, x_2] \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ile tanımlı fonksiyon için Rolle teoremini sağlayan x sayısı **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x_1 + x_2$ B) $2x_1 + x_2$ C) $\frac{3x_1 + x_2}{2}$

D) $2x_1 . x_2$ E) $\frac{x_1 + x_2}{2}$

5. **Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisine [0, 2] aralığında Rolle teoremi uygulanabilir?**

A) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ B) $f(x) = \log(x - 1)$

C) $f(x) = 2^{\sqrt{x^2-9}}$ D) $f(x) = x^2 - 2x$

E) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4}$

6. $f(x) = x^2 + ax$ fonksiyonunun [1, 4] aralığında Rolle teoremini sağlayan **x değeri nedir?**

A) $\frac{3}{2}$ B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) 3 E) $\frac{7}{2}$

7. $f: [1, 2e] \to R$, $f(x) = \ln x$ fonksiyonu için ortalama değer teoremini sağlayan x sayısı **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{2e}{1 + \ln 2}$ B) $\frac{2e + 1}{1 + \ln 4}$ C) $\frac{2e-1}{1+\ln 2}$

D) $\frac{e}{1+\ln 2}$ E) $\frac{\ln 2-1}{e+3}$

8. $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $g(x) = x^2 - 4x + 6$ fonksiyonları için [0, 1] genelleştirilmiş ortalama değer teoremini sağlayan x sayısı **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

9. $m \neq 0$ ve $f: [m, 0] \to R$, $f(x) = x^3 + 2x^2$ fonksiyonu için Rolle teoremi uygulanabilir ise **f'(m) değeri kaçtır?**

A) –4 B) –3 C) 3 D) 4 E) 8

10. $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = x^2 + 1$ fonksiyonları için [1, 4] aralığında ortalama değer teoremini sağlayan x değeri **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

11. $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x + 2}$ fonksiyonuna [0, 4] aralığında Rolle teoremi uygulandığında elde edilen x sayısı **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $2(\sqrt{3} - 1)$ B) $3(\sqrt{2} - 1)$
C) $4(\sqrt{3} + 1)$ D) $5(\sqrt{2} + 3)$
E) $2\sqrt{2} + 1$

12. $f(x) = x^3 - 12x$ fonksiyonunu $[0, 2\sqrt{3}]$ aralığında Rolle teoremi uygulandığında elde edilen sayı **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) 1 D) 2 E) $\sqrt{2}$

13. $f:[1, 3] \to R$, $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$ fonksiyonuna ortalama değer teoremi uygulandığında elde edilen sayı **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{4}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

14. $f: [1, 4] \to R^+$, $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonuna ortalama **değer teoremi uygulandığında hangi sayı elde edilir?**

A) 2 B) 2,25 C) 2,5
D) 3 E) 3,25

15. **$f(x) = e^x$ fonksiyonuna [0,1] aralığında ortalama değer teoremini gerçekleyen sayı hangisidir?**

A) $\frac{e}{4}$ B) $\frac{e}{3}$ C) ln(e–1)
D) ln(e+1) E) $\frac{e}{2}$

16. $f(x) = \ln x$ fonksiyonu veriliyor. **$(1, e^2)$ aralığında ortalama değer teoremini sağlayan x sayısı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{2}{e^2 - 1}$ B) $\frac{e^2 - 1}{2}$ C) $\frac{e^2 + 1}{2}$
D) $e^2 + 1$ E) $e^2 - 1$

17. **$f(x) = mx^2 + nx + p$ fonksiyonu (a, b) aralığındaki ortalama değeri hangi x_1 sayısı sağlar?**

A) $\frac{a+b}{5}$ B) $\frac{a+b}{4}$ C) $\frac{a+b}{3}$
D) $\frac{a+b}{2}$ E) $a + b$

18. $f: [0, \pi] \to IR$, $f(x) = \cos\alpha$ fonksiyonuna ortalama değer teoremi uygulandığında elde edilen sayı **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\arcsin\frac{2}{\pi}$ B) $\arcsin\frac{\pi}{2}$
C) $\arcsin 2\pi$ D) $\arccos\frac{2}{\pi}$
E) $\arccos\frac{\pi}{2}$

19. **Aşağıdaki fonksiyonların hangisi verilen aralıkta Rolle Teoreminin koşullarını sağlar?**

A) $f(x) = |x|$; $[-1, 1]$
B) $f(x) = \tan x$; $[0, \pi]$
C) $f(x) = \sin 2x$; $[0, \pi]$
D) $f(x) = x - [\![x]\!]$; $[0, 1]$
E) $f(x) = |x - 1| + 1$; $[-2, 4]$

20. $f(x) = x^2 - 3x - 4$ fonksiyonuna [–1, 4] aralığında Rolle Teoremi uygulandığında $f'(x) = 0$ koşulunu sağlayan **x_0 değeri nedir?**

A) –1 B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 2

TÜREV

TEST 6

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ **kaçtır?**

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{5}{4}$ C) 2 D) $\frac{7}{2}$ E) 4

2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$ **kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x^2-3x+2}$ **kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

4. $a\in R,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax}{e^{3x}}$ **kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

5. $f(1)=1,\ f'(1)=2$ ise $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{f(x)}-1}{\sqrt{x}-1}$ **kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) $\frac{3}{2}$ E) 4

6. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln 2x}{\cot x}$ **kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 0
D) ∞ E) yoktur

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x^2}$ **kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) e
D) ∞ E) yoktur

8. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^4-256}{x^2-16}$ **kaçtır?**

A) 8 B) 16 C) 32 D) 64 E) 80

9. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}$ **kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x.e^x}{1-e^x}$ **kaçtır?**

A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 1

11. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\ln(2+x)}{x+1}$ **kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\cos 2x-1}$ **kaçtır?**

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}$ **nedir?**

A) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ B) $\frac{2}{\sqrt{a}}$ C) 0 D) 1 E) $\sqrt{a}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$ **nedir?**

A) $\ln a.b$ B) $\ln\frac{a}{b}$ C) $2\ln a$
D) $\ln b$ E) $2\ln\frac{a}{b}$

15. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{\cos 2x-1}$ **nedir?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $+\infty$ E) $-\infty$

16. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$ **nedir?**

A) sina B) cosa C) tana
D) 0 E) cota

17. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\pi-2x}$ **kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$ **kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) Yoktur

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x^2}$ **kaçtır?**

A) $-\frac{1}{3}$ B) $-\frac{2}{5}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) 0 E) $\frac{1}{2}$

20. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$ **kaçtır?**

A) $-\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) 0 D) 1 E) ∞

21. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)$ **kaçtır?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) 0 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $-\infty$

22. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ **kaçtır?**

A) –4 B) –3 C) –1 D) 0 E) 1

23. $(n>0)$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^n}$ **kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) e E) ∞

24. $\lim\limits_{x\to 0} (e^x+3x)^{\frac{1}{x}}$ **kaçtır?**

A) 1 B) e C) e^2 D) e^4 E) ∞

25. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$ **kaçtır?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{5}$ D) $-\frac{1}{8}$ E) 0

26. $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} (\sec 5x-\tan x)$ **kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) e D) $+\infty$ E) $-\infty$

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\pi}{x}\tan\dfrac{\pi x}{2}$ **kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi^2}{2}$ C) e^2 D) π^4 E) ∞

28. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$ **kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3
D) ∞ E) yoktur.

29. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$ **kaçtır?**

A) 1 B) e C) e^3
D) e^6 E) yoktur

30. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{-3x}$ **kaçtır?**

A) e^{-5} B) e^{-4} C) e^{-3} D) 0 E) e^4

TÜREV

TEST 7

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5$ fonksiyonunun x=1 deki **teğetinin eğim açısı kaç derecedir?**

A) 30 B) 60 C) 90 D) 135 E) 150

2. $f(x) = \frac{2x+1}{3-x}$ fonksiyonunun x = 2 deki **teğetinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $7x - y = 9$
B) $7x + y = 9$
C) $7x + 7y = 9$
D) $7x + 7y = 18$
E) $7x + y = 0$

3. $2x^2 - xy + y^2 = 16$ denklemi ile verilen eğrinin A(3, 2) noktasındaki teğetinin denklemi **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $y = -10x + 28$
B) $y = -10x - 28$
C) $y = -10x + 17$
D) $y = -10x - 15$
E) $y = -10x + 32$

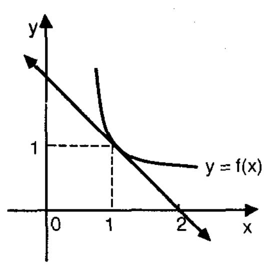
4. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5$ fonksiyonunun **yerel maksimum ve dönüm noktalarının apsislerinin toplamı kaçtır?**

A) $-\frac{7}{3}$ B) $-\frac{3}{2}$ C) 1 D) $\frac{19}{3}$ E) 5

5. $y = -2x^2 + 5x$ fonksiyonunun x eksenine paralel teğetinin değme noktasının ordinatı **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{11}{8}$ D) $\frac{21}{8}$ E) $\frac{25}{8}$

6. **Şekilde verilenlere göre f′(1) + f(1) kaçtır?**



A) 0 B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

7. $P(x) = (x - m)^n$ ve $n \in N^+$

$P(2) = P'(2) = P''(2) = P'''(2) = 0$ ise **m + n toplamının en küçük değeri kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

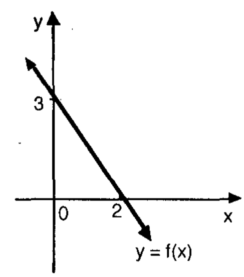
8. $f(x) = 3\sin x + b\cos x$ fonksiyonunun en büyük değeri $\sqrt{13}$ ise **b nin pozitif değeri kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9. Şekilde verilenlere göre

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2[f(x) - f(4)]}{(x-3)(x-4)}$$

neye eşittir?



A) –24 B) –8 C) 0 D) 8 E) 24

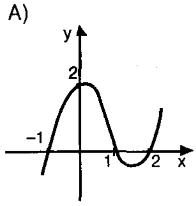
10. $y = x^3 + x^2 - x$ fonksiyonunun $y = \frac{-x+3}{2}$ **doğrusuna dik teğetlerinin değme noktalarının apsislerinin toplamı kaçtır?**

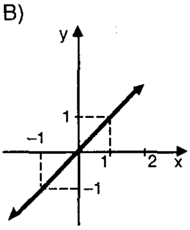
A) –2 B) $-\frac{3}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{2}{3}$

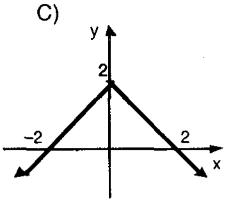
11. $y = |x^2 - 4| + x^2$ fonksiyonunun x = 3 **noktasındaki teğetinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

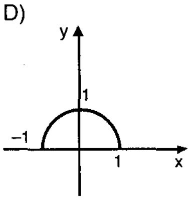
A) $y = x - 22$
B) $y = 12x - 22$
C) $y = x + 22$
D) $y = 12x + 22$
E) $y = 12x$

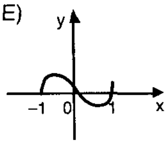
12. f: A → R, y = f(x) fonksiyonunda ∀ x ∈ A için f(–x) = f(x) ise **f′(x) in grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A)


B)


C)


D)


E)


13. $y = \dfrac{x^2 - bx + 1}{x - 1}$ fonksiyonunun x = 3 deki teğetinin 3x – y + 10 = 0 doğrusuna paralel olması için **b kaç olmalıdır?**

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

14. $f(x) = x + \dfrac{4}{x - m}$ fonksiyonunun y eksenine dik teğetlerinin değme noktalarının apsisleri toplamı 10 ise **m kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

15. $f(x) = e^x$ fonksiyonunun üzerindeki x = 1 apsisli noktasından çizilen normalin x eksenini kestiği **noktanın koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(1 - e^2; 0)$ B) $(1 + e^2, 0)$ C) $(1 + 2e; 0)$
D) $(2e; 0)$ E) $(e; 0)$

16. y = ln sin3x fonksiyonunun $x = \dfrac{\pi}{12}$ deki normalinin eğimi **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-\dfrac{1}{9}$ B) $-\dfrac{1}{6}$ C) $-\dfrac{1}{3}$ D) 1 E) 3

17. $y = x^2 \ln x$ fonksiyonunun x eksenine paralel **teğetinin değme noktasının ordinatı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) e^{-2} B) $e^{-\frac{3}{2}}$ C) $e^{-\frac{1}{2}}$
D) $-\dfrac{1}{2}e^{-1}$ E) $e^{\frac{1}{2}}$

18. x = 2cosθ, y = 2sinθ parametrik denklemleri ile verilen eğrinin $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ için teğetin denklemi **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $3x + 2y = 6\sqrt{2}$ B) $2x + 3y = 6\sqrt{2}$
C) $x + y = 2$ D) $x + y = -2\sqrt{2}$
E) $x + y = 2\sqrt{2}$

19. $x = \dfrac{t^2}{t - 1}$; $y = \dfrac{t}{t^2 - 1}$ parametrik denklemleri ile verilen eğrinin x = 4 deki teğetinin **eğimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) – 3 B) – 2 C) 0 D) 2 E) tanımsız

20. $x = t^2$, y = 2t + 1 parametrik denklemleri ile verilen eğrinin t = 1 deki teğetinin denklemi **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) x – y + 12 = 0 B) x – y – 1 = 0
C) x – y + 5 = 0 D) x – y + 2 = 0
E) x + y – 10 = 0

21. $x = e^t$, $y = 3e^{-t}$ parametrik denklemleri ile verilen eğrinin t = 0 daki **normalinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) x – 3y + 8 = 0 B) x + 3y = 0
C) x – 3y – 11 = 0 D) x + 2y = 0
E) 2x + 3y = 0

22. x = 3 – 4sinθ ve y = 4 + 3cosθ parametrik denklemleri ile verilen eğrinin düşey teğetlerinin **değme noktaların apsislerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

23. $y = t^3$ ve x = 3t parametrik denklemleri ile verilen eğrinin t = – 1 deki teğetinin denklemi **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) x + y = 2 B) 2x + y = 2
C) x – y = 2 D) y – x = 2
E) 2x + y = 0

24. $x^2 + y^2 = 8$ ve $x^2 + y^2 - 4x = 0$ denklemleri ile verilen eğrilerin (çember) kesişme açılarından biri **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 30° B) 45° C) 60° D) 90° E) 120°

25. $x = t^2 + 1$, y = 3t + 5 parametrik denklemleri ile verilen y = f(x) fonksiyonu için $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ **t = 1 için değeri nedir?**

A) $-\dfrac{3}{4}$ B) $-\dfrac{2}{3}$ C) $-\dfrac{1}{3}$ D) 1 E) $\dfrac{3}{4}$

TÜREV

TEST 8

1. $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ **fonksiyonunun düşey ve yatay asimptotlarının kesim noktasının koordinatları toplamı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. $y=\dfrac{x^2+3}{x^2+ax+a}$ fonksiyonunun düşey asimptotunun bulunmaması için **a nın alabileceği en küçük tamsayı değeri kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3. $y=\dfrac{(a-2)x^3+bx-1}{ax+c}$ fonksiyonunun yatay ve düşey asimptotlarının kesim noktası (2,3) olduğuna göre, **b + c kaçtır?**

A) –4 B) –3 C) –1 D) 1 E) 2

4. $y=\dfrac{2x^a+3}{x-a}$ fonksiyonunun eğik asimptotu olduğu bilindiğine göre **asimptotlarının kesim noktası nedir?**

A) (4, 2) B) (2, 4) C) (–4, 2)
D) (2, 8) E) (–2, –4)

5. $f(x)=(m+2)x+\dfrac{m}{x}$ fonksiyonunun eğik asimptotu $y=x$ olduğuna göre **f(m) in değeri nedir?**

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

6. $y^2=\dfrac{x}{x-2}$ denklemi ile verilen eğrinin yatay asimptotlarından biri **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $y=1$ B) $y=2$ C) $y=3$
D) $y=4$ E) $y=5$

7. $y=\dfrac{x^2-ax}{x^2-ax+3}$ eğrisinin grafiği x eksenini $x=4$ noktasında kestiğine göre **düşey asimptotları aşağıdakilerden hangisinde belirtilmiştir?**

A) $x=\mp1$ B) $x=\mp2$
C) $x=1$ ve $x=3$ D) $x=2$ ve $x=3$
E) $x=-1$ ve $x=3$

8. $y=\dfrac{ax^2-x}{x-b}$ fonksiyonunun asimptotları A(2, 3) noktasında kesiştiklerine göre **a.b kaçtır?**

A) –3 B) –2 C) –1 D) 1 E) 2

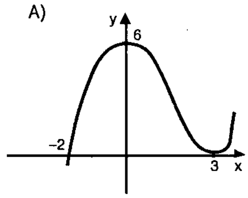
9. $y=\dfrac{ax^2-4x+2}{x-2}$ fonksiyonunun eğik asimptotu $y=ax$ olduğuna göre, **a kaçtır?**

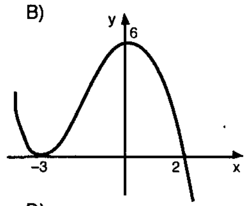
A) –4 B) –3 C) 1 D) 2 E) 3

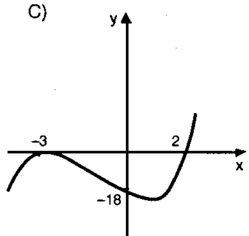
10. $f(x)=x^3-ax^2+bx+2$ fonksiyonunun simetri merkezi (1, –2) noktası olduğuna göre, **b kaçtır?**

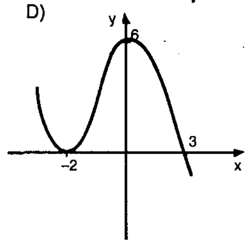
A) –4 B) –3 C) –2 D) –1 E) 0

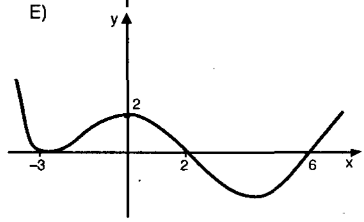
8. $f(x) = (x+3)^2\,(x-2)$ fonksiyonunun **grafiği hangisidir?**

A)


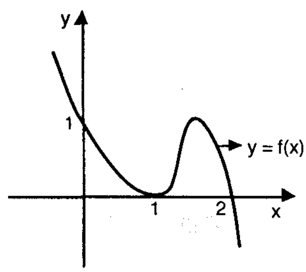
B)


C)


D)


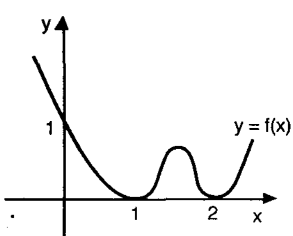
E)


9. Şekildeki grafik $y = f(x)$ fonksiyonuna ait olduğuna göre, **$f(1)\,.\,f'(3)$ kaçtır?**



A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

10.



Şekildeki 4. dereceden f(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = (x-1)^2\,(x-2)^2$

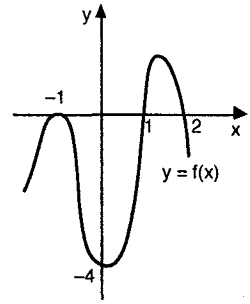
B) $y = \dfrac{1}{4}\left(x^2 - 3x + 2\right)^2$

C) $y = (x^2 - 3x + 2)^2$

D) $y = \dfrac{1}{2}\left(x^2 + 3x - 2\right)^2$

E) $y = \dfrac{1}{2}(x+1)^2(x-2)^2$

11.



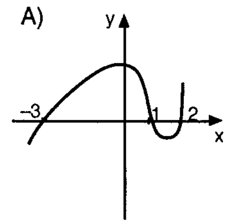
Şekilde grafiği verilen,

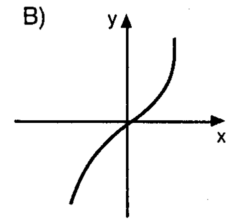
$y = (x+1)^2\,(x-1)\,(ax+b)$ fonksiyonu için

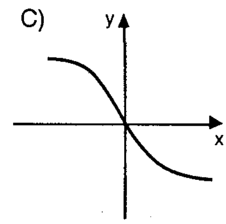
$\dfrac{b}{a}$ **kaçtır?**

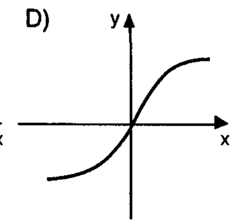
A) –2 B) –1 C) 1 D) 2 E) 4

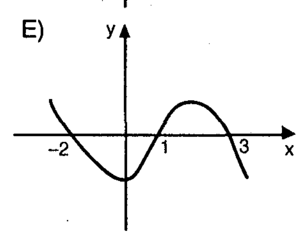
12. $f(x-1) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ ise **f(x) in grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A)


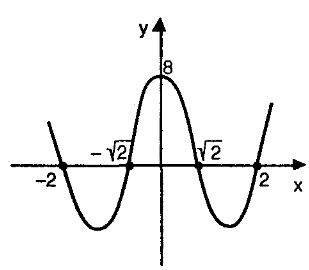
B)


C)


D)


E)


13.



Şekildeki grafiğe ait fonksiyon hangisidir?

A) $y = x^4 - 6x^2 + 8$ B) $y = x^3 - 6x^2 + 8$

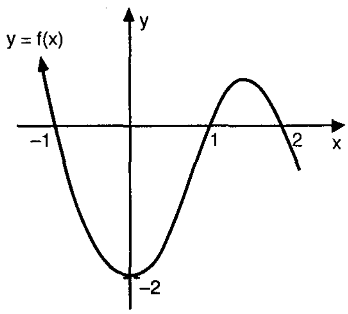
C) $y = x^4 - 6x + 16$ D) $y = 2x^4 - 6x$

E) $y = x^4 + 6x$

TÜREV

TEST 9

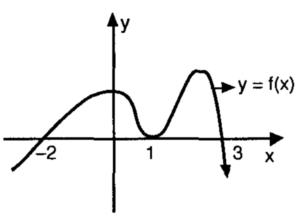
1.



Yukarıda grafiği verilen f(x) fonksiyonu ***aşağıdakilerden hangisidir?***

A) $f(x) = 3(x^2 - 1)(x - 2)$
B) $f(x) = -3(x^2 - 1)(x - 2)$
C) $f(x) = -(x^2 - 1)(x - 2)$
D) $f(x) = (x^2 + 1)(x - 2)$
E) $f(x) = -(x^2 + 1)(x + 2)$

2.

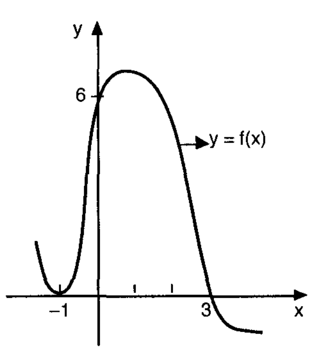


Şekilde, $f(x) = ax^4 + bx^2 + cx + d$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre a + b + c + d kaçtır?

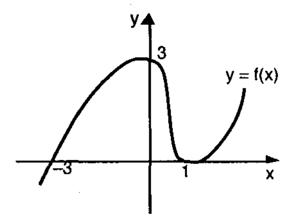
A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 1

3. Yanda grafiği verilen **y = f(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?**



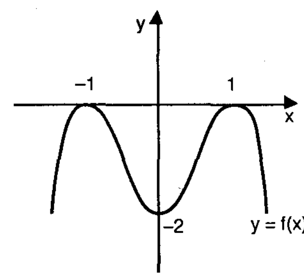
A) $f(x) = -2(x + 1)^2 (x - 3)$
B) $f(x) = 2(x + 1)^2 (x + 3)$
C) $f(x) = 2(x - 1)^2 (x - 3)$
D) $f(x) = -2(x - 1)^2 (x + 3)$
E) $f(x) = 3(x + 1)^2 (x - 2)^2$

4. Grafik $f(x) = (x + 3)(ax + b)^2$ fonksiyonuna aittir. **Buna göre a + b kaçtır?**



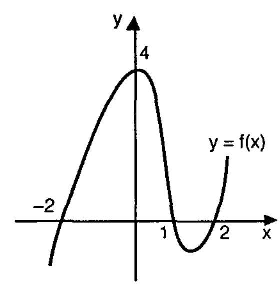
A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 1

5. Şekildeki grafiğin fonksiyonu hangisidir?



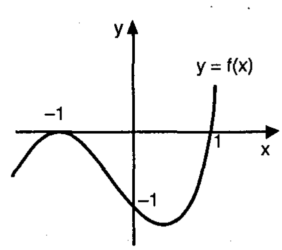
A) $f(x) = (x^2 - 1)^2$ B) $f(x) = 3(x^2 - 1)^2$
C) $f(x) = -2(x^2 - 1)^2$ D) $f(x) = (x^2 + 1)^2$
E) $f(x) = -2(x^2 + 1)^2$

6. Grafiği verilen f(x) fonksiyonu için **f(1).f′(1) aşağıdakilerden hangisidir?**



A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

7.



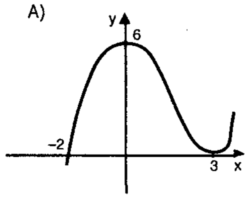
$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ fonksiyonu için

b + c + d toplamı hangisidir?

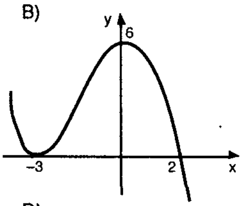
A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

8. $f(x) = (x + 3)^2 (x - 2)$ fonksiyonunun **grafiği hangisidir?**

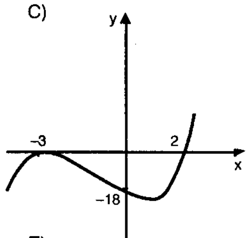
A)



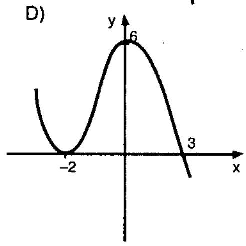
B)



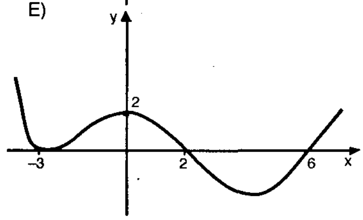
C)



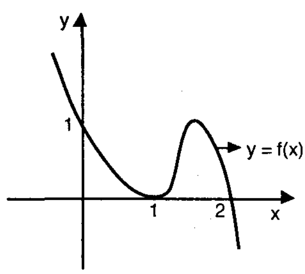
D)



E)

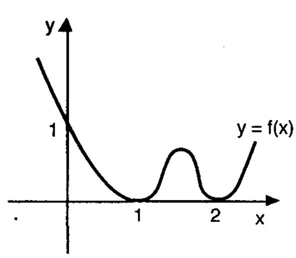


9. Şekildeki grafik $y = f(x)$ fonksiyonuna ait olduğuna göre, **$f(1) \cdot f'(3)$ kaçtır?**



A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

10.



Şekildeki 4. dereceden f(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = (x-1)^2 (x-2)^2$

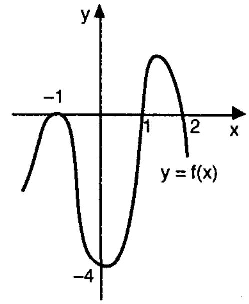
B) $y = \frac{1}{4}\left(x^2 - 3x + 2\right)^2$

C) $y = (x^2 - 3x + 2)^2$

D) $y = \frac{1}{2}\left(x^2 + 3x - 2\right)^2$

E) $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 (x-2)^2$

11.



Şekilde grafiği verilen,

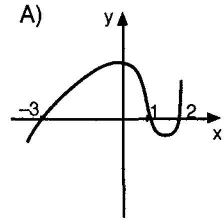
$y = (x + 1)^2 (x - 1)(ax + b)$ fonksiyonu için

$\frac{b}{a}$ **kaçtır?**

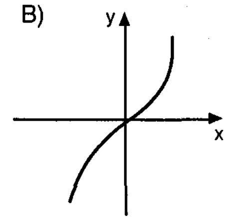
A) –2 B) –1 C) 1 D) 2 E) 4

12. $f(x - 1) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ ise **f(x) in grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

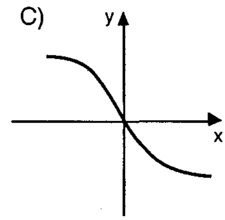
A)



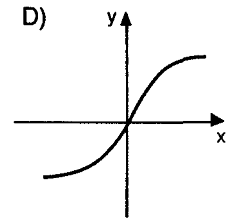
B)



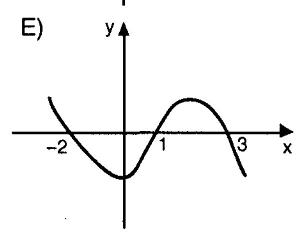
C)



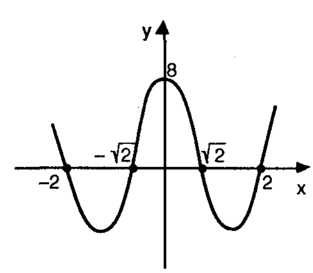
D)



E)



13.



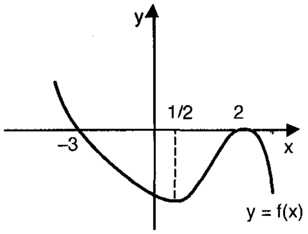
Şekildeki grafiğe ait fonksiyon hangisidir?

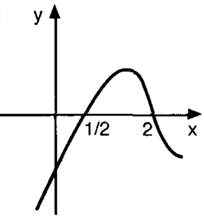
A) $y = x^4 - 6x^2 + 8$ B) $y = x^3 - 6x^2 + 8$

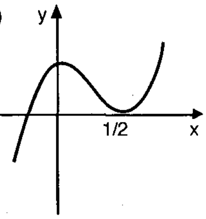
C) $y = x^4 - 6x + 16$ D) $y = 2x^4 - 6x$

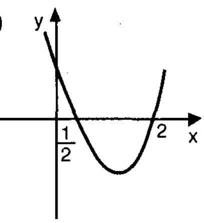
E) $y = x^4 + 6x$

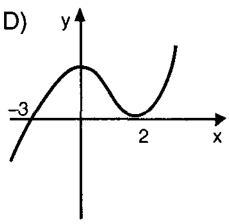
14. **Şekildeki f(x) fonksiyonunun türevinin grafiği hangisi olabilir?**

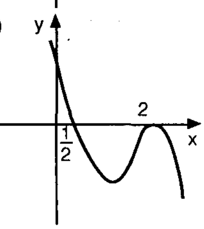


A)


B)


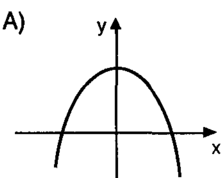
C)


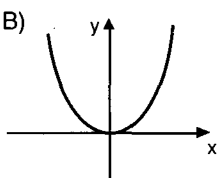
D)


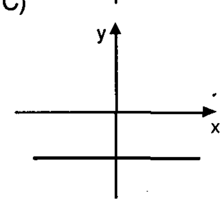
E)


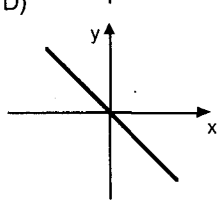
15. f : R → R fonksiyonu ∀x, y ∈ R için

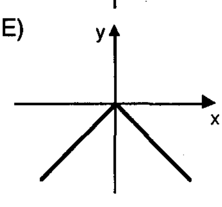
f(x + y) = f(x) + f(y) koşulunu sağlamaktadır. **Buna göre, f′(x) in grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A)


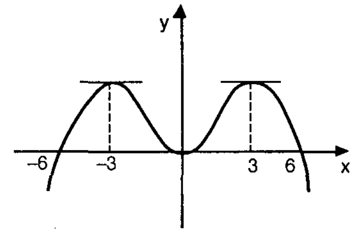
B)


C)


D)


E)


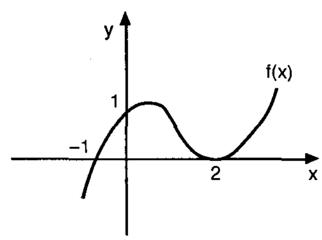
16.



f, birinci ve ikinci sıradan türevli olan R den R ye fonksiyondur. f nin grafiği yukarıdaki biçimde ise **aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) f′(7) > 0
B) x ∈ (0,3) ⇒ f′(x) < 0
C) f″(–3) > 0
D) f″(0) < 0
E) f′(6) < 0

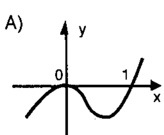
17.

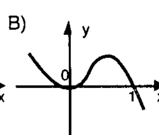


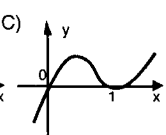
Grafiği yukarıda verilen üçüncü dereceden y = f(x) fonksiyonu için **f(3) değeri nedir?**

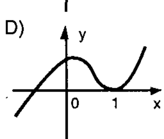
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{3}{4}$

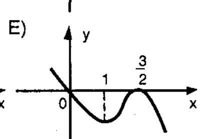
18. $f(x) = x^2 - x^3$ fonksiyonunun grafiği **aşağıdakilerden hangisidir?**

A)


B)


C)


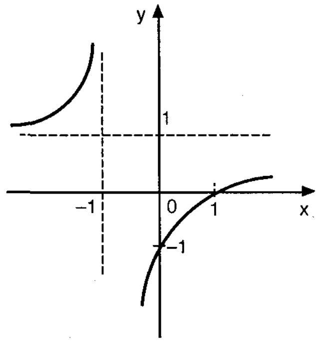
D)


E)


TÜREV

TEST 10

1.

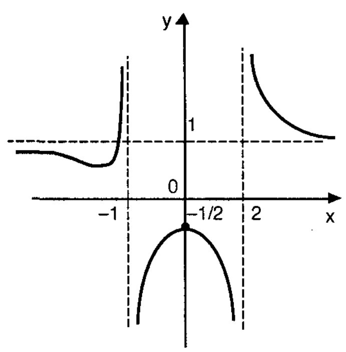


Şekildeki grafiğin fonksiyonu nedir?

A) $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ B) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ C) $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$

D) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ E) $y=\dfrac{x+1}{x-3}$

2.



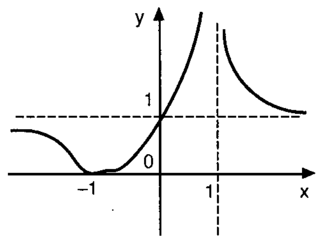
Şekildeki grafik aşağıdakilerden hangisine ait olabilir?

A) $y=\dfrac{x^2+x-1}{x^2-x-2}$ B) $y=\dfrac{x^2+x+2}{x^2-x-2}$

C) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-2}$ D) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$

E) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2+x}$

3. **Şekildeki grafik aşağıdaki fonksiyonlardan hangisine ait olabilir?**

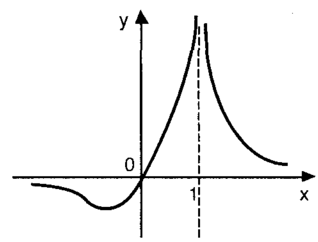


A) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$ B) $y=\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)^2$

C) $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}$ D) $y=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$

E) $y=\dfrac{x+2}{x-1}$

4. **Şekildeki grafik aşağıdaki fonksiyonlardan hangisine ait olabilir?**

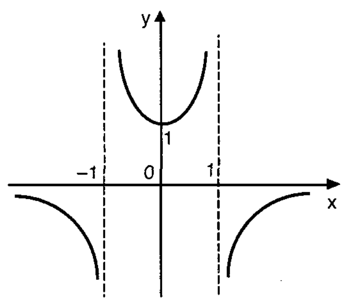


A) $y=\dfrac{x+2}{(x+1)^2}$ B) $y=\dfrac{x}{(x+1)^2}$

C) $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ D) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$

E) $y=\dfrac{x+2}{x-1}$

5.



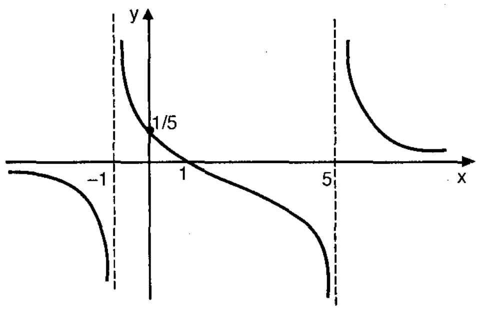
Şekildeki grafik aşağıdaki fonksiyonlardan hangisine aittir?

A) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ B) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$

C) $y=\dfrac{1}{1-x}$ D) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$

E) $y=\dfrac{x}{x^2+2}$

6.



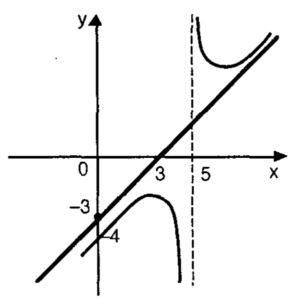
Şekildeki grafik aşağıdaki fonksiyonlardan hangisine aittir?

A) $y = \dfrac{x-2}{x^2-4x-5}$ B) $y = \dfrac{x+1}{x^2+4x-5}$

C) $y = \dfrac{x-1}{x-5}$ D) $y = \dfrac{x-1}{x^2-4x-5}$

E) $y = \dfrac{x}{x^2+4x-5}$

7. **Şekildeki grafik aşağıdakilerden hangisine ait olabilir?**

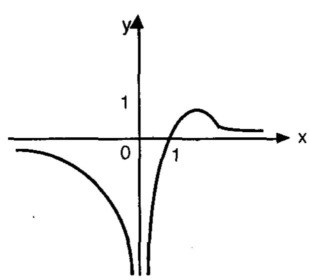


A) $y = \dfrac{x^2-8x+15}{x-5}$ B) $y = \dfrac{x^2+1}{x-5}$

C) $y = \dfrac{x^2-8x+20}{x-5}$ D) $y = \dfrac{x^2-8x}{x-5}$

E) $y = \dfrac{x^2-8x+11}{x+5}$

8. **Grafiği verilen y = f(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

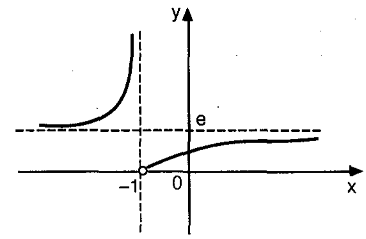


A) $y = \dfrac{x-1}{x}$ B) $y = \dfrac{1-x}{x}$

C) $y = \dfrac{x-1}{x^2}$ D) $y = \dfrac{1-x}{x^2}$

E) $y = \dfrac{x-1}{x^3}$

9.



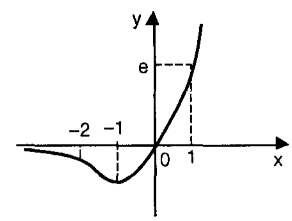
Grafiği verilen y = f(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = e^{x+1}$ B) $y = e^{\frac{x+1}{x-2}}$

C) $y = e^{\frac{x-2}{x+1}}$ D) $y = e^{\frac{x+1}{x-3}}$

E) $y = \ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)$

10. **Grafiği verilen y = f(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

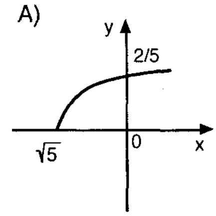


A) $y = xe^x$ B) $y = xe^{-x}$ C) $y = \dfrac{e^x}{x}$

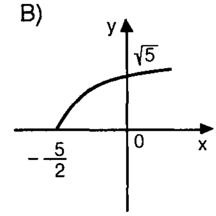
D) $y = x^2e^x$ E) $y = xe^{-2x}$

11. **$y = \sqrt{2x+5}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

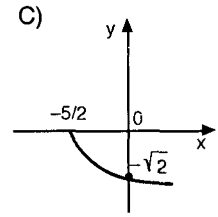
A)



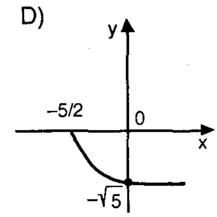
B)



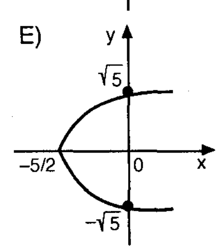
C)



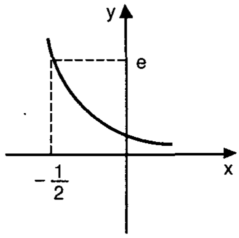
D)



E)



12. **Grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?**



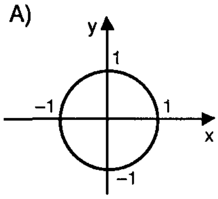
A) $y = e^{2x}$ B) $y = x^2 e^x$

C) $y = e^{-2x}$ D) $y = e^{3x}$

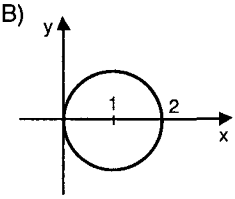
E) $y = x e^{2x}$

13. $x = \cos t + 1$ $y = \sin t$ parametrik denklemleri ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği **aşağıdakilerden hangisidir?**

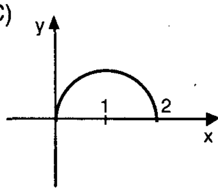
A)



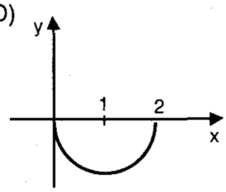
B)



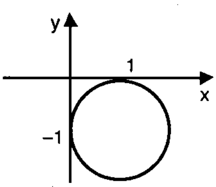
C)



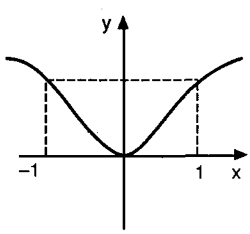
D)



E)



14. **Grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?**

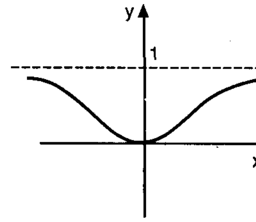


A) $y = \ln(x^2)$ B) $y = \ln(x^2 - 1)$

C) $y = \ln(x^2 + 1)$ D) $y = e^{x^2}$

E) $y = e^{2x}$

15. **Grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?**



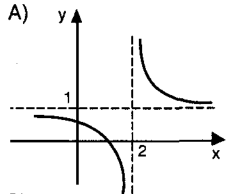
A) $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ B) $y = e^{\frac{1}{x^2}}$

C) $y = e^{-x^2}$ D) $y = \ln(x^2 + 2)$

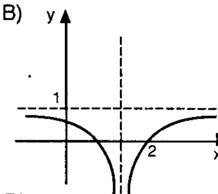
E) $y = \ln(x^2 + 3)$

16. $y = \dfrac{x^2 - 1}{(x-2)^2}$ fonksiyonunun **grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

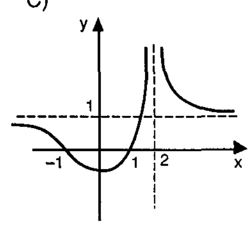
A)



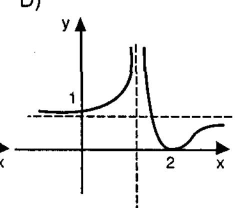
B)



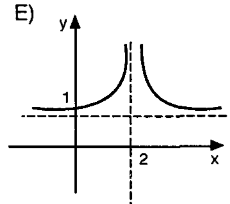
C)



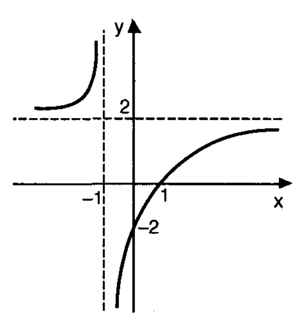
D)



E)



17.



Şekildeki eğrinin denklemi $y = \dfrac{ax + b}{x + c}$ ise **a + b + c toplamı kaç olur?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

ZAFER YAYINLARI

TÜREV

TEST 11

1. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ fonksiyonun yerel maksimum **ve minimum değerlerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. $y = \dfrac{x^2 + ax}{x - a}$ eğrisinin yerel ekstremum noktalarının apsisleri toplamı 2 ise **a kaçtır?**

A) –1 B) 1 C) $\dfrac{3}{2}$ D) 2 E) 3

3. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$ **fonksiyonunun yerel ekstremum değerinin $-\dfrac{1}{2}$ olduğu noktasının apsisi kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + m}{x^2}$ fonksiyonunun grafiğinin koordinat eksenlerini kesmemesi için **m yerine gelebilecek en küçük tamsayı ne olmalıdır?**

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

5. $y = \dfrac{x^2 - 5x - 4}{x^2 + 5x + 4}$ fonksiyonunun yerel ekstremum **değerlerinin toplamı kaçtır?**

A) – 19 B) $-\dfrac{82}{9}$ C) $-\dfrac{50}{9}$
D) 1 E) $\dfrac{82}{9}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + ax^2 + x + 1$ fonksiyonunun **daima artan olması için a hangi aralıkta olmalıdır?**

A) $-1 < a < 2$ B) $-1 < a < 0$
C) $-1 < a < 1$ D) $-2 < a < 3$
E) $2 < a < 5$

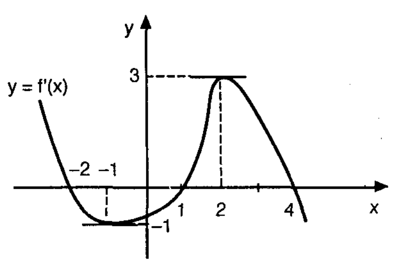
7. f: $[0, 2\pi] \to R$, $f(x) = x - \sin x$ fonksiyonu **aşağıdaki aralıklardan hangisinde artandır?**

A) $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ B) $(0, \pi)$ C) $\left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$
D) $(0, 2\pi)$ E) $(\pi, 2\pi)$

8. $f(x)=x^3-3x^2-9x+7$ eğrisinin **x-eksenine paralel teğetleri arasındaki uzaklık kaç br dir?**

A) 36 B) 32 C) 24 D) 12 E) 8

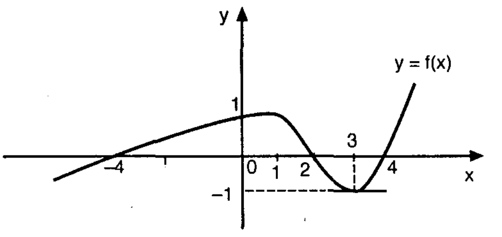
9.



Şekilde türevinin grafiği verilen y=f(x) fonksiyonu için **aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?**

A) x = –2 de yerel maxsimum vardır.
B) $f''(-1) = 0$
C) x = 1 de yerel minimum vardır.
D) $f''(2) = 0$
E) (2, 4) aralığında y = f(x) azalandır.

10.



Grafiği verilen y =f(x) fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $(-\infty, 0)$ aralığında $f'(x) > 0$
B) $f'(2) > 0$
C) $f'(3) = 0$
D) $f'(0) > 0$
E) $(3, \infty)$ aralığında $f'(x) > 0$

11. $y = \dfrac{x^2 - ax}{x^2 - 4x + 3}$ fonksiyonunun yerel ekstremumlarının olmaması için **a hangi aralıkta olmalıdır?**

A) $1 < a < 3$ B) $1 < a < 2$ C) $0 < a < 1$
D) $2 < a < 3$ E) $1 < a < 5$

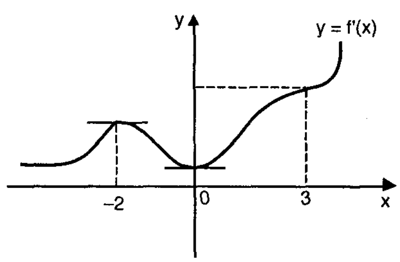
12. $x = (a + 2)\,t + 3$
$y = (-a + 3)\,t + 2$
parametrik denklemi ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun **daima artan olması için a hangi aralıkta olmadır?**

A) $1 < a < 2$ B) $-1 < a < 3$ C) $-2 < a < 5$
D) $-1 < a < 1$ E) $-2 < a < 3$

13. $f(x) = a\sin x + 5\cos x$ fonsiyonunun $[0, 2\pi)$ aralığındaki en büyük değeri $\sqrt{26}$ olduğuna göre **a nın pozitif değeri kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

14.



Türevinin grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için **aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?**

A) $f''(-2) = 0$
B) $f'''(3) = 0$
C) $f''(0) = 0$
D) $x \in (-2, 0)$ ise $f''(x) > 0$
E) $\forall x \in R$ için f nin grafiği artandır.

15. $y = (2 + x)^{\frac{1}{3}}(1 - x)^{\frac{2}{3}}$ fonksiyonunun $x = a$ da minimum değeri 0 ise **a kaçtır?**

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

16. $f: [-2, 4] \to R$, $f(x) = x^2 - 2x + 4$ ise $f([-2, 4])$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) [4, 12] B) [3, 12] C) [4, 16]
D) [3, 16] E) [4, 10]

17. $f(x) = x^2 - |x^2 - 4x|$ fonksiyonunun $\left[\dfrac{1}{5}, 6\right]$ **aralığındaki en küçük değeri kaçtır?**

A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 2

18. $f(x) = -x^4 + 2x^2$ fonksiyonun $[-2, 3]$ **aralığındaki en büyük değeri kaçtır?**

A) – 2 B) – 1 C) 1 D) 2 E) 3

19. **$f(x) = \sin x - \cos x$ fonksiyonun $[0, \pi]$ aralığındaki en büyük değeri kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) 2

20. $y = ax^2 + 3x - 3$ eğrisine üzerindeki $x = 1$ ve $x = -1$ apsisli noktalardan çizilen teğetler birbirine dik ise **a kaç olabilir?**

A) $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{5}$
D) $\sqrt{10}$ E) $\sqrt{11}$

21. $y = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + 4x + 5$ **fonksiyonunun dönüm noktasının apsisi kaçtır?**

A) $-\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 3

22. $y = 3x + (x + 2)^{\frac{5}{2}}$ **fonksiyonunun büküm noktasının apsisi kaçtır?**

A) –7 B) –6 C) –4 D) –3 E) –2

23. $y = \dfrac{x^3}{3} + x^2 + 2a$ eğrisinin $y = 3x - 1$ doğrusuna teğet olması için **pozitif a sayısı ne olur?**

A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) 1 D) $\dfrac{3}{2}$ E) 2

24. **$y = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ fonksiyonun tümsek (konkav) olduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x < -\dfrac{3}{5}$ B) $x < -\dfrac{2}{3}$ C) $x > -\dfrac{3}{5}$
D) $x > -\dfrac{2}{3}$ E) $x > \dfrac{3}{5}$

TÜREV

TEST 12

1. $y = \frac{\ln x}{x}$ fonksiyonunun **yerel ekstremum noktasının apsisi kaçtır?**

A) $-e^2$ B) $-e$ C) e D) e^2 E) e^3

2. $x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $x_1^2 + x_2^2$ nin minimum olması için **a kaç olmalıdır?**

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

3. Toplamları 12 olan iki reel sayının çarpımlarının maksimum değeri, **toplamlarının kaç katıdır?**

A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) 3
D) $\frac{7}{2}$ E) 4

4. **Hipotenüsü 10 cm olan dik üçgenin alanı en fazla kaç cm² dir?**

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

5. 10 cm yarıçaplı bir yarım çember içine çizilen **maksimum alanlı dikdörtgenin alanı kaç cm² dir?**

A) 100 B) 150 C) 200 D) 250 E) 300

6. **$2y = x^2$ eğrisinin $A = (4,1)$ noktasına en yakın noktasının koordinatları nedir?**

A) (2, 1) B) (1, 2) C) (2, 2)
D) (2, 4) E) (4, 2)

7. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ biçiminde verilen fonksiyonun $[-4, 1]$ aralığındaki en büyük **değeri kaçtır?**

A) 24 B) 26 C) 28 D) 30 E) 32

8. Yarıçapı $r = 6$ m olan bir kürenin içine çizilen **maksimum hacimdeki dik silindirin yüksekliği kaç m dir?**

A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{2}$
D) $3\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{3}$

9. $f: [-2, n] \to [m, 6]$, $f(x) = x^2 - x - 6$ biçiminde tanımlanıyor. **Buna göre m.n değeri keçtır?**

A) 6 B) 4 C) -4 D) -24 E) -25

10. Bir yamuğun iki yan kenarı ile üst tabanı birbirine eşit ve 10 ar cm dir. **Yamuğun alanının maksimum olması için alt taban uzunluğu kaç cm olmalıdır?**

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

11. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 27x - 54$ fonksiyonunun dönüm **noktasının ordinatı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) -24 B) -16 C) 16 D) 24 E) 54

12. $f(x) = 3^{\ln(x^2+4)}$ **eğrisi hangi aralıkta azalandır?**

A) $(-\infty, 0)$ B) $(-\infty, 1)$ C) $(0, +\infty)$
D) $(-2, 2)$ E) R

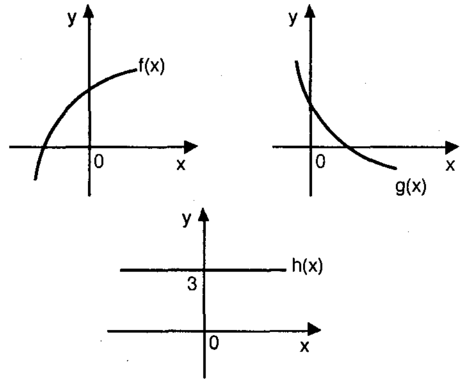
13. $f(x) = e^{x^2-4x}$ **fonksiyonu hangi aralıkta artandır?**

A) $(-\infty, -3)$ B) $(-\infty, 5)$ C) $(-\infty, -2)$
D) $(-\infty, 2)$ E) $(2, +\infty)$

14. $f(x) = -x^3+6x^2-2x-9$ **fonksiyonunun hangi noktasındaki teğetinin eğimi en büyüktür?**

A) $(-2, 3)$ B) $(-2, 1)$ C) $(2, 3)$
D) $(2, 10)$ E) $(3, 7)$

15.



Grafikleri verilen fonksiyonlar için hangisi doğrudur?

A) $\frac{h'(x)}{g(x)} < 0$

B) $h'(x).\ f'(x) < g'(x)$

C) $g'(x) < h'(x) < f'(x)$

D) $h'(x).\ f'(x)\ .\ g'(x) > 0$

E) $h'(x) < f'(x) < g'(x)$

16. (a, b) aralığında tanımlı y = f(x), ve y = g(x) fonksiyonları veriliyor.

f(x) pozitif tanımlı ve azalan, g(x) negatif tanımlı ve artan ise **aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) $f(x).\ g'(x) < 0$

B) $\frac{f'(x)}{g'(x)} \cdot f(x) < 0$

C) $\frac{g'(x)\ .\ f'(x)}{f(x).\ g(x)} < 0$

D) $f'(x)\ .\ g'(x)\ .\ f(x) = 0$

E) $f'(x)\ .\ g'(x) > 0$

17. y = f(x) fonksiyonu (–∞,0) aralığında negatif olarak tanımlı ve artan fonksiyondur. **Buna göre aşağıdakilerden hangisi aynı aralıkta kesinlikle azalandır?**

A) $[f(x)]^3$ B) $-f^2(x)$ C) $\frac{f(x)}{x}$

D) $5f(x)$ E) $f^4(x)$

18. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ fonksiyonunun dönüm noktasının koordinatları toplamı **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

19. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ fonksiyonunun dönüm noktasının (1, 1) olması için a.b kaç olmalıdır?

A) –9 B) –6 C) 0 D) 3 E) 6

20. $f(x) = x^2 \ln x$ **fonksiyonunun dönüm noktasının apsisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{2}{\sqrt{e}}$ B) $\frac{1}{e\sqrt{e}}$ C) $\frac{3}{\sqrt{e}}$

D) $\frac{e^3}{2}$ E) $2e^3$

21. $x = 2\cot\theta$, $y = 2\sin^2\theta$ parametrik denklemleri ile **verilen eğrinin büküm noktasının ordinatı hangisidir?**

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

22. $x = t - 1$ $y = t^2 + 1$ parametrik denklemleri ile verilen eğrinin çukur (konveks) olduğu **en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?**

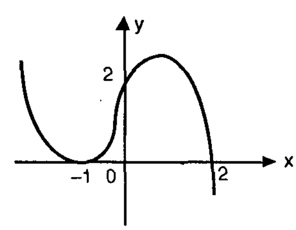
A) (–∞, +∞) B) (–∞, 0) C) (1, +∞)

D) (0, +∞) E) [1, 0]

23. $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ bağıntısına göre hareket eden bir hareketlinin $x = \frac{b}{a}$ anındaki ivmesi 16 olduğuna göre **b kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

24.



Şekilde,

$f(x)= ax^3-bx^2+cx+d$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

f(x) in dönüm noktasının apsisi kaçtır?

A) $\frac{-1}{2}$ B) $\frac{-1}{4}$ C) 0 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

TÜREV

TEST 13

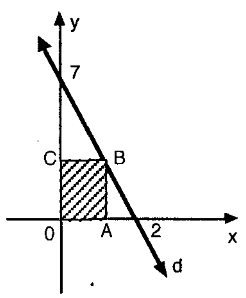
1. $y=\dfrac{6}{x^2-4x+10}$ **ifadesinin en büyük değeri kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. $f(x)=e^{-4x^2+16x-8}$ fonksiyonunun alabileceği en küçük değer A ise **lnA kaçtır?**

A) 1 B) e^{-8} C) 8 D) e^{8} E) 16

3. Şekildeki d doğrusu üzerinde alınan herhangi bir B noktasından X ve Y eksenlerine dikmeler **indirilerek elde edilen OABC dikdörtgeninin maksimum alanı kaç br^2 dir?**



A) 1,5 B) 2,5 C) 3,5 D) 4,5 E) 5,5

4. Tabanı 12 cm tabana ait yüksekliği 10 cm olan ikizkenar üçgenin içine çizilen maksimum alanlı **dikdörtgenin alanı kaç cm^2 dir?**

A) 30 B) 40 C) 50 D) 60 E) 70

5. $x, y \in R^+$ ve $x.\,y = 100$ ise **x + y nin en küçük değeri kaçtır?**

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

6. **A(2, 2) noktasından geçen ve birinci bölgede koordinat eksenleri ile <u>en küçük</u> alanlı üçgen oluşturan doğrunun eğimi nedir?**

A) –3 B) $-\dfrac{5}{2}$ C) –2 D) $-\dfrac{3}{2}$ E) –1

7. $f(x) = x^3 - 3x + 12$ fonksiyonunun $[-1,2]$ **aralığındaki en küçük değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 3 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

8. $y=\dfrac{2}{x}$ **fonksiyonunun başlangıç noktasına en yakın olan noktasının başlangıç noktasına uzaklığı kaç birimdir?**

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $3\sqrt{2}$ E) 2

9. $y = x^3$ fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktasından çizilen teğeti eğriyi başka bir A noktasında kestiğine göre **A noktasının koordinatları toplamı kaçtır?**

A) –8 B) –9 C) –10 D) –12 E) –14

10. $f(x) = x^2 - 4$ fonksiyonunun $[-2, 4]$ aralığındaki **<u>en küçük</u> ve <u>en büyük</u> değerlerinin toplamı kaçtır?**

A) 4 B) 8 C) 12 D) 16 E) 20

11. $x + 2y = 8$ olduğuna göre **x.y nin <u>en büyük</u> değeri nedir?**

A) 4 B) 8 C) 16 D) 20 E) 24

12. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ eğrisinin $y = x + 1$ doğrusuna paralel teğetlerinin değme noktalarının **apsisleri toplamı nedir?**

A) –4 B) –3 C) –2 D) –1 E) 0

13. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 12x - 4$ fonksiyonunun **[0,2] aralığındaki en küçük değeri kaçtır?**

A) –4 B) –2 C) 0 D) 1 E) 4

14. $f(x) = x^3 - ax^2 + 3x - 2$ fonksiyonu veriliyor. $f'(x)$ fonksiyonunun yerel minimum değerinin sıfır olması için **a kaç olmalıdır?**

A) ∓ 4 B) ∓ 3 C) ∓ 2 D) ∓ 1 E) 0

15. $y = x^2 + \frac{16}{x}$ **fonksiyonunun yerel minimum noktası hangisidir?**

A) (2, 4) B) (–2, 8) C) (2, 12)
D) (2, –12) E) (–2, 12)

16. Alanı 64 cm^2 olan kare biçimindeki bir kartonun köşelerinden eş kareler kesilerek üstü açık bir dikdörtgenler prizması yapılıyor. **Prizmanın hacminin maksimum olması için kesilecek eş karelerden birinin alanı kaç cm^2 olmalıdır?**

A) $\frac{64}{9}$ B) $\frac{16}{9}$ C) $\frac{32}{9}$ D) $\frac{32}{3}$ E) $\frac{4}{3}$

17. $y = \sqrt{25 - 4x^2}$ fonksiyonunun $[-2,2]$ aralığındaki **minimum ve maksimum değerlerinin toplamı kaçtır?**

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

18. $y = \sqrt{x}$ eğrisine 45° lik eğim açısı ile teğet olan **doğrunun denklemi nedir?**

A) $4x - 4y + 1 = 0$ B) $3x - 3y + 1 = 0$
C) $2x - 2y + 1 = 0$ D) $x - y + 1 = 0$
E) $x + y + 1 = 0$

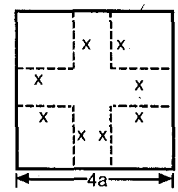
19. $f(x)= x^3-3x+a$ fonksiyonunun grafiği x-eksenini farklı 3 noktada kestiğine göre, **a için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) $(-\infty, -2)$ B) $(-1, 1)$ C) $(2, \infty)$
D) $[-2, 2]$ E) $(-2, 2)$

20. $y = \frac{x^2 - ax}{x^2 - 4x + 3}$ fonksiyonunda **a hangi aralıkta olmalıdır ki fonksiyon daima <u>azalan</u> olsun?**

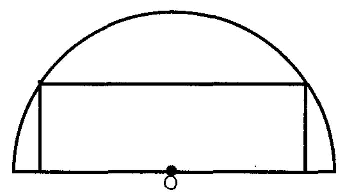
A) $-\infty<a<1$ B) $1<a<3$ C) $3<a<4$
D) $4<a<+\infty$ E) $1< a < 4$

21. Kenarlarının uzunluğu 4a olan kare şekildeki bir kartonun köşelerinden şekildeki gibi bir kenarının uzunluğu x olan küçük kareler kesilerek çıkarıldıktan sonra, kalan parça kıvrılarak üstü açık kare prizma biçiminde bir kutu yapılmak isteniyor. **Bu kutunun hacminin maksimum olması için, x uzunluğu ne olmalıdır?**



A) $\frac{a}{3}$ B) $\frac{2a}{3}$ C) $\frac{a}{2}$ D) a E) 2a

22.



Yarıçapı 2 cm olan yarım çember içine çizilen <u>en büyük</u> alanlı dikdörtgenin çevresi kaç cm olur?

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $4\sqrt{2}$
D) 4 E) $6\sqrt{2}$

23. f(x) fonksiyonu $(-\infty, 0)$ aralığında pozitif olarak tanımlı ve artan bir fonksiyondur. Buna göre aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi <u>aynı aralıkta azalan</u> bir fonksiyon olur?

A) $f(x) + 3x$ B) $f(3x)$ C) $f^3(x)$
D) $f(x^3)$ E) $-f(x)$

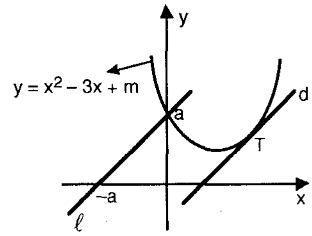
24. $y = f(x) = mx^3 - (2m - 1)x^2 + 4x - 3$ fonksiyonunun $x = 1$ de bir extremum değeri varsa **m değeri kaçtır?**

A) 1 B) 3 C) 6 D) 8 E) 10

TÜREV

TEST 14

1. $y = x^2 - 3x + m$ parabolünün T noktasındaki teğeti olan d doğrusu ℓ doğrusuna paraleldir.



T noktasının apsisi kaçtır?

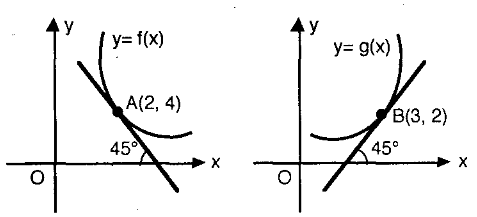
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. $f(x) = (x^2 - 2x)^3$ ise

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3) - f(3+h)}{12h}$ **değeri nedir?**

A) –9 B) –6 C) 6 D) 9 E) 12

3.



Şekilde y= f(x) ve y= g(x) fonksiyonlarının A ve B noktalarındaki teğetleri çizilmiştir. **y= (fog)(x) fonksiyonunun x= 3 apsisli noktadaki normalinin eğimi kaçtır?**

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) –1 E) –2

4. $f(x) = \begin{cases} -3mx + n & ; \ x \le 1 \text{ ise} \\ nx - m + 4 & ; \ x > 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu x = 1 de sürekli ise

$y = \dfrac{(m+1)x^2 + 5}{x - m}$ eğrisine ait asimptotlarla koordinat eksenlerinin oluşturduğu **dörtgenin alanı kaç birim kare olur?**

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(\cos x - 1)}{\sin x - x}$ **değeri kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 1 D) 2 E) 3

6. $y = 4x^2$ parabölünün $x = \frac{1}{4}$ deki teğeti $m^2y = 8mx - 4$ olduğuna göre, **m kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7. $f(x) = x^2 + bx + c$ fonksiyonu için $f(x) = f'(x)$ eşitliğini sağlayan yalnız bir x_0 apsisli noktası olduğuna göre **b^2 neye eşittir?**

A) $4c + 4$ B) $4c - 4$ C) $c - 1$
D) $c + 1$ E) $2c - 1$

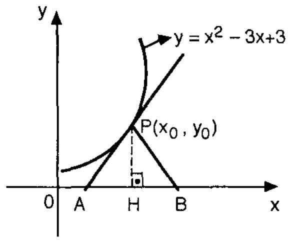
8. $y = x^2 + 3$ parabolünün x = a doğrusu ile kesim noktasındaki teğeti A(2, 6) ve B(3, 3a) noktalarından geçen doğruya paralel olduğuna göre göre **B nin koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?**

A) (3, 18) B) (3, 9) C) (3, 3)
D) (3, 12) E) (3, 15)

9. $y = x + \dfrac{2}{x}$ eğrisinin $(2, y_0)$ noktasındaki normali x ve y eksenlerini A ve B noktalarında kestiğine göre, **IABI uzunluğu nedir?**

A) $\frac{3}{2}\sqrt{7}$ B) $\frac{7}{2}\sqrt{5}$ C) $\frac{3}{5}\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{6}$ E) $3\sqrt{11}$

10. $y = x^2 - 3x + 3$ parabolünün P noktasındaki teğet doğrusu AP, normal doğrusu ise PB dir.



$|AH| = |HB|$ ise

|OA| uzunluğu kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11. **$f(x) = (x-1)(x^2+x-2)$ eğrisinin x eksenine paralel teğetleri arasındaki uzaklık kaç br. dir?**

A) 1 B) 2 C) $\frac{80}{27}$ D) $\frac{10}{3}$ E) 4

12. $y = 2x^2(1-x)$ için

$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ olduğunda $\frac{dy}{dx}$ **değeri nedir?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) 2

13. $y = 3x^2 + 2x + 4$ parabolü $x > m$ değeri için artan olduğuna göre, **m değeri nedir?**

A) $-\frac{2}{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) 0 D) $\frac{2}{3}$ E) 1

14. $y = x.(a-x)$ parabolünün maksimum değeri 1 olduğuna göre, **a kaç olabilir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

15. $x + y = 9$ ise **$x^2.y$ nin <u>en büyük</u> değeri kaçtır?**

A) 36 B) 72 C) 81 D) $\frac{729}{8}$ E) 108

16. $x + y = 6$ ise $x^2 + y^2$ ifadesinin **<u>en küçük</u> değeri kaçtır?**

A) 15 B) 16 C) 18 D) 24 E) 36

17. $f(x) = x^3+3x^2-9x+m$ **fonksiyonunun hem artan hem de konveks olduğu en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(-\infty, -3)$ B) $(-3, 1)$ C) $(-1, 1)$
D) $(1, \infty)$ E) $(3, \infty)$

18. $f(x) = \ln(\sin^2 x)$ ise $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ eşitliğini sağlayan **x dar açısı kaç derecedir?**

A) 30° B) 45° C) 60° D) 75° E) 80°

19. $f(x) = |\sin 2x - 1| + [\![\frac{\cos x}{2}]\!]$ ise **$f'(\pi)$ nin değeri kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

20. $\left.\begin{array}{l} y = \cos 2\theta \\ x = \sin\theta - 1 \end{array}\right\}$ ise $\frac{dy}{dx}$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $4x-4$ B) $4-4x$ C) $-4x-4$
D) $x+4$ E) $4-x$

21. $f(x) = x^a - ax^3 + 10x + b$ fonksiyonunun A(1, m) noktasında bir ekstremumu olduğuna göre, **f(x) in A dan başka kaç ekstremum noktası vardır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

22. $f:\left[\frac{1}{4},+\infty\right) \to R$ $f(x) = x^2 + 5x - 5$ ise

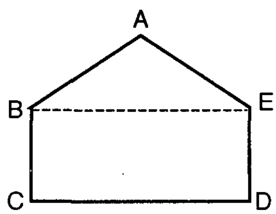
$\left(f^{-1}\right)'$ **(1) değerinin eşiti nedir?**

A) $-\frac{1}{7}$ B) $-\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{7}$ E) 1

23. $f(x) = \sqrt{\sqrt{3}.\cos x + \sqrt{13}.\sin x}$ fonksiyonunun alabileceği **<u>en büyük</u> değer kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

24. ABE eşkenar üçgen BCDE dikdörtgen verilen şeklin çevresi 6 cm ise **tüm şeklin alanının <u>en büyük</u> değeri için eşkenar üçgenin bir kenarı neye eşittir?**



A) $\frac{12+2\sqrt{3}}{11}$ cm B) $\frac{5+\sqrt{3}}{11}$ cm

C) $\frac{1+\sqrt{3}}{11}$ cm D) $\frac{3+\sqrt{3}}{11}$ cm

E) $\frac{\sqrt{3}}{11}$ cm

25. Bir ekmek fabrikasında bir günde m tane ekmek üretilmekte olup bir ekmekten (6000–3m) lira kâr edilmektedir. Bir günlük kârın en yüksek düzeye çıkabilmesi için **bir günde en az kaç ekmek üretilmelidir?**

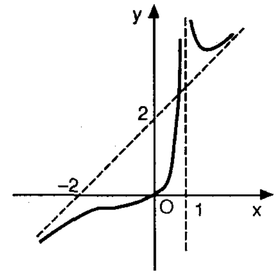
A) 600 B) 1000 C) 1200

D) 1800 E) 2000

26. $f(x) = x^3 + (m - 1)x^2 + nx + 3$ fonksiyonunda dönüm noktasının apsisi –1 olup, bu nokta fonksiyonunun azalan olduğu aralıkta olduğuna göre, **n yerine gelebilecek <u>en büyük</u> tamsayı kaç olur?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

27. Grafiği yanda verilen fonksiyon **aşağıdakilerden hangisi olabilir?**



A) $y = \frac{2x^2 + 3}{x - 1}$ B) $y = \frac{2x^2}{x + 1}$

C) $y = \frac{x^3}{(x - 1)^2}$ D) $y = \frac{x^3}{(x + 1)^2}$

E) $y = \frac{x^3 - 3x}{(x - 1)^2}$

28. $\frac{d^n}{dx^n}\left(x \cdot e^x\right)$ ifadesinin eşiti **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(x + n)e^x$ B) $x^n e^x$ C) $(xe^x)^n$

D) $x^n e^{nx+1}$ E) $x^{n-1}e^x$

29. $y^2 - x^2 - 1 = 0$ veriliyor.

$\frac{d^2y}{dx^2}$ **aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) $\frac{1}{y^3}$ B) $-\frac{1}{y^2}$ C) $\frac{1}{x^3}$

D) $-\frac{1}{x^3}$ E) $\frac{x^3}{y^3}$

30. $f(x) = \sin 2x$ ise **f″(x) in f(x) türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) –4f(x) B) –2f(x) C) f(x)

D) 2f(x) E) 4f(x)

TÜREV

TEST 15

1. $f(x) = mx^2 - (m-3)x + 3$ fonksiyonu $x = \frac{1}{8}$ noktasında minimum değerini alıyorsa **m kaçtır?**

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

2. $f(x) = x^3 - 3x + c$ fonksiyonunun yerel maksimum değeri 4 ise, **c kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

3. $[-1, 3]$ kapalı aralığından R ye tanımlı $f(x) = x^2 - 4x + 7$ fonksiyonunun <u>en büyük</u> **değeri kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 10 D) 12 E) 16

4. $f(x) = \sin^2 \frac{\pi x}{6}$ fonksiyonunun $0 \leq x < 6$ **aralığındaki yerel maximum değeri nedir?**

A) 1 B) $\frac{\pi^2}{18}$ C) 0 D) $-\frac{\pi^2}{18}$ E) -1

5. $y > 0$ olmak üzere, $x^2 + y^2 = 25$ **çemberinin** $x = -3$ **deki normalinin eğimi kaçtır?**

A) $-\frac{5}{3}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $-\frac{4}{3}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

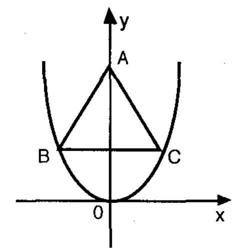
6. $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + 3$ denklemiyle verilen eğrinin dönüm (büküm) noktasındaki teğetinin eğimi -4 ise, **büküm noktasının ordinatı kaçtır?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

7. $x - y = 6$ olduğuna göre, **x in hangi değeri için** $x^2 + y^2 + 4$ **ifadesi <u>en küçük</u> değerini alır?**

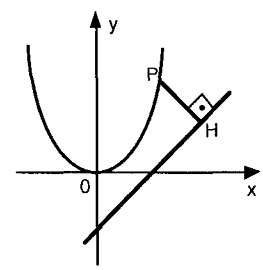
A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

8. Şekilde, A(0,12) dir. B, C noktaları $y = x^2$ parabolü üzerinde ve BC // OX ise, **ABC üçgeninin alanı <u>en çok</u> kaçtır?**



A) 16 B) 12 C) 10 D) 8 E) 6

9. Şekildeki parabolün denklemi $y = x^2$ ve doğrunun denklemi; $y = 2x - 3$ tür. **Parabol üzerindeki P noktasından doğruya inilen [PH] dikmesinin uzunluğu <u>en az</u> kaçtır?**



A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ D) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ E) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

10. $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 4$ denklemiyle verilen eğrinin yerel ekstremum noktalarından biri A(–1, 3) ise, **n kaçtır?**

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

11. $f(x) = x^5 + ax^3 + bx + 4$ polinomunun iki katlı kökü 1 olduğuna göre, **a kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

12. $y^2 = x$ parabolünün $y = 6x + 10$ **doğrusuna <u>en yakın</u> noktasının ordinatı kaçtır?**

A) $\frac{1}{17}$ B) $\frac{1}{13}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{10}$ E) $\frac{1}{9}$

13. $f(x)= x^3+mx^2+nx+p$ fonksiyonunun $x= 1$ apsisli noktada yerel maksimumu varsa, **n aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) $\frac{3}{2}$ B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) 3 E) $\frac{7}{2}$

14. $y = x^2 + 4$ eğrisinin **$y = 3x + 1$ doğrusuna dik teğetinin değme noktasının apsisi nedir?**

A) $-\frac{1}{7}$ B) $-\frac{1}{6}$ C) $-\frac{1}{5}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{1}{3}$

15. $f(x) = x^3 - 6x^2 - 4x + 6$ eğrisinin **x eksenine paralel teğetlerinin değme noktalarının apsislerinin toplamı nedir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

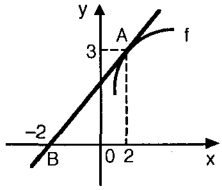
16. 32 cm uzunluğundaki bir telden, bir kare ve bir daire oluşturulacaktır. **Kare ve dairenin alanlarının toplamının <u>en büyük</u> olması için dairenin yarıçapı kaç cm seçilmelidir?**

A) $\frac{8}{\pi+2}$ B) $\frac{16}{\pi+2}$ C) $\frac{16}{\pi+4}$
D) $\frac{20}{\pi+2}$ E) $\frac{24}{\pi+2}$

17. $3xy = 1 + x^2 + y^2$ denklemiyle **verilen eğrinin A(2, 1) noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{7}$

18. $y = f(x)$ eğrisinin A(2, 3) noktasındaki teğeti x eksenini B(–2, 0) noktasında kesiyor.



$g(2x + 1) = f(x).\arctan(x - 1)$ olduğuna göre, $g'(5)$ kaçtır?

A) $\frac{3\pi}{16}$ B) $\frac{3\pi}{32}$ C) $\frac{3\pi-16}{32}$
D) $\frac{3\pi+16}{32}$ E) $\frac{3\pi+24}{32}$

19. $f(x) = -x^3 + ax^2 + 3x - 1$ fonksiyonu veriliyor. $f'(x)$ fonksiyonu $x = -1$ de <u>en büyük</u> değerini aldığına göre, **f(1) kaçtır?**

A) –3 B) –2 C) 0 D) 2 E) 3

20. $f(x) = x^2 - 3x$ eğrisinin **$y = -x - 6$ doğrusuna paralel teğetinin denklemi nedir?**

A) $x + y - 2 = 0$ B) $x + y - 1 = 0$
C) $x + y + 2 = 0$ D) $x + y + 1 = 0$
E) $x + y - 3 = 0$

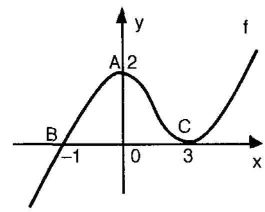
21. $y^2 = x$ parabolünün $y = 1$ deki normalinin **y eksenini kestiği noktanın ordinatı nedir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

22. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin 4x}{1-\tan x}\right)$ ifadesi **neye eşittir?**

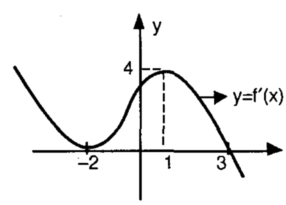
A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

23. *Koordinat eksenlerini A(0, 2), B(–1, 0), C(3, 0) noktalarında kesen şekildeki üçüncü dereceden f polinom fonksiyonu için* **f(1) kaçtır?**



A) $\frac{16}{9}$ B) $\frac{15}{11}$ C) $\frac{9}{16}$ D) $\frac{16}{25}$ E) $\frac{25}{16}$

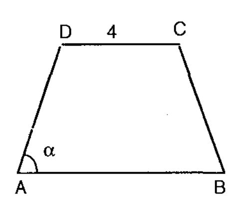
24.



Şekilde $y = f'(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **Aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır?</u>**

A) f(x) in x = 3 de yerel maximumu vardır.
B) (–2, 3) aralığında f(x) artandır.
C) $f''(1) = 0$ dır.
D) (–2,0) aralığında f(x) in çukurluk yönü yukarıya doğrudur. (Konveks)
E) f(x) in x = –2 de yerel minimumu vardır.

25. Şekildeki ABCD dörtgeninde, [AB]//[DC], |CD|= 2|AD|= 4 br, |AD|=|BC| ve $m(\widehat{DAB})= \alpha$ dır.



cosα nın hangi değeri için ABCD yamuğunun alanı <u>en büyüktür?</u>

A) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$
D) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

TÜREV

TEST 16

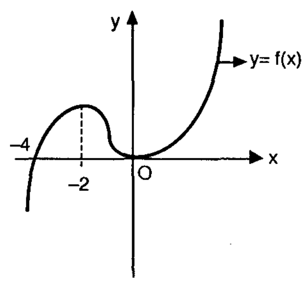
1. $f(x) = \cos^4(2x) - \sin^4(2x)$ ise
$f'\left(\frac{\pi}{16}\right)$ **değeri kaçtır?**

A) $-\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $-2\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{2}$ E) $-\sqrt{3}$

2. $f(x) = (2x^3 + 3x^2)e^{-2x}$ ise
$e^{2x}\dfrac{df(x)}{dx}$ **ifadesi eşiti nedir?**

A) $3(x^2 + x)$ B) $x^3 + x^2$
C) $2(3x - 2x^3)$ D) $6(x^2 + x)e^{2x}$
E) $(x^2 + x)e^{2x}$

3.



Şekilde y= f(x) fonksiyonunun grafiği çizilmiştir.
Aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) $f'(-4)= 0$ B) $f''(-4)>0$ C) $f''(1)>0$
D) $f'(1)<0$ E) $f''(0)= 0$

4. $x = 2t + 1$
$y = 3t^2 - t + 2$ şeklinde tanımlanan $y = f(x)$ fonksiyonu için **f′(3) nedir?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) 3 D) $\frac{17}{2}$ E) $\frac{7}{4}$

5. $f(x) = \log_2(\ln x)$ ve $g(x) = \ln(\log_2 x)$ ise
$\dfrac{f'(e)}{g'(2)}$ **oranı kaçtır?**

A) 2 B) $\frac{2}{e}$ C) $\frac{1}{2e}$ D) $\frac{1}{e}$ E) $\frac{e}{2}$

6. $f(x)= x^4-8x^2+m$ fonksiyonunun ekstremum değerleri pozitif olduğuna göre, **m aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

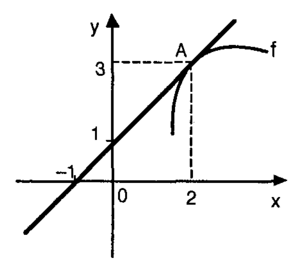
7. $y = x^3$ eğrisine (–2, –8) noktasından çizilen teğetin **y– eksenini kestiği noktanın ordinatı kaçtır?**

A) 16 B) 18 C) 20 D) 25 E) 32

8. $y = x^2 - 4x$ parabolüne başlangıç noktasında teğet olan doğrunun denklemi **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $y = -x$ B) $y = -2x$ C) $y = -3x$
D) $y = -4x$ E) $y = -\frac{3}{2}x$

9. Şekilde f fonksiyonunun A(2,3) noktasındaki teğeti x– eksenini (–1,0) noktasında kesiyor.



$g(x) = \dfrac{f(x)}{2x+1}$ ise
g′(2) nedir?

A) $-\frac{15}{4}$ B) $-\frac{4}{9}$ C) $-\frac{1}{25}$
D) $\frac{1}{25}$ E) $\frac{15}{4}$

10. $y = \sqrt{x}$ eğrisi üzerindeki noktalardan hangisi $P\left(\frac{5}{2},0\right)$ **noktasına en yakındır?**

A) (2,0) B) (1,1) C) (4,2)
D) $(2,\sqrt{2})$ E) (2,4)

11. $y = x^3 - x$ eğrisine A(–1,a) noktasınan çizilen teğet eğriyi A dan farklı bir B noktasında kesiyor. **B nin apsisi kaçtır?**

A) $3\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}$ D) 2 E) 1

12. $f(x) = |x^3 - x|$ olduğuna göre,
$f'(\sqrt{2}) + f'(0^+) + f'(1^-)$ **toplamı kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

13. $x^2 - y^2 = 1$ kapalı fonksiyonunda

$(x,y) = (\sqrt{2},1)$ için $\frac{d^2y}{dx^2}$ **kaçtır?**

A) 1 B) –1 C) 0 D) 2 E) $\frac{1}{2}$

14. $x^2 - y^2 - 3x - 2y + 3 = 0$ eğrisinin **A(3,1) noktasındaki teğetinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $3x - 4y + 5 = 0$ B) $3x + 4y - 5 = 0$
C) $3x - 4y - 5 = 0$ D) $4x - 3y - 5 = 0$
E) $4x + 3y + 5 = 0$

15. $f(x) = 2x^3$ oduğuna göre, **f nin tersi f^{-1} fonksiyonunun (2,1) noktasındaki teğetinin eğimi nedir?**

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

16. $f(x) = [\![x]\!] + |x^2 - 4| + 2x$ ise $f'\left(\frac{3}{2}\right)$ **kaçtır?**

A) –1 B) $\frac{5}{2}$ C) 4 D) $\frac{4}{3}$ E) 3

17. $f(x) = (\cos x)^x$ ise **$f'(2\pi)$ kaçtır?**

A) $2\pi - \sqrt{3}$ B) 0 C) $1 - \sqrt{3}$
D) 1 E) $1 - 2\pi$

18. $y = x^3 + ax^2 + x + 1$ eğrisi üzerinde, apsisleri 1 ve –2 olan noktalardan çizilen teğetlerin birbirine paralel olması için **a kaç olmalıdır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 3

19. $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{x}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right)} \right)$ **değeri kaçtır?**

A) $-\infty$ B) –1 C) 0 D) 1 E) $+\infty$

20. $y = x^3 + mx^2 - 3x + n$ fonksiyonunun (1, 0) noktasında minimumu olması **için n kaç olmalıdır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

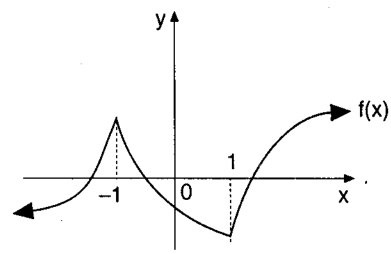
21. $f(x) = x^4 + mx^2 + nx + p$ fonksiyonunun $x = 2$ apsisli noktada yerel minimumu varsa, **n aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) 63 B) 64 C) 65 D) 66 E) 67

22. f(x), g(x) fonksiyonları (a,b) aralığında pozitif olarak tanımlı, f(x) artan ve g(x) azalan olduğuna göre, **aşağıdakilerden hangisi aynı aralıkta daima azalandır?**

A) $f(x) - g(x)$ B) $f(x) + g(x)$ C) $f(x) \cdot g(x)$
D) $\frac{f(x)}{g(x)}$ E) $\frac{g(x)}{f(x)}$

23.



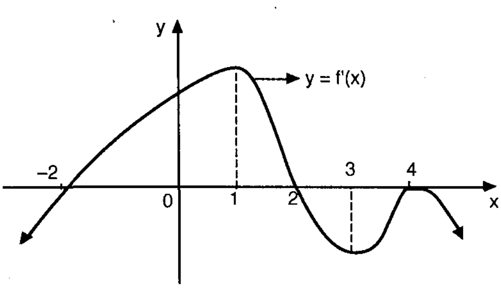
Grafiği yukarıda verilen f(x) fonksiyonu için **aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır?</u>**

A) $f(-1).f(1) < 0$ B) $f'(0) + f''(2) < 0$
C) $f''(-3) + f''(0) > 0$ D) $f'(-1) = 0$
E) $f'(-2) > 0$

24. f bir çift fonksiyondur. $f'(-1) + f'(1)$ toplamı **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $2f'(1)$ B) $f'(2)$ C) 0
D) $-2f'(1)$ E) $-f'(2)$

25.



Yukarıda f(x) fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir. **f(x) fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır?</u>**

A) x = 2 yerel maksimum noktasının apsisidir.
B) x = 4 yerel maksimum noktasının apsisidir.
C) x = 3 de büküm noktası vardır.
D) (1, 3) aralığında fonksiyon aşağı doğru konkavdır.
E) (–2,2) aralığında fonksiyon artandır.

TÜREV

TEST 17

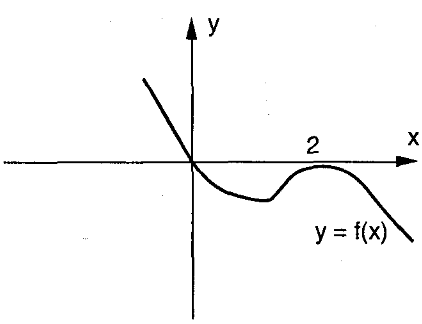
1. f(x), [a, b] aralığında pozitif olarak tanımlı ve azalandır.

Aşağıdakilerden hangisi aynı aralıkta daima azalandır?

A) $\dfrac{1}{f(x)}$ B) $\dfrac{1}{f^3(x)}$ C) $1-f(x)$

D) $f^2(x)$ E) $x^2-f(x)$

2.



Şekilde $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

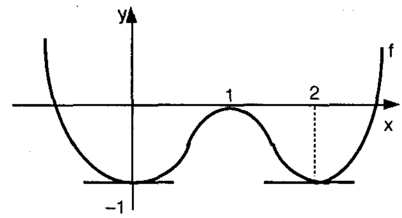
fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$a+b+c+d = -1$ **olduğuna göre f(x) yerel minumum değeri nedir?**

A) -1 B) $-\dfrac{25}{23}$ C) $-\dfrac{32}{27}$

D) $-\dfrac{65}{19}$ E) -2

3.



Yukarıdaki grafik **aşağıdaki fonksiyonlardan hangisine ait olabilir?**

A) $f(x) = (x+1)^2\,(x^2+2x-1)$

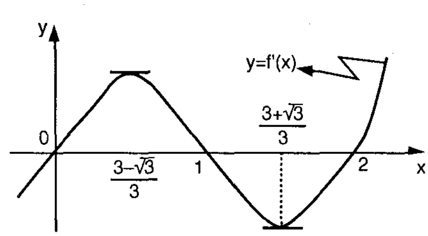
B) $f(x) = (x-1)^2\,(x^2-2x-1)$

C) $f(x) = (-x+1)\,(x^2+2x+1)$

D) $f(x) = (x+1)\,(x^2-2x-1)$

E) $f(x) = (x^2-x)\,(x^2+2x+1)$

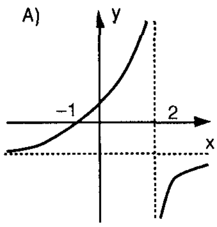
4.

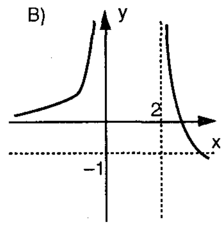


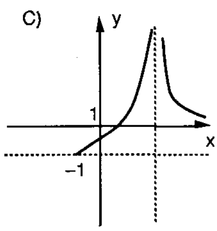
Yukarıdaki şekilde y = f(x) fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir. **y = f(x) fonksiyonunun yerel minimum noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?**

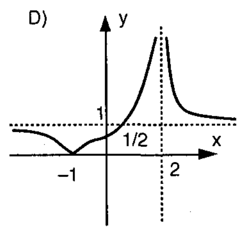
A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

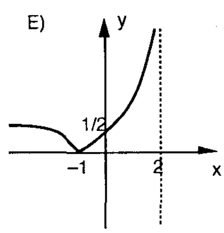
5. $f : R \to R$, $y = \left|\dfrac{x+1}{2-x}\right|$ **fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 

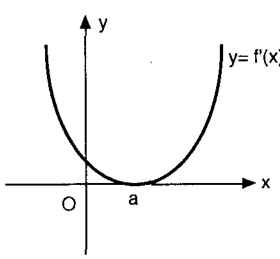
B) 

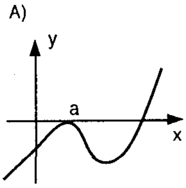
C) 

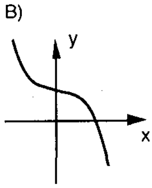
D) 

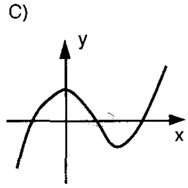
E) 

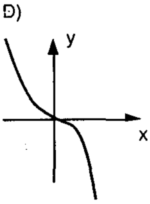
6. Yanda $y = f'(x)$ türev fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **Buna göre $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

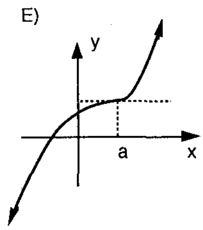


A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

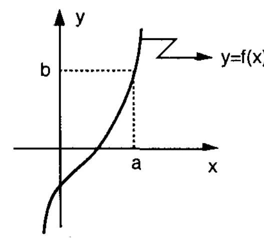
7. $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 5$ eğrisi **Ox eksenini kaç noktada keser?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8. Şekildeki $y = f(x)$ fonksiyonu için

$f'(a) = k$ ise

$(f^{-1})'(b)$ nedir?



A) $-k$ B) $\frac{-1}{k}$

C) $\frac{1}{k}$ D) k

E) 2

9. $y = \frac{1}{2}(x+1)^2(x-4)$ eğrisinin $(2, -9)$ noktasındaki teğetine paralel olan **teğetinin değme noktası aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{27}\right)$ B) $\left(\frac{-2}{3}, \frac{-7}{27}\right)$ C) $\left(\frac{-2}{3}, \frac{7}{27}\right)$

D) $(-2, 9)$ E) $(2, 9)$

10. $y = x - 2 + \dfrac{5}{x-3}$ fonksiyonunun **asimtotlarının kesim noktasının orijine uzaklığı kaç br dir?**

A) 5 B) $\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{5}$

D) $\sqrt{10}$ E) $2\sqrt{10}$

11. Aşağıdaki eğrilerden hangisi yatay asimptotu kesmez?

A) $y = \dfrac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^4 - 3x^2 + 9}$

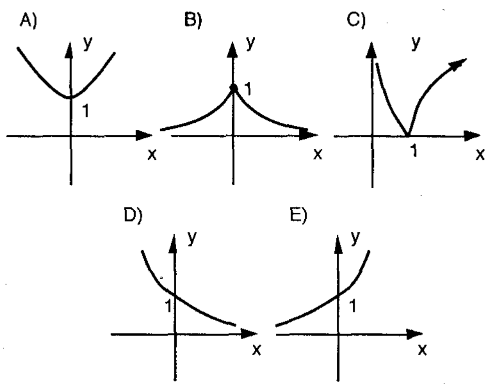
B) $y = \dfrac{x + 1}{x^2 - 3x - 8}$

C) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 2x - 1}$

D) $y = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 5x - 4}{x^3 - 6x^2 + 8x - 1}$

E) $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 + 2x^2 + 3x - 4}$

12. $y = \dfrac{1}{5^{|x|}}$ in **grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



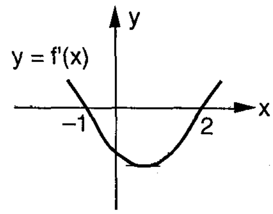
13. $f : (-\infty, 5) \to (-24, \infty)$

$f(x) = x^2 - 10x + 1$ fonksiyonu veriliyor.

$f^{-1}(x)$ **fonksiyonunun $x = 40$ noktasındaki teğetinin eğimi nedir?**

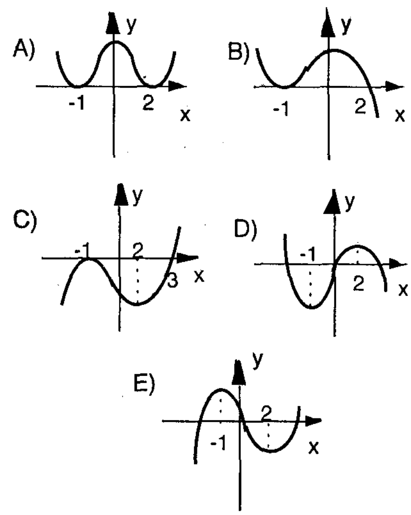
A) $\frac{-1}{32}$ B) $\frac{-1}{16}$ C) $\frac{-1}{8}$ D) $\frac{-1}{4}$ E) $\frac{1}{4}$

14.



Şekilde $y = f'(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Aşağıdakilerden hangisi $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği olabilir?



15. $y = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 4$ **fonksiyonuna çizilen teğetlerden eğimi en küçük olanının eğimi kaçtır?**

A) –9 B) –7 C) –6 D) –4 E) –3

İNTEGRAL

BÖLÜM 4

DİFERANSİYEL KAVRAMI

Tanım: **f: A → R fonksiyonu x ∈ A için türevlenebiliyor ise**

$\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ dir. $df(x) = f'(x).dx$ ifadesine f fonksiyonunun x ∈ A noktasındaki diferansiyeli denir.

f fonksiyonu ∀x ∈ A için diferansiyellenebiliyorsa f fonksiyonu A kümesinde diferansiyellenebilir denir.

y = f(x) fonksiyonunun diferansiyeli dy ise dy = f′(x).dx dir.

Başka bir deyişle bir fonksiyonun diferansiyeli o fonksiyonun türevi ile bağımsız değişkeninin çarpımına eşittir.

ÖRNEK $y = x^3 + 2x + 5$ ise **dy nedir?**

ÇÖZÜM $dy = (x^3 + 2x + 5)'.dx \Rightarrow dy = (3x^2 + 2).dx$ dir.

ÖRNEK $y = \cos^2 x$ ise **dy nedir?**

ÇÖZÜM $dy = (\cos^2 x)'.dx \Rightarrow dy = 2.\cos x(-\sin x).dx$

$\Rightarrow dy = -\sin 2x.dx$ dir.

ÖRNEK $u = t^3 + \sqrt{t}$ ise **du nedir?**

ÇÖZÜM $du = \left(t^3 + \sqrt{t}\right)' dt \Rightarrow du = \left(3t^2 + \frac{1}{2\sqrt{t}}\right) \cdot dt$ olur.

ÖRNEK $x = \sin\theta + \cos\theta$ ise **dx nedir?**

ÇÖZÜM $dx = (\sin\theta + \cos\theta)'.d\theta \Rightarrow dx = (\cos\theta - \sin\theta).d\theta$ olur.

Diferansiyel yardımıyla bazı sayıların yaklaşık değerleri hesaplanabilir.

KURAL: **Δx çok küçük ise $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \cong f(x) + \Delta x . f'(x)$ yazılabilir.**

ÖRNEK **$\sqrt{5}$ sayısının yaklaşık değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM $f(x) = \sqrt{x}$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonu için $\sqrt{x+\Delta x} \cong \sqrt{x} + \Delta x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ yazılabilir.

$x = 4$ ve $\Delta x = 1$ alınırsa; $\sqrt{5} = \sqrt{4+1} \cong 2 + 1 \cdot \dfrac{1}{2 \cdot 2} = 2 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{9}{4} = 2{,}25$

Daha yaklaşık değer bulmak istiyorsak Δx daha küçük seçilmelidir.

Örneğin; $x = 4{,}84$ ve $\Delta x = 0{,}16$ seçilirse,

$\sqrt{5} \cong 2{,}2 + 0{,}16 \cdot \dfrac{1}{2.4^2} = 2{,}236$ bulunur. Bu işlem $\Delta x \to 0$ yaklaştıkça daha kesin sonuç verir.

İNTEGRAL

Matematiğin temel kavramlarından biri olan integral kavramı, türevi veya diferansiyeli belli olan fonksiyonun ne olduğu sorusuna cevap aramaktan çıkmıştır.

$f(x) = x^2$ fonksiyonu verilsin. Hangi fonksiyonun türevi x^2 dir? sorusuna cevap aradığımızda $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ fonksiyonunun türevini aldığımızda $F'(x) = \dfrac{3x^2}{3} = x^2 = f(x)$ olduğu açıkça görülür.

Ancak;

$$F_1(x) = \frac{x^3}{3} + 5 \ , \ F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 7 \ , \ F_3(x) = \frac{x^3}{3} + \sqrt{3}$$

fonksiyonlarında olduğu gibi $C \in R$ olmak üzere;

$$\forall n \in N^+ \text{ için } F_n = \frac{x^3}{3} + C$$

fonksiyonlarının türevlerini aldığımızda,

$$F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = \cdots = F_n'(x) = x^2 \text{ olur.}$$

Görülüyor ki "hangi fonksiyonun türevi x^2 dir?" sorusunun cevabı tek değil, $C \in R$ keyfi olarak seçilebileceğinden sonsuz tanedir.

BİR FONKSİYONUN BELİRSİZ (SINIRSIZ) İNTEGRALİ

Tanım: $\int f(x)dx = F(x) + C \quad (C \in R)$ eşitliğinde $F'(x) = f(x)$ ise $F(x)$ 'e $f(x)$ in ilkeli ya da belirsiz integrali denir.

Burada f(x) e integrant (integrali alınacak fonksiyon) dx e integral değişkeni, C ye integral sabiti denir.

$\int$ sembolü, integral işaretidir.

bu sembol somme–sum(Toplam) sözcüğünün ilk harfi olan S nin bozulmuş şeklidir.

$\int 2x.dx = x^2 + C$ eşitliği doğrudur.

Çünkü, $(x^2 + C)' = 2x$ ve $d(x^2 + C) = 2x.dx$ dir.

Burada integrali alınacak fonksiyon (integrant) 2x, ilkel fonksiyon ya da belirsiz integral ise $x^2 + C$ dir.

Genel olarak; $\int f'(x).dx = f(x)$ yazılabilir.

Bu eşitlikte her iki yanın diferansiyeli alındığında,

$d\int f'(x)dx = df(x)$, $\quad d\int f'(x)dx = f'(x)dx$ olur.

$f'(x).dx = df(x)$ olduğundan, $\int df(x) = f(x)$ elde edilir.

açıkça görülür ki,

$\frac{d}{dx}$ ile $\int (\ldots)dx$

d ile $\int$ işlemleri birbirlerinin tersidir.

TEOREM : 1. $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$ belirsiz integralinin türevi integranta eşittir.

2. $d\left[\int f(x).dx\right] = f(x).dx$ belirsiz integralin diferansiyeli integral işareti altındaki ifadeye eşittir.

3. $\int df(x) = f(x) + C$ bir fonksiyonunun diferansiyelinin integrali, integranta sabit (C) eklenerek bulunur.

4. $\int [f(x) \mp g(x) \mp h(x) + \cdots]dx = \int f(x).d(x) \mp \int g(x).d(x) \mp \int h(x).d(x) \mp \cdots$ dır.

İki ya da daha fazla fonksiyonun cebirsel toplamının belirsiz integrali, fonksiyonların integrallerinin cebirsel toplamına eşittir.

5. $a \in R$ olmak üzere,

$\int a.f(x).dx = a\int f(x).dx$ integral işareti içindeki sabit çarpan integral işareti dışına çarpan olarak alınabilir.

ÖRNEK **Son verdiğimiz teoreme göre aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulunuz.**

a) $\frac{d}{dx}\int\left(x^3+7x\right)\cdot dx=?$ b) $\left[\int \cos^3(\ln x).dx\right]'=?$

c) $d\left[\int \frac{x+1}{2x+1}\cdot dx\right]=?$ d) $d\left[\int e^x\cdot x^3dx\right]=?$

e) $\int d\left[\left(\sin^3 x\right)\cdot dx\right]=?$ f) $\int d\left[\left(\log_3 x^2\right).dx\right]=?$

g) $\int\left(x^3+\sin x-e^x\right)dx=?$ h) $\int\left(\log_2 \sin x-\cos x+\frac{x+1}{2x+1}+\tan x\right)\cdot dx=?$

k) $\int 5(\sin x).dx=?$ l) $\int\sqrt{3}\left(\frac{x^2+5}{x^3+7}\right)\cdot dx=?$

ÇÖZÜM a) $\frac{d}{dx}\int\left(x^3+7x\right)\cdot dx=x^3+7x$ b) $\left[\int \cos^3.\ln x.dx\right]'=\cos^3\ln x$

c) $d\left[\int \frac{x+1}{2x+1}\cdot dx\right]=\frac{x+1}{2x+1}\cdot dx$ d) $d\left[\int e^x x^3dx\right]=e^x x^3dx$

e) $\int df(x)=f(x)+C$ olduğundan f) $\int d\left[\log_3 x^2.dx\right]=\log_3 x^2+C$

$\int d\left[\sin^3 x.dx\right]=\sin^3 x+c$

g) $\int\left(x^3+\sin x-e^x\right).dx=\int x^3.dx+\int \sin x.dx-\int e^x.dx$

h) $\int\left(\log_2 \sin x-\cos x+\frac{x+1}{2x+1}+\tan x\right).dx$

$=\int \log_2 \sin x.dx-\int \cos x.dx+\int\frac{x+1}{2x+1}dx+\int \tan x.dx$

k) $\int 5(\sin x).dx=5\int \sin x.dx$ e) $\int\sqrt{3}\left(\frac{x^2+5}{x^3+7}\right)\cdot dx=\sqrt{3}\int\frac{x^2+5}{x^3+7}\cdot dx$

TEMEL İNTEGRASYON FORMÜLLERİ

Bir fonksiyonun diferansiyeli veya türevi için standart kurallar vardır. Fakat integral hesabında genel bir kural yoktur. Her problem için özel bir işlem gerekir. Bu nedenle integral işleminde, işlemi çabuklaştırmak için temel integral formülleri veya standart integral formülleri elde edilmiştir. Bu formüller esasında **"neyin türevini alırsak, integrali alınacak ifadeyi verir?"** sorusunun yanıtlarından ibarettir. Biz burada bunlardan bazılarını liste halinde verip, bu listedeki kuralların doğruluğunun ispatını okuyucuya bırakıyoruz. İspat için okuyucunun yapacağı, eşitliğin sağ tarafının türevini alıp integrali alınacak ifadeye (integranta) eşit olduğunu göstermekten ibarettir.

ÖRNEK $\int \sin(2x+3)dx=\frac{-1}{2}\cdot\cos(2x+3)+C$ **olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM $\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{2}\cos(2x+3)+C\right]=\left(-\frac{1}{2}(-2)\right)\sin(2x+3)=\sin(2x+3)$

sin(2x + 3) integrant olduğu için işlemin doğru olduğu gösterilmiş olur.

TEMEL İNTEGRAL FORMÜLLERİ

1) $\int a\,du = au + C$

2) $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

3) $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

4) $\int e^u du = e^u + C$

5) $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$

6) $\int \cos u\,du = \sin u + C$

7) $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

8) $\int \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot du = \int \sec^2 u.du = \int (1+\tan^2 u).du = \tan u + C$

9) $\int \dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot du = \int \operatorname{cosec}^2 u.du = \int (1+\cot^2 u).du = -\cot u + C$

10) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot du = \arcsin u + C = -\arccos u + C$

11) $\int \dfrac{1}{1+u^2}\cdot du = \arctan u + C = -\operatorname{arccot} u + C$

12) $\int \sec u.du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

13) $\int \operatorname{cosec} u.du = \ln|\operatorname{cosec} u - \cot u| + C$

UYARI: Temel integral formülleri içinde kullandığımız u; u = x olabileceği gibi, u = f(x) gibi x in bir fonksiyonu da olabilir.

İNTEGRAL TANIMI VE TEMEL İNTEGRAL FORMÜLLERİ İLE ÇÖZÜLEBİLEN İNTEGRALLER

ÖRNEK $\int x^3 dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\int x^3.dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$$

ÖRNEK $\int (x^5 - 7x^2 + 8)dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\int (x^5 - 7x^2 + 8)dx = \int x^5dx - \int 7x^2dx + \int 8dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} - 7\cdot\frac{x^3}{3} + 8x + C$$

$$= \frac{x^6}{6} - \frac{7}{3}x^3 + 8x + C$$

ÖRNEK $\int \dfrac{x^3+2}{\sqrt{x}}\cdot dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\int \frac{x^3+2}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{x^3}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)\cdot dx = \int\left(x^3.x^{-\frac{1}{2}} + 2.x^{-\frac{1}{2}}\right).dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx + 2.\int x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + 2\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + C$$

ÖRNEK $\int\left(x^3+5x^2-7x\right)dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $$\int\left(x^3+5x^2-7x\right)dx=\int x^3dx+5\int x^2dx-7\int x.dx=\frac{x^{3+1}}{3+1}+5\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1}-7\frac{x^{1+1}}{1+1}+C$$
$$=\frac{x^4}{4}+\frac{5}{3}\cdot x^3-\frac{7}{2}x^2+C$$

ÖRNEK $\int\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+2\right)dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $$\int\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+2\right)dx=\int x^{\frac{2}{3}}dx+2\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int 2dx=\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+2x+C$$
$$=\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+2\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+2x+C=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x+C$$

ÖRNEK $\int(a+1)^3.da$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $$\int(a+1)^3.da=\int\left(a^3+3a^2+3a+1\right).da=\int a^3da+3\int a^2da+\int 3ada+\int 1da$$
$$=\frac{a^4}{4}+3\frac{a^3}{3}+3\cdot\frac{a^2}{2}+a+C=\frac{a^4}{4}+a^3+\frac{3a^2}{2}+a+C$$

ÖRNEK $\int\left(\frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\right)\cdot dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $$\int\frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\cdot dx=\int\left(\frac{x^3}{x^2}+\frac{5x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}\right)dx=\int\left(x+5-4.x^{-2}\right).dx$$
$$=\frac{x^2}{2}+5x-4\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+C=\frac{x^2}{2}+5x+\frac{4}{x}+C$$

ÖRNEK $\int\left(ax^3-bx^2-6x\right)\cdot dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $$\int\left(ax^3-bx^2-6x\right)\cdot dx=a\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{bx^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+C$$
$$=\frac{ax^4}{4}-\frac{bx^3}{3}-3x^2+C$$

ÖRNEK $\int\left(4\cdot 7^x+\frac{1}{x}+x^2\right)\cdot dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $$\int\left(4\cdot 7^x+\frac{1}{x}+x^2\right)\cdot dx=4\int 7^x dx+\int\frac{1}{x}\cdot dx+\int x^2dx=\frac{4.7^x}{\ln 7}+\ln|x|+\frac{x^3}{3}+C$$

ÖRNEK $\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{3}\right)^x}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{3}\right)^x} = \int \left(\frac{3}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\frac{3}{2}} + C$

ÖRNEK $I = \int \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 6e^x \right) dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $I = 2\int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + 6\int e^x dx = 2.\tan x + \arcsin x + 6e^x + C$ olur.

ÖRNEK $I = \int \tan^2 x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $I = \int \left(\tan^2 x + 1 - 1\right) dx$ yazılabilir.

$= \int \left(1 + \tan^2 x\right) dx - \int 1.dx$ olur. $\qquad d(\tan x) = \left(1 + \tan^2 x\right) dx$

$= \int d(\tan x) - \int 1 dx \qquad \int d(f(x)) = f(x) + c$

$= \tan x - x + C$ olur.

ÖRNEK $\int \sin 6x . \cos 6x . dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $2.\sin a.\cos a = \sin 2a$ olduğundan

$\sin 6x.\cos 6x = \frac{1}{2}\sin 12x$ ise $\int \frac{1}{2}\sin 12x dx = -\frac{1}{24}\cos 12x + C$

ÖRNEK $\int f'(x) dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $d(f(x)) = f'(x) dx$ dir. $\left(\int df(x) = f(x) + C \text{ olduğundan} \right)$

$\int f'(x).dx = \int d(f(x)) = f(x) + C$ olur.

ÖRNEK $\int f''(x) dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $d(f'(x)) = f''(x) dx$ dir.

$\int f''(x) dx = \int d(f'(x))$ olur. $\left(\int df(x) = f(x) + C \text{ olduğundan} \right)$

$= f'(x) + C$ bulunur.

ÖRNEK $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4$ ve $f(-1) = 6$ ise **f(1) kaçtır?**

ÇÖZÜM $\int f'(x)dx = \int df(x) = f(x) + C$ olduğundan $\int \left(4x^3 + 3x^2 - 4\right)dx = f(x)$

$4\cdot\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{3x^3}{3} - 4x + C = f(x) \Rightarrow f(x) = x^4 + x^3 - 4x + C$ olur.

$\Rightarrow f(-1) = 1 - 1 + 4 + C = 6 \Rightarrow C = 2$ olur.

Bu durumda $f(x) = x^4 + x^3 - 4x + 2$

$f(1) = 1 + 1 - 4 + 2 \Rightarrow f(1) = 0$ bulunur.

ÖRNEK $\int xf'(x)dx = \dfrac{x^4}{4} - 4x^3 + C$ ve $f(1) = \dfrac{1}{3}$ ise **f(x) nedir?**

ÇÖZÜM $\int xf'(x)dx = \dfrac{x^4}{4} - 4x^3 + C$ eşitliğinde her iki tarafın x e göre türevini alalım.

$\dfrac{d}{dx}\int x.f'(x)dx = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^4}{4} - 4x^3 + C\right)$ $\left(\dfrac{d}{dx}\int f(x) = f(x)\right)$ olduğundan

$x.f'(x) = x^3 - 12x^2 \Rightarrow f'(x) = x^2 - 12x$ olur.

$f'(x) = x^2 - 12x \Rightarrow f(x) = \int \left(x^2 - 12x\right)dx$

$f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 12\dfrac{x^2}{2} + C \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 6x^2 + C$ olur.

$f(1) = \dfrac{1}{3}$ ise $f(1) = \dfrac{1}{3} - 6 + C = \dfrac{1}{3} \Rightarrow C = 6$ olur.

$f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 6x^2 + 6$ bulunur.

ÖRNEK $f''(x) = x^2 - 1$ olmak üzere; $y = f(x)$ eğrisi $x + 12y - 13 = 0$ doğrusuna (1,1) noktasında teğet olduğuna göre, **f(x) i bulunuz.**

ÇÖZÜM $f''(x) = x^2 - 1 \Rightarrow \dfrac{d}{dx}f'(x) = x^2 - 1$ eşitliğin iki yanının x e göre integrali alınırsa

$\int \dfrac{d}{dx}f'(x) = \int \left(x^2 - 1\right)dx \Rightarrow f'(x) = \dfrac{x^3}{3} - x + C_1$ olur.

Eğrinin A(1,1) noktasındaki teğeti $x + 12y - 13 = 0$ olduğundan eğimi

$m = -\dfrac{1}{12}$ dir. O halde $f'(1) = \dfrac{-1}{12}$ olur.

$f'(1) = \dfrac{1}{3} - 1 + C_1 = -\dfrac{1}{12} \Rightarrow C_1 = \dfrac{7}{12}$

Bu durumda $f'(x) = \dfrac{x^3}{3} - x + \dfrac{7}{12}$ olur. Tekrar iki tarafın integralini alırsak,

$\int f'(x)dx = \int\left(\dfrac{x^3}{3} - x + \dfrac{7}{12}\right)dx \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{7}{12}x + C_2$ olur.

Eğri A(1,1) noktasından geçtiğine göre, $f(1) = 1$ dir.

$f(1) = \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{12} + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = \dfrac{5}{6}$ olur.

O halde, $f(x) = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{7}{12}x + \dfrac{5}{6}$ bulunur.

ÖRNEK $y = f(x)$ fonksiyonunun herhangi bir $A(x,y)$ noktasındaki teğetinin eğimi: $m = 2x$ ve $f(1) = 5$ olduğuna göre **f(5) kaçtır?**

ÇÖZÜM $A(x,y)$ noktasındaki teğetin eğimi $m = 2x$ ise $f'(x) = 2x$ dir.

$\int f'(x)dx = f(x) + C$ olduğundan $f(x) = \int 2x dx = \frac{2x^2}{2} + C$

$f(x) = x^2 + C$ olur. $f(1) = 5$, $f(1) = 1 + C = 5 \Rightarrow C = 4$

$f(x) = x^2 + 4$ ve $f(5) = 5^2 + 4 = 29$ bulunur.

ÖRNEK $y = f(x)$ için $dy = (2x + 1)dx$ ve $f(1) = 7$ veriliyor. Buna göre, **f(3) kaçtır?**

ÇÖZÜM $dy = (2x+1)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x + 1$ dir.

$\int f'(x)dx = f(x) + C$ olduğundan

$f(x) = \int f'(x)dx = \int (2x+1)dx = \frac{2x^2}{2} + x + C$

$f(x) = x^2 + x + C$

$f(1) = 1 + 1 + C = 7 \Rightarrow C = 5$

$f(x) = x^2 + x + 5$

$f(3) = 3^2 + 3 + 5 = 17$

ÖRNEK $f: R \to R$, $y = f(x)$ fonksiyonu için $f''(x) = 4$ ve $f(x)$ fonksiyonun $(0,4)$ noktasındaki teğetin eğimi 2 ise **f(1) kaçtır?**

ÇÖZÜM $\int f''(x)dx = \int df'(x) = f'(x) + C$ dir. O halde,

$f'(x) = \int 4dx = 4x + C$ olur. f nin $(0,4)$ noktasındaki teğetinin eğimi 2 ise $f'(0) = 2$ dir.

$f'(x) = 4x + C_1$

$f'(0) = 0 + C_1 = 2$, $C_1 = 2$ olur.

$f'(x) = 4x + 2$ olur.

$\int f'(x)dx = \int d(f(x)) = f(x)$ ise

$f(x) = 2x^2 + 2x + C_2$ f nin $(0,4)$ noktasındaki teğetinden söz edildiğinden $f(0) = 4$ olur.

$f(0) = 0 + 0 + C_2 = 4 \Rightarrow C_2 = 4$ olur.

$f(x) = 2x^2 + 2x + 4$ olur.

$f(1) = 2 + 2 + 4 \Rightarrow f(1) = 8$ bulunur.

AŞAĞIDAKİ İNTEGRALLERİ HESAPLAYINIZ

SORULAR	YANITLAR
1) $\int\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx=?$	$-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}+C$
2) $\int\left(x^2-x-2\right)dx=?$	$\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}x^2-2x+C$
3) $\int\left(3x^2-1\right)^2dx=?$	$\frac{9x^5}{5}-2x^3+x+C$
4) $\int\left(x^2-x^3\right)dx=?$	$\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+C$
5) $\int\left(x^{-2}+x^{-1}+x+x^2\right)dx=?$	$\frac{2x^4+3x^3-6}{6x}+\ln\|x\|+C$
6) $\int\left[6e^x-x^3\left(\sqrt{x}+1\right)\right]dx=?$	$6e^x-\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}-\frac{1}{4}x^4+C$
7) $\int\frac{\sqrt{x}}{x}dx=?$	$2\sqrt{x}+C$
8) $\int x(x-1)^2dx=?$	$\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C$
9) $\int\sqrt{\frac{a}{x}}dx=?$	$2\sqrt{ax}+C$
10) $\int\left(x^3-6x^2+8x\right)dx=?$	$\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2+C$
11) $\int(2-\cos x)dx=?$	$2x-\sin x+C$
12) $\int\frac{x^3+2x^2+1}{\sqrt{x}}dx=?$	$\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$
13) $\int e^x\cdot\sin e^x dx=?$	$-\cos e^x+C$
14) $\int\left(5x^4-3x^2-1\right)dx=?$	x^5-x^3-x+C
15) $\int\left(3e^x+\frac{2x}{3+x^2}\right)dx=?$	$3e^x+\ln\left(x^2+3\right)+C$
16) $\int\left(5x^2+\frac{1}{x}+3\right)dx=?$	$\frac{5}{3}x^3+\ln\|x\|+3x+C$
17) $\int\left(3\cdot2^x+4x^3+\frac{1}{x}\right)dx=?$	$\frac{3\cdot2^x}{\ln2}+x^4+\ln\|x\|+C$

İNTEGRAL ALMA YÖNTEMLERİ

Bir fonksiyonun integralini alırken integral formüllerine uymadığı durumlarda bazı yöntemlerle bu formüllere uyacak durumlara getirilir.

DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME YÖNTEMİ

f, u nun bir fonksiyonu

u, x in bir fonksiyonu ve

f ve u türevlenebilen iki fonksiyon olmak üzere,

$I_1 = \int f(u(x)).\,u'(x).\,dx$ integralinde,

$t = u(x)$ seçilirse

$dt = u'(x)dx$ olur. I_1 de yerine yazılırsa

$I_2 = \int f(t)dt = F(t) + C = F(t) + C = F(u(x)) + C$ bulunur.

I_1 integrali x değişkeni ile verildiğinde temel integral formülleri ile bulunamıyor ise I_2 integraline dönüştürülür ve t değişken kabul edilerek integral alınır.

ÖRNEK $I = \int f^n(x).f'(x)dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM Temel integral formülleri içersinde I integraline uyan yoktur. Bu yüzden değişken değiştirmesi yapacağız.

$u = f(x)$ değişken değiştirmesini alalım. Her iki yanın diferansiyelini alırsak,

$du = d(f(x)) \Rightarrow du = f'(x).dx$ olur.

$\int \underbrace{f^n(x)}_{u}.\underbrace{f'(x)dx}_{du} = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ olur. $u = f(x)$ değerini yerine yazarsak,

$= \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$ bulunur.

UYARI: Belirsiz integralde değişken değiştirme yöntemi uygulandıktan sonra sonucun ilk değişken türünden yazılması gerekir.

ÖRNEK $\int \frac{f''(x)}{f'(x)}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $t = f'(x)$ değişken değiştirmesi yapalım ve iki tarafın diferansiyelini alalım.

$dt = d\,(f'(x))$

$dt = f''(x).dx$ olur.

$\int \frac{\overbrace{f''(x)\,dx}^{dt}}{\underbrace{f'(x)}_{t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$

$t = f'(x)$ yerine yazılarak $= \ln|f'(x)| + C$ bulunur.

UYARI: $\int f(x)dx = F(x) + C$ ise

1) $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$

2) $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$

3) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ olur.

Uyarı ile bazı integralleri değişken değiştirme yöntemi uygulamadan hemen alabiliriz.

ÖRNEK $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b|$ **olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM $t = ax + b$ seçilir ve iki tarafın diferansiyelini alırsak

$dt = d(ax+b)$

$dt = a.dx$

$dx = \frac{dt}{a}$ olur.

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \text{ olur.}$$

ÖRNEK a) $\int \frac{dx}{3x+7}$ b) $\int \frac{2dx}{5x+4}$ c) $\int \frac{\sqrt{3}dx}{x-1}$

ÇÖZÜM **a)** $u = 3x + 7$ değişken değiştirmesi yapılarak

$du = d(3x+7)$

$du = 3dx$

$dx = \frac{du}{3}$

$$\int \frac{\overbrace{dx}^{\frac{du}{3}}}{\underbrace{3x+7}_{u}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|\overbrace{u}^{3x+7}| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x+7| + C \text{ olur.}$$

b) $t = 5x + 4$ seçilirse

$dt = d(5x+4)$

$dt = 5dx$

$dx = \frac{dt}{5}$

$$\int \frac{2dx}{5x+4} = \int \frac{2dt}{5t} = \frac{2}{5}\int \frac{dt}{\underbrace{t}_{5x+4}}$$

$$= \frac{2}{5}\ln|5x+4| + C \text{ olur.}$$

c) $t = x - 1$ seçilirse

$dt = dx$

$$\int \frac{\sqrt{3}dx}{x-1} = \int \frac{\sqrt{3}dt}{t} = \sqrt{3}\int \frac{dt}{t} = \sqrt{3}\ln|t| + C$$

$$= \sqrt{3}\ln|x-1| + C$$

ÖRNEK

$\int \frac{axdx}{bx^2+d} = \frac{a}{2b}\ln\left|bx^2+d\right| + C$ **olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM

$u = bx^2 + d$

$du = 2bxdx$

$xdx = \frac{du}{2b}$ olur.

$$\int \frac{axdx}{bx^2+d} = \int \frac{a\frac{du}{2b}}{u} = \frac{a}{2b}\int \frac{du}{u} = \frac{a}{2b}\ln\left|bx^2+d\right| + C \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

a) $\int \frac{3x}{x^2+1}dx$ b) $\int \frac{10x}{5x^2-7}dx$ c) $\int \frac{xdx}{x^2+17}$ d) $\int \frac{13xdx}{\sqrt{3}x^2+6}$

integrallerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) $u = x^2 + 1$

$du = 2xdx$

$xdx = \frac{du}{2}$

$$\int \frac{3\overbrace{xdx}^{\frac{du}{2}}}{\underbrace{5x^2-7}_{u}} = \frac{3}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{3}{2}\ln \overbrace{|u|}^{x^2+1} + C$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C \quad \text{olur.}$$

b) $t = 5x^2 - 7$

$dt = 10xdx$

$$\int \frac{\overbrace{10x}^{dt}}{\underbrace{5x^2-7}_{t}}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|$$

$$= \ln\left|5x^2-7\right| + C \text{ olur.}$$

c) $u = x^2 + 17$

$du = 2xdx$

$xdx = \frac{du}{2}$

$$\int \frac{\overbrace{xdx}^{\frac{du}{2}}}{\underbrace{x^2+17}_{u}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+17\right) + C \text{ olur.}$$

d) $t = \sqrt{3}x^2 + 6$

$dt = 2\sqrt{3}xdx$

$xdx = \frac{dt}{2\sqrt{3}}$

$$\int \frac{13\overbrace{xdx}^{\frac{dt}{2\sqrt{3}}}}{\underbrace{\sqrt{3}x^2+6}_{t}} = \frac{13}{2\sqrt{3}}\int \frac{dt}{t} = \frac{13}{2\sqrt{3}}\ln|t|$$

$$= \frac{13}{2\sqrt{3}}\ln\left(\sqrt{3}x^2+6\right) + C \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$\int \cos\left(\frac{x}{2}+3\right)dx$

integralini bulunuz.

ÇÖZÜM

$u = \frac{x}{2} + 3$ alınırsa

$du = d\left(\frac{x}{2}+3\right)$

$du = \frac{1}{2}dx$

$du = \frac{dx}{2}$

$$\int \cos\underbrace{\left(\frac{x}{2}+3\right)}_{u}\underbrace{dx}_{2du} = \int 2\cos u du$$

$$= 2\sin u + C$$

$$= 2\sin\underbrace{\left(\frac{x}{2}+3\right)}_{u} + C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$ **olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM $\int e^u du = e^u + C$ kuralı uygulamak için $u = ax + b$ seçilirse,

$du = adx \Rightarrow dx = \frac{du}{a}$ olur.

$$\int e^{\overbrace{ax+b}^{u}}\underbrace{dx}_{\frac{du}{a}} = \int e^u\frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int e^u du = \frac{1}{a}e^{\overbrace{u}^{ax+b}} + C = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\int e^{5x}dx$ in **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}$ olduğunu görmüştük. Buna göre $\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C$ olur.

ÖRNEK $\int \sin(ax+b)dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM–1 Uyarı 3 e göre çözüm yapılırsa, $\int \sin x dx = -\cos x + C$ dir.

f yerine sin, F yerine cos gelmiştir.

$\int \sin(ax+b) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$ olur.

ÇÖZÜM–2 u = ax + b değişken değiştirmesi yapılırsa

du = d(ax + b)

$du = adx \Rightarrow dx = \frac{du}{a}$ olur.

$$\int \sin(\underbrace{ax+b}_{u})\underbrace{dx}_{\frac{du}{a}} = \int \sin u\frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int \sin u du$$

$$= -\frac{1}{a}\cos u + C$$

$u = ax + b$ olduğundan $= -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$ olur.

ÖRNEK $\int 4\sin(4x-7)dx$ in **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\int 4\sin(4x-7)dx = 4\int \sin(4x-7)dx$ olur.

uyarıya göre, $= 4\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\cos(4x-7) + C$

$= -\cos(4x-7) + C$ olur.

ÖRNEK $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\cdot\sin(ax+b)$ **olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM uyarıya göre f yerine cos, F yerine sin gelmiştir.

$\int \cos x = \sin x + C$ olduğundan $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

ÖRNEK $\int 8x\sqrt{4x^2+5}\,dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$t = 4x^2 + 5$

$dt = d(4x^2 + 5)$

$dt = 8xdx$

$$\int \underbrace{\sqrt{4x^2+5}}_{t}\,\underbrace{8xdx}_{dt} = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$= \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\left(4x^2+5\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

ÖRNEK $\int (x+1)\left(x^2+2x-1\right)^{10}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$t = x^2 + 2x - 1$

$dt = d(x^2 + 2x - 1)$

$dt = (2x + 2)dx$

$dt = 2(x + 1)dx$

$(x+1)dx = \frac{dt}{2}$ olur.

$$\int \underbrace{(x^2+2x-1)}_{t}{}^{10}\underbrace{(x+1)dx}_{\frac{dt}{2}} = \frac{1}{2}\int t^{10}dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{11}}{11} + C$$

$$= \frac{1}{22}\left(x^2+2x-1\right)^{11} + C$$

ÖRNEK $\int x\sqrt[4]{\left(x^2+1\right)^3}\,dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$t = x^2 + 1$

$dt = 2xdx$

$xdx = \frac{dt}{2}$

$$\int \sqrt[4]{(\underbrace{x^2+1}_{t})^3}\,\underbrace{xdx}_{\frac{dt}{2}} = \frac{1}{2}\int \sqrt[4]{t^3}\,dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{3}{4}}dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} - C$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\cdot\left(x^2+1\right)^{\frac{7}{4}} + C = \frac{2}{7}\cdot\left(x^2+1\right)^{\frac{7}{4}} + C \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$t = 5 - x$

$dt = -1.dx$

$dt = -dx$

$$\int \frac{-dt}{\sqrt{t}} = -\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -2\sqrt{5-x} + C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\int \frac{x+3}{x^2+6x}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$u = x^2 + 6x$

$du = (2x+6)dx$

$du = 2(x+3)dx$

$(x+3)dx = \frac{du}{2}$

$$\int \frac{x+3}{x^2+6x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$
$$= \frac{1}{2}\ln|u| + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+6x| + C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\int \tan x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$u = \cos x$ denirse, $du = -\sin x dx$ olur.

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int -\frac{du}{u} = -\ln|u| = -\ln|\cos x| + C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\int \sin^3 x.\cos x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$u = \sin x$ denirse,

$du = \cos x dx$ olur.

$$\int \sin^3 x.\cos x dx = \int u^3 du$$
$$= \frac{u^4}{4} + C$$
$$= \frac{\sin^4 x}{4} + C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\int \frac{\sin 2x}{5+\sin^2 x}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$u = 5 + \sin^2 x$ denirse,

$du = 2.\sin x.\cos x$

$du = \sin 2x$ olur.

$$\int \frac{\sin 2x}{5+\sin^2 x}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$
$$= \ln\left(5+\sin^2 x\right) + C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\int \frac{\sin x}{2+\cos x}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$u = 2 + \cos x$ denirse

$du = -\sin x.dx$ olur.

$$\int \frac{\sin x dx}{2+\cos x} = \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + C$$
$$= -\ln|2+\cos x| + C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\int \frac{3}{x\ln x}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $t=\ln x$ denirse

$dt=\frac{1}{x}dx$ olur.

$$\int \frac{3}{x\ln x}dx = 3\int \frac{1}{x\ln x}\cdot dx$$
$$= 3\cdot\int \frac{dt}{t} = 3\ln|t| = 3\ln(\ln x)+C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\int \frac{(\ln x)^5}{x}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $t=\ln x$ denirse,

$dt=\frac{1}{x}dx$ olur.

$$\int \frac{(\ln x)^5}{x}dx = \int t^5dt = \frac{t^6}{6}+C$$
$$= \frac{1}{6}(\ln x)^6 + C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $t=\frac{1}{x^2}$ denirse

$dt=-\frac{2}{x^3}dx$

$-\frac{dt}{2}=\frac{1}{x^3}dx$ olur.

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx = \int e^t\cdot\left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\int e^t dt$$
$$= -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{x^2}} + C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\int (e^x+1)^3\cdot e^x.dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $t=e^x+1$ denirse,

$dt=e^xdx$ olur.

$$\int (e^x+1)^3 e^xdx = \int t^3.dt = \frac{t^4}{4}+C$$
$$= \frac{(e^x+1)^4}{4}+C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $t=e^{2x}+3$ denirse,

$dt=2e^{2x}dx$

$e^{2x}dx=\frac{dt}{2}$ olur.

$$\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+3} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t|+C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+3\right|+C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+3\right)+C \text{ olur.}$$

($\forall x\in R$ için $e^{2x}+3>0$ olduğundan mutlak değere gerek yoktur .)

ÖRNEK $\int e^x \cot\left(e^x\right)dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$u = e^x$ olsun.

$du = e^x dx$ olur.

$$\int e^x \cot\left(e^x\right)dx = \int \cot u\,du$$

$$= \int \frac{\cos u}{\sin u}du \text{ olur.}$$

$$\int \frac{\cos u}{\sin u}du = \ln|\sin u| + C = \ln\left|\sin e^x\right| + C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\int \frac{1}{x\sin^2(\ln x)}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$t = \ln x$ seçilirse,

$dt = \frac{1}{x}dx$ olur.

$\left(\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C\right.$ idi
temel integral formüllerinden$\left.\right)$

$$\int \frac{1}{x\sin^2(\ln x)}dx = \int \frac{1}{\sin^2 t}dt \text{ olur.}$$

$$= -\cot t + C$$

$$= -\cot(\ln x) + C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\int \tan^2 x \cdot \sec^2 x \cdot dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$u = \tan x$ seçilirse,

$du = \frac{1}{\cos^2 x}dx = \sec^2 x dx$ olur.

$$\int \tan^2 x \cdot \sec^2 \cdot dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x + C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\int e^{\tan 2x}\sec^2 2x \cdot dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$u = \tan 2x$ seçilirse,

$du = 2\left(1 + \tan^2 2x\right)dx \qquad \left(1 + \tan^2 2x = \sec^2 2x\right)$

$du = 2\sec^2 2x.dx$

$\sec^2 2x \cdot dx = \frac{du}{2}$

$$\int e^{\tan 2x}\sec^2 2x \cdot dx = \int \frac{1}{2}e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{\tan 2x} + C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $u=\sqrt{x}$ seçilirse,

$du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$2du=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ olur.

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=2\int e^u du$$

$$=2e^u+C$$

$$=2e^{\sqrt{x}}+C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{9\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}}=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}$$

$\frac{x}{3}=u \Rightarrow \frac{1}{3}dx=du$

$dx=3du$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{3du}{\sqrt{1-u^2}}=\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$=\arcsin u+c=\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)+C \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{1-1+2x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x^2-2x+1)}}=\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} \text{ olur.}$$

$u=x-1$ seçilirse,

$du=dx$

$$=\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\arcsin u+C=\arcsin(x-1)+C \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK $\int \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $20+8x-x^2=36-16+8x-x^2=36-(x^2-8x+16)$

$=36-(x-4)^2$ dir.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{36-(x-4)^2}} \text{ olur.}$$

$$=\int \frac{dx}{\sqrt{36\left[1-\frac{(x-4)^2}{36}\right]}}=\frac{1}{6}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-4}{6}\right)^2}} \text{ olur.}$$

$u=\frac{x-4}{6}$

$du=\frac{1}{6}dx$

$dx=6du$

$$=\frac{1}{6}\int \frac{6du}{\sqrt{1-u^2}}=\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$=\arcsin(u)+C$$

$$=\arcsin\left(\frac{x-4}{6}\right)+C \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK $I=\int \dfrac{dx}{\sqrt{28-12x-x^2}}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $28-12x-x^2=64-36-12x-x^2=64-(x^2+12x+36)=64-(x+6)^2$

$I=\int \dfrac{dx}{\sqrt{64-(x+6)^2}}$ olur.

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{64\left(1-\dfrac{(x+6)^2}{64}\right)}}=\frac{1}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x+6}{8}\right)^2}} \text{ olur.}$$

$u=\dfrac{x+6}{8}$

$du=\dfrac{1}{8}dx$

$dx=8du$ olur.

$$=\frac{1}{8}\int \frac{8du}{\sqrt{1-u^2}}=\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\arcsin u+C$$

$$=\arcsin\left(\frac{x+6}{8}\right)+C \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK $I=\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}=\dfrac{1}{b}\arcsin\left(\dfrac{b}{a}x\right)+C$ **olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM $u=\dfrac{b}{a}x$ seçilirse

$du=\dfrac{b}{a}dx$

$dx=\dfrac{a}{b}du$ olur.

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{a^2\left(1-\dfrac{b^2}{a^2}x^2\right)}}=\frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\dfrac{b}{a}x\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{a}\int \frac{\frac{a}{b}du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{b}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{b}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$=\frac{1}{b}\arcsin u+C$$

$$=\frac{1}{b}\arcsin \frac{b}{a}x+C \quad \text{olur.}$$

$\boxed{\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}=\dfrac{1}{b}\arcsin\left(\dfrac{b}{a}x\right)+C}$ olduğu görülür

ÖRNEK $I=\int \dfrac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $u=x^3 \Rightarrow du=3x^2dx \Rightarrow x^2dx=\dfrac{du}{3}$

$$I=\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-(x^3)^2}}$$

$$I=\int \frac{\frac{du}{3}}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{3}\arcsin(u)+C$$

$$=\frac{1}{3}\arcsin(x^3)+C \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK $I=\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{9-x^2}}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $$I=\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{9-x^2}}=\underbrace{\int \frac{2xdx}{\sqrt{9-x^2}}}_{I_1}+\underbrace{\int \frac{3dx}{\sqrt{9-x^2}}}_{I_2}$$

$$I_1=\int \frac{2xdx}{\sqrt{9-x^2}} \quad \text{için} \quad u=9-x^2 \Rightarrow du=-2xdx \Rightarrow -xdx=\frac{du}{2}$$

$$=\int \frac{-du}{\sqrt{u}}=-\int u^{-\frac{1}{2}}du=-2\cdot u^{\frac{1}{2}}+C_1=-2\sqrt{9-x^2}+C_1$$

$$I_2=3\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} \qquad \left(\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\left(\frac{u}{a}\right)+C \text{ ye göre}\right)$$

$$=3.\arcsin\frac{x}{3}+C_2$$

$$I=I_1+I_2=-2\sqrt{9-x^2}+3\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)+C \text{ bulunur.}$$

KURAL: **$a\in R$ ve u, x in bir fonksiyonu olmak üzere** $I=\int \frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right)+C$

İSPAT: $\int \frac{du}{1+u^2}=\arctan u+C$ olduğunu biliyoruz.

İntegrantın paydasını $(1+u^2)$ şeklinde yazmalıyız.

$$I=\int \frac{du}{a^2\left(1+\frac{u^2}{a^2}\right)}=\frac{1}{a^2}\int \frac{du}{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2} \text{ olur.}$$

$t=\frac{u}{a}$

$dt=\frac{1}{a}du$

$du=a\cdot dt$ olur

$$=\frac{1}{a^2}\int \frac{a\cdot dt}{1+t^2}=\frac{1}{a^2}\cdot a\int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$=\frac{1}{a}\arctan(t)+C$$

$$=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right)+C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $I=\int \frac{dx}{9+x^2}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $$I=\int \frac{dx}{9+x^2}=\int \frac{dx}{3^2+x^2}=\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+C$$

ÖRNEK $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\int \frac{dx}{x^2-6x+10} = \int \frac{dx}{\left(x^2-6x+9\right)+1} = \int \frac{dx}{1+(x-3)^2}$

$u = x-3$

$du = dx$

$= \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan(x-3)+C$ bulunur.

ÖRNEK $\int \frac{dx}{x^2-4x+13}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\int \frac{dx}{x^2-4x+13} = \int \frac{dx}{\left(x^2-4x+4\right)+9} = \int \frac{dx}{9+(x-2)^2} = \int \frac{dx}{9\left[1+\frac{(x-2)^2}{9}\right]}$

$u = \frac{x-2}{3}$

$du = \frac{dx}{3}$

$dx = 3du$

$= \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x-2}{3}\right)^2} = \frac{1}{9}\int \frac{3du}{1+u^2} = \frac{3}{9}\int \frac{du}{1+u^2}$

$= \frac{1}{3}\arctan(u)+C = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right)+C$

ÖRNEK $I = \int \frac{2x-8}{x^2+9}dx$ **in integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $I = \int \frac{2x-8}{x^2+9}dx = \int\left(\frac{2x}{x^2+9} - \frac{8}{x^2+9}\right)dx = \underbrace{\int \frac{2x}{x^2+9}dx}_{I_1} - 8\underbrace{\int \frac{dx}{x^2+9}}_{I_2}$

$I_1 = \int \frac{2x}{x^2+9}dx \Rightarrow I_1 = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

$= \ln(x^2+9)+C$

$u = x^2+9$

$du = 2xdx$

$I = I_1 + I_2$

$= \ln(x^2+9) - \frac{8}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C$ olur.

$u = \frac{x}{3} \Rightarrow du = \frac{1}{3}dx \Rightarrow dx = 3du$

$I_2 = -8\int \frac{dx}{x^2+9} = -8\int \frac{dx}{3^2+x^2}$

$= -\frac{8}{3}\arctan\frac{x}{3}+C$

ÖRNEK $I = \int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\frac{1}{e^x+e^{-x}} = \frac{1}{e^x+\frac{1}{e^x}} = \frac{1}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}} = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$ olur.

$I = \int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$ olur. $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$ olur. $\left(e^{2x} = u^2\right)$

$= \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan(u)+C = \arctan\left(e^x\right)+C$ bulunur.

ÖRNEK $I=\int \frac{2x+3}{x^2+2x+5}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$I=\int \frac{2x+3}{x^2+2x+5}dx=\int\left(\frac{2x+2}{x^2+2x+5}+\frac{1}{x^2+2x+5}\right)dx \text{ dir.}$$

$$=\underbrace{\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx}_{I_1}+\underbrace{\int \frac{1dx}{x^2+2x+5}}_{I_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} u=x^2+2x+5 \\ du=(2x+2)dx \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} I_1=\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx \\ I_1=\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C_1=\ln(x^2+2x+5)+C_1 \end{array}$$

$$I_2=\int \frac{dx}{x^2+2x+5}=\int \frac{dx}{(x^2+2x+1)+4}=\int \frac{dx}{(x+1)^2+4}$$

$u=x+1 \Rightarrow du=dx,$

$$I_2=\int \frac{du}{4+u^2}=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u}{2}\right)+C_2$$

$$I_2=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C_2$$

$$I=I_1+I_2=\ln(x^2+2x+5)+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $I=\int \frac{xdx}{x^4+3}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$I=\int \frac{xdx}{3+(x^2)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} u=x^2 \\ du=2xdx \end{array}\right\} \Rightarrow xdx=\frac{du}{2}$$

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{du}{3+u^2}=\frac{1}{2}\int \frac{du}{(\sqrt{3})^2+u^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$I=\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)+C \text{ bulunur.}$$

AŞAĞIDAKİ İNTEGRALLERİ BULUNUZ.

SORULAR	YANITLAR
1) $\int x\sqrt{1+x}\,dx = ?$	$\left(\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + C\right)$
2) $\int \left(2\sin\frac{x}{2} - 2\right)dx = ?$	$\left(-4\cos\frac{x}{2} - 2x + C\right)$
3) $\int \sin 3x \cdot e^{\cos 3x}dx = ?$	$\left(-\frac{1}{3}e^{\cos 3x} + C\right)$
4) $\int x \cdot e^{2x^2}dx = ?$	$\left(\frac{1}{4}e^{2x^2} + C\right)$
5) $\int \tan x\,dx = ?$	$\left(-\ln\lvert\cos x\rvert + C\right)$
6) $\int \frac{2x-1}{x^2-x+5}dx = ?$	$\left(\ln\left(x^2-x+5\right) + C\right)$
7) $\int x \cdot \left(3x^2-4\right)^3 dx = ?$	$\left(\frac{\left(3x^2-4\right)^4}{24} + C\right)$
8) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} = ?$	$\left(\frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + C\right)$
9) $\int 5^{3x^2-x} \cdot (6x-1)dx = ?$	$\left(\frac{5^{3x^2-x}}{\ln 5} + C\right)$
10) $\int \frac{e^x}{3+4e^x}dx = ?$	$\left(\frac{1}{4}\ln\left(3+4e^x\right) + C\right)$
11) $\int a^{2x} \cdot \ln a\,dx = ?$	$\left(\frac{a^{2x}}{2} + C\right)$
12) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}dx = ?$	$\left(-\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x + \frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x + C\right)$
13) $\int 2^{\tan x} \cdot \sec^2 x\,dx = ?$	$\left(\frac{2^{\tan x}}{\ln 2} + C\right)$
14) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx = ?$	$\left(2\sqrt{1+\sin^2 x} + C\right)$
15) $\int e^{\sin x + \ln(\cos x)}dx = ?$	$\left(e^{\sin x} + C\right)$
16) $\int \tan x \sin\left(\ln(\cos x)\right)dx = ?$	$\left(\cos\left(\ln(\cos x)\right) + C\right)$

AŞAĞIDAKİ İNTEGRALLERİ BULUNUZ

SORULAR	YANITLAR
1. $\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx}}$	$\left(-\frac{2\sqrt{a-bx}}{b}+C\right)$
2. $\int x\sqrt{2x^2+3}\,dx$	$\left(\frac{(2x^2+3)^{\frac{3}{2}}}{6}+C\right)$
3. $\int \frac{4x^2dx}{\sqrt{x^3+8}}$	$\left(\frac{8}{3}\sqrt{x^3+8}+C\right)$
4. $\int \frac{6xdx}{(5-3x^2)^2}$	$\left(\frac{1}{5-3x^2}+C\right)$
5. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{16+x^4}}$	$\left(\frac{\sqrt{16+x^4}}{2}+C\right)$
6. $\int \frac{dx}{(2+3x)^3}$	$\left(-\frac{1}{6(2+3x)^2}+C\right)$
7. $\int -\frac{xdx}{(3+2x^2)^3}$	$\left(\frac{1}{8(3+2x^2)^2}+C\right)$
8. $\int \frac{x^2dx}{(4+5x^3)^2}$	$\left(-\frac{1}{15(4+5x^3)}+C\right)$
9. $\int x^{n-1}\sqrt{a+bx^n}\,dx$	$\left(\frac{2(a+bx^n)^{\frac{3}{2}}}{3bn}+C\right)$
10. $\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x^2+3x}}$	$\left(2\sqrt{x^2+3x}+C\right)$
11. $\int \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x^3+3x}}$	$\left(\frac{2\sqrt{x^3+3x}}{3}+C\right)$
12. $\int \frac{dx}{2+3x}$	$\left(\frac{1}{3}\ln\lvert 2+3x\rvert+C\right)$
13. $\int \frac{xdx}{a+bx^2}$	$\left(\frac{\ln\lvert a+bx^2\rvert}{2b}+C\right)$
14. $\int \frac{e^xdx}{ae^x+b}$	$\left(\frac{\ln\lvert ae^x+b\rvert}{a}+C\right)$
15. $\int \frac{\sec^2xdx}{\sqrt{3\tan x+1}}$	$\left(\frac{2}{3}\sqrt{3\tan x+1}+C\right)$

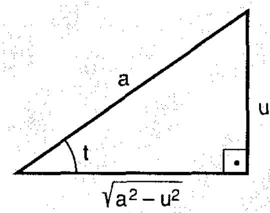
ÖZEL DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRMELER YAPILARAK ÇÖZÜLEBİLEN İNTEGRALLER

UYARI: İntegrantında $\sqrt{a^2-u^2}$ den başka irrasyonel ifade bulunmayan integrallerde $u = a\sin t$ veya $u = a\cos t$ dönüşümleri yapılır.

$u = a\sin t$ dönüşümü yapılmışsa

$\sin t = \frac{u}{a}$ eşitliğine uygun

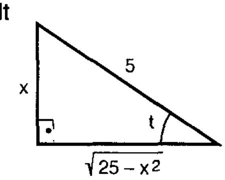
dik üçgenlerden yararlanarak işleme devam edilir .



ÖRNEK $\int\sqrt{25-x^2}\,dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x = 5\sin t \Rightarrow dx = 5\cos t.dt$ olur.

$$\begin{aligned}
\int\sqrt{25-x^2} &= \int\sqrt{25-25\sin^2 t}\,.5.\cos t dt\\
&= \int 5\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot 5.\cos t dt\\
&= 25\int \cos t.\cos t dt\\
&= 25\int \cos^2 t dt\\
&= 25\int \frac{\cos 2t+1}{2}dt\\
&= \frac{25}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2t + t\right)+C\\
&= \frac{25}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2x\sqrt{25-x^2}}{25}+\arcsin\frac{x}{5}\right)+C\\
&= \frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{25-x^2}+\frac{25}{2}\arcsin\frac{x}{5}+C
\end{aligned}$$



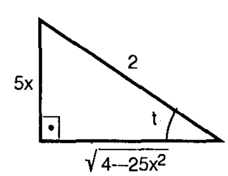
$$\begin{aligned}
x &= 5\sin t\\
\sin t &= \frac{x}{5} \Rightarrow t = \arcsin\frac{x}{5}\\
\sin 2t &= 2\sin t.\cos t\\
&= 2\frac{x}{5}\cdot\frac{\sqrt{25-x^2}}{5}\\
&= \frac{2x\sqrt{25-x^2}}{25}
\end{aligned}$$

ÖRNEK $\int\frac{\sqrt{4-25x^2}}{x}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x = \frac{2}{5}\sin t$ diyelim $dx = \frac{2}{5}\cos t dt$

$$\begin{aligned}
\int\frac{\sqrt{4-25x^2}}{x}dx &= \int\frac{2\cos t}{\frac{2}{5}\sin t}\left(\frac{2}{5}\cos t dt\right)\\
&= 2\cdot\int\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt\\
&= 2\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt\\
&= 2\left(\int\frac{1}{\sin t}dt - \int \sin t dt\right)\\
&= 2\left(\int \operatorname{cosec} t dt - \int \sin t dt\right)\\
&= 2\left(\ln\left|\operatorname{cosec} t - \cot t\right| - (-\cos t)\right)+C\\
&= 2\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-25x^2}}{5x}\right| + \sqrt{4-25x^2}+C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{4-25x^2} &= \sqrt{4-25\frac{4}{25}\sin^2 t}\\
&= \sqrt{4(1-\sin^2 t)}\\
&= 2.\cos t
\end{aligned}$$



$$\operatorname{cosec} t = \frac{2}{5x}$$

$$\cot t = \frac{\sqrt{4-25x^2}}{5x}$$

$$\cos t = \frac{\sqrt{4-25x^2}}{2}$$

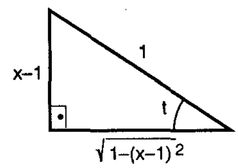
ÖRNEK $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{8x-4x^2}}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\int \frac{x^2dx}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

$x-1 = \sin t$ olsun $dx = \cos t dt$

$$\frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{(1+\sin t)^2}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t dt$$



$$= \frac{1}{2}\int \frac{(1+\sin t)^2}{\cos t}\cos t dt$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\sin t)^2 dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(1+2\sin t+\sin^2 t\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(1+2\sin t+\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{3}{2}+2\sin t-\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}t-2\cos t-\frac{1}{4}\sin 2t\right)+C$$

$x-1 = \sin t \Rightarrow t = \arcsin(x-1)$

$\cos t = \sqrt{1-(x-1)^2}$

$\sin 2t = 2\cos t.\sin t$

$= 2.\sqrt{1-(x-1)^2}\,(x-1)$

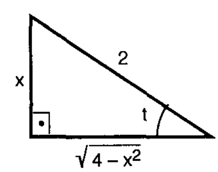
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\arcsin(x-1) - 2\cdot\sqrt{1-(x-1)^2} - \frac{1}{4}2\sqrt{1-(x-1)^2}\,(x-1)\right)+C$$

$$= \frac{3}{4}\arcsin(x-1) - \sqrt{1-(x-1)^2} - \frac{1}{4}\sqrt{1-(x-1)^2}\,(x-1)+C \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$x = 2\sin t$ olsun $dx = 2\cos t\, dt$



$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\cos t dt}{4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}}$$

$$= \int \frac{2\cos t dt}{4\sin^2 t.2.\cos t}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sin^2 t}dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \mathrm{cosec}^2 t dt$$

$$= \frac{1}{4}(-\cot t)+C$$

$\cot t = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

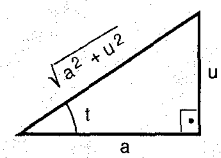
$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}+C$$

$$= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+C \quad \text{olur.}$$

UYARI: İntegrantında $\sqrt{u^2+a^2}$ den başka irrasyonel ifade bulundurmayan integrallerde $u = a\tan t$ dönüşümü yapılır.

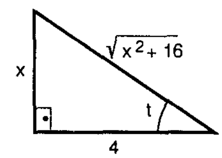
$u = a\tan t \Rightarrow \tan t = \dfrac{u}{a}$ koşuluna uygun

Dik üçgenden yararlanarak işlem sürdürülür .



ÖRNEK $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x = 4\tan t$ olsun. $dx = \dfrac{4}{\cos^2 t}dt$ $\arctan\dfrac{x}{4} = t$



$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}} = \int \frac{\frac{4}{\cos^2 t}}{16\tan^2 t\sqrt{16\tan^2+16}}dt$$

$$= \int \frac{\frac{4}{\cos^2 t}}{16\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\cdot 4\cdot\frac{1}{\cos t}}dt$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$$

$\sin t = u$ denirse

$\cos t\, dt = du$ olur.

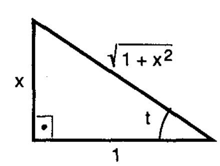
$$= \frac{1}{16}\int u^{-2}\cos t\frac{du}{\cos t}$$

$$= \frac{1}{16}\int u^{-2}du = \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{u}+C\right)$$

$$= -\frac{1}{16\sin t}+C = -\frac{1}{16\sin\left(\arctan\frac{x}{4}\right)}+C = -\frac{\sqrt{x^2+16}}{16x}+C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x = \tan t \Rightarrow dx = \dfrac{1}{\cos^2 t}dt$



$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\left(1+x^2\right)} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}dt}{\sqrt{1+\tan^2 t}\left(1+\tan^2 t\right)}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}}dt$$

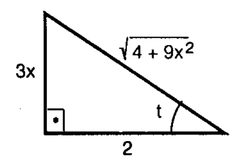
$\sin t = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$= \int \cos t\,dt = \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4+9x^2}}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x=\dfrac{2}{3}\tan t$ olsun $\quad dx=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 t}dt$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+9x^2}}=\int \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}}{\sqrt{4+9\cdot\frac{4}{9}\tan^2 t}}$$



$$=\int \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}}{2\cdot\sqrt{1+\tan^2 t}}dt$$

$\sec t=\dfrac{\sqrt{4+9x^2}}{2}$

$\tan t=\dfrac{3x}{2}$

$$=\int \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}}{2\cdot\frac{1}{\cos t}}dt$$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{1}{\cos t}dt$$

$$=\frac{1}{3}\int \sec t\,dt$$

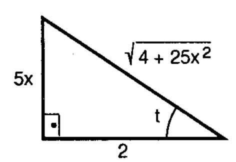
$$=\frac{1}{3}\ln\left|\sec t+\tan t\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{4+9x^2}+3x}{2}\right|+C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4+25x^2}}$ **integralini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM $x=\dfrac{2}{5}\tan t$ olsun $\quad dx=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 t}dt$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4+25x^2}}=\int \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{2}{5}\tan t\sqrt{4+25\frac{4}{25}\cdot\tan^2 t}}dt$$

$$=\int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{\sin t}{\cos t}2\cdot\frac{1}{\cos t}}dt$$



$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin t}dt$$

$\text{cos ect}=\dfrac{\sqrt{4+25x^2}}{5x}$

$\cot t=\dfrac{2}{5x}$

$$=\frac{1}{2}\int \text{cosec}t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\text{cosec}t-\cot t\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4+25x^2}}{5x}-\frac{2}{5x}\right|+C$$

ÖRNEK

$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$x = \frac{3}{2}\tan t$ alınırsa $\sqrt{4x^2+9} = 3\sec t$

$dx = \frac{3}{2}\sec^2 t dt$ olur.

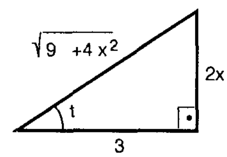
Buradan;

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \int \frac{\frac{3}{2}\sec^2 t dt}{\frac{3}{2}\tan t \cdot 3 \cdot \sec t} = \frac{1}{3}\int \frac{\sec t dt}{\tan t}$$

$$= \frac{1}{3}\int \operatorname{cosec} t dt = \frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{cosec} t - \cot t\right| + C$$

$$x = \frac{3}{2}\tan t \Rightarrow 2x = 3\tan t$$

$$\tan t = \frac{2x}{3}$$



$$\operatorname{cosec} t = \frac{\sqrt{4x^2+9}}{2x}$$

$$\cot t = \frac{3}{2x}$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{2x}\right| + C \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK

$I = \int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$I = \int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-4}{\sqrt{4x-x^2}}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2x+4-4-4}{\sqrt{4x-x^2}}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int\left(\frac{-2x+4}{\sqrt{4x-x^2}} - \frac{8}{\sqrt{4x-x^2}}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int (-2x+4)\left(4x-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx$$

$$4x - x^2 = t \Rightarrow (4-2x)dx = dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt + 4\int \frac{1}{\sqrt{4-\left(x^2-4x+4\right)}}dx$$

$$x - 2 = 2u \Rightarrow dx = 2du$$

$$= -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt + 4\int \frac{1}{2\sqrt{1-u^2}}2du, = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 4\arcsin u + C$$

$$= -\sqrt{4x-x^2} + 4\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) + C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+25}}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x = 5.\tan t$ denirse $dx = \dfrac{5}{\cos^2 t}dt$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+25}} = \int \frac{\frac{5}{\cos^2 t}}{25\tan^2 t\sqrt{25\tan^2 t+25}}dt$$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{\cos t}}dt$$

$$= \frac{1}{25}\int \sin^{-2} t.\cos t.dt \qquad \sin t = u \Rightarrow \cos t.dt = du$$

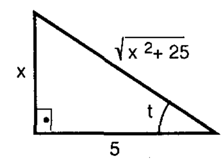
$$= \frac{1}{25}\int u^{-2}.\cos t\frac{du}{\cos t}$$

$$= \frac{1}{25}\int u^{-2}du$$

$$= \frac{1}{25}\cdot\frac{u^{-1}}{-1}+C$$

$$= -\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{\sin t}+C$$

$$= -\frac{1}{25}\cdot\frac{\sqrt{x^2+25}}{x}+C \text{ olur.}$$

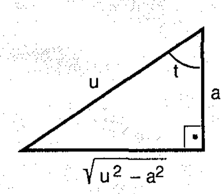


$$\sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2+25}}$$

UYARI: İntegrantında $\sqrt{u^2-a^2}$ den başka irrasyonel ifade bulundurmayan integrallerde

$u = a\sec t = \dfrac{a}{\cos t}$ dönüşümü yapılır.

Eğer, $\cos t = \dfrac{a}{u}$ dönüşümü yapılmış ise $\cos t = \dfrac{a}{u}$ eşitliğine uygun dik üçgenden yararlanılarak işleme devam edilir .



ÖRNEK $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ **integralini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM $x = \dfrac{1}{\cos t}$ olsun $dx = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}dt$ $\cos t = \left(\dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow t = \arccos\dfrac{1}{x}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos t}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}}dt = \int \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{\sin t}{\cos t}}dt$$

$$= \int dt = t + C$$

$$= \arccos\left(\frac{1}{x}\right)+C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+20}}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+20}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+16+4}}$$

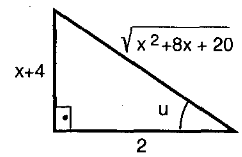
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+4)^2+4}} = \int \frac{\frac{2}{\cos^2 u}}{\sqrt{4\cdot\tan^2 u+4}}du$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 u}}{\frac{1}{\cos u}}du = \int \frac{1}{\cos u}du$$

$$= \ln\left|\frac{1}{\cos u}+\tan u\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+8x+20}+x+4}{2}\right| + C$$

$x+4 = 2\tan u \Rightarrow$

$dx = \frac{2}{\cos^2 u}du$



$\cos u = \frac{2}{\sqrt{x^2+8x+20}}$

$\tan u = \frac{x+4}{2}$

ÖRNEK $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x}}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9-9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-9}} = \int \frac{-\frac{3\cos u}{\sin^2 u}}{\sqrt{\frac{9}{\sin^2 u}-9}}du$$

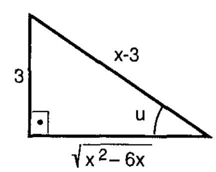
$$= \int \frac{-\frac{\cos u}{\sin^2 u}}{\frac{\cos u}{\sin u}}du = -\int \frac{1}{\sin u}du = \int \operatorname{cosec} u\cdot du$$

$$= -\ln|\operatorname{cosec} u - \cot u| + C$$

$$= -\ln\left|\frac{x-3-\sqrt{x^2-6x}}{3}\right| + C$$

$x-3 = \frac{3}{\sin u} \Rightarrow$

$dx = \frac{-3\cos u}{\sin^2 u}du$



$\sin u = \frac{3}{x-3} \Rightarrow$

$\operatorname{cosec} u = \frac{x-3}{3}$

$\cot u = \frac{\sqrt{x^2-6x}}{3}$

ÖRNEK $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$ **integralini hesaplayınız.**

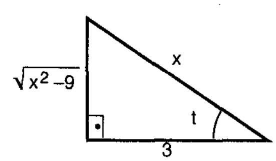
ÇÖZÜM $x = \frac{3}{\cos t}$ olsun $dx = \frac{3\sin t}{\cos^2 t}dt$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t}-9}}{\frac{3}{\cos t}}\cdot\frac{3\sin t}{\cos^2 t}dt$$

$$= \int \frac{3\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}}{\frac{1}{\cos t}}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt = 3\int \frac{\frac{\sin t}{\cos t}}{\frac{1}{\cos t}}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$$

$$= 3\int \tan^2 t\,dt = 3\int \left(1+\tan^2 t-1\right)dt$$

$$= 3(\tan t - t) + C = 3\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} - \arccos\frac{3}{x}\right) + C$$



$\tan t = \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}$

$\cos t = \frac{3}{x} \Rightarrow$

$t = \arccos\frac{3}{x}$

AŞAĞIDAKİ İNTEGRALLERİ BULUNUZ

	SORULAR	YANITLAR
1.	$\int \frac{dx}{4-9x^2}$	$\frac{1}{12}\ln\left\|\frac{2+3x}{2-3x}\right\|+C$
2.	$\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$	$\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4}+C$
3.	$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}$	$\frac{1}{2}\arctan\left(e^{2x}\right)+C$
4.	$\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$	$\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x-3}{3}\right)+C$
5.	$\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+3)^2}}$	$\arcsin\left(\frac{x+3}{2}\right)+C$
6.	$\int \frac{\cos x dx}{4-\sin^2 x}$	$\frac{1}{4}\ln\left(\frac{2+\sin x}{2-\sin x}\right)+C$
7.	$\int \frac{5x dx}{\sqrt{1-x^4}}$	$\frac{5}{2}\arcsin\left(x^2\right)+C$
8.	$\int \frac{2dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$	$\arcsin\frac{2x-1}{3}+C$
9.	$\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}$	$\arctan(2x-1)+C$
10.	$\int \frac{dx}{1+x+x^2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$
11.	$\int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$	$\frac{1}{\sqrt{11}}\arctan\frac{3x-1}{\sqrt{11}}+C$
12.	$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$	$\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{8x+3}{\sqrt{41}}\right)+C$
13.	$\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\sqrt{1-x^2}-\arcsin x+C$
14.	$\int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{9-x^2}}$	$-3\sqrt{9+x^2}-2\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)+C$
15.	$\int \frac{2x+5}{x^2+2x+5}$	$\ln\left(x^2+2x+5\right)+\frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$

$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ BİÇİMİNDEKİ İNTEGRALLER

KURAL:	**Bu tür integrallerde $\Delta = b^2 - 4ac$ sayısı hesaplanır.**
	1) $\Delta < 0$ 2) $\Delta = 0$ 3) $\Delta > 0$
	durumlarına göre ayrı ayrı yöntemler uygulanır.

1. $\Delta < 0$

$\Delta < 0$ ise $ax^2 + bx + c = (mx + n)^2 + k^2$ dir.

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dx}{k^2+(mx+n)^2} \text{ yazılır.}$$

(Paydayı k^2 parantezine alırsak)

$$= \int \frac{dx}{k^2\left(1+\frac{(mx+n)^2}{k^2}\right)} = \frac{1}{k^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{mx+n}{k}\right)^2} \text{ olur.}$$

daha sonra $u = \frac{mx+n}{k}$ değişken değiştirmesi yapılır. Sonuçta arctanjantlı bir ilkel fonksiyona ulaşılır.

ÖRNEK $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x^2 + 2x + 5$ için $\Delta < 0$ olduğundan yukarıdaki genel duruma bir özel örnektir.

$\Delta = 2^2 - 4.5$

$\Delta = 4 - 20$

$\Delta = -16 < 0$ olur.

$$x^2 + 2x + 5 = \left(x^2 + 2x + 1\right) + 4$$
$$= (x+1)^2 + 4$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \int \frac{dx}{2^2+(x+1)^2}$$

$$\frac{x+1}{2} = u \Rightarrow dx = 2du$$

$$\int \frac{dx}{2^2+(x+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} \text{ arctanu} + C$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x^2 + 6x + 10$ için $\Delta = 36 - 4.10 = 36 - 40 = -4 < 0$ dır.

$x^2 + 6x + 10 = (x^2 + 6x + 9) + 1 = (x + 3)^2 + 1$ olur.

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \frac{dx}{1+(x+3)^2} \qquad u = x+3 \text{ alınırsa } du = dx \text{ olur.}$$

$$= \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C = \arctan(x+3) + C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\int \frac{dx}{x^2+8x+20}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x^2 + 8x + 20$ için $\Delta = 8^2 - 4.1.20 = 64 - 80 = -16 < 0$ dır.

$x^2 + 8x + 20 = (x^2 + 8x + 16) + 4 = (x + 4)^2 + 2^2$ olur.

$$\int \frac{dx}{x^2+8x+20} = \int \frac{dx}{2^2+(x+4)^2} = \frac{1}{2^2}\int \frac{dx}{1+\frac{(x+4)^2}{2^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+4}{2}\right)^2} \text{ olur.}$$

$u = \frac{x+4}{2}$ alınırsa

$du = \frac{1}{2}dx$

$dx = 2du$ olur.

$$= \frac{1}{4}\int \frac{2du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\arctan u + C$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+4}{2}\right) + C \text{ olur.}$$

2. $\Delta = 0$

$\Delta = 0$ ise $ax^2 + bx + c = (mx + n)^2$ şekline getirilebilir.

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dx}{(mx+n)^2} = \int (mx+n)^{-2}dx \text{ olur.}$$

$$= \int u^{-2}.\frac{du}{m} = \frac{1}{m}\int u^{-2}du$$

$u = mx + n$ alınırsa

$du = mdx$

$dx = \frac{du}{m}$ olur.

$$= \frac{1}{m}\frac{u^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{1}{m}\cdot\frac{u^{-1}}{-1} + C$$

$$= \frac{-1}{m.u} + C = \frac{-1}{m.(mx+n)} + C \text{ bulunur.}$$

3. $\Delta > 0$

$ax^2 + bx + c$ için $\Delta > 0$ ise iki köke sahiptir. Bu nedenle $ax^2 + bx + c = (mx + n)\,(kx + t)$ gibi lineer (doğrusal) iki fonksiyonun çarpımı şeklinde yazılabilir.

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{(mx+n)(kx+t)} = \frac{A}{mx+n} + \frac{B}{kx+t}$$ şeklinde yazılarak A ve B bulunur. Sonra integral alınarak doğal logaritmalı bir sonuç elde edilir.

ÖRNEK $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3x+2}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$ şeklinde yazılabilir.

$\Delta = 3^2 - 4.1.2 \Rightarrow \Delta = 1 > 0$ dır.

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+2)(x+1)} = \underset{(x+1)}{\frac{A}{x+2}} + \underset{(x+2)}{\frac{B}{x+1}}$$

$$\frac{1}{(x+2)(x+1)} = \frac{Ax + A + Bx + 2B}{(x+1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{(x+2)(x+1)} = \frac{(A+B)x + A + 2B}{(x+1)(x+2)}$$

$$1 = (A+B)x + A + 2B \text{ olur.}$$

Polinomların eşitliğinden;

$A + B = 0 \qquad A + 2B = 1$

$A = -B \qquad \Rightarrow \qquad -B + 2B = 1$

$B = 1$ ve $A = -1$ bulunur.

O halde,

$$\int \frac{1}{x^2+3x+2}dx = \int\left(\frac{-1}{x+2} + \frac{1}{x+1}\right)dx = -\int\frac{1}{x+2}dx + \int\frac{1}{x+1}dx \text{ olur.}$$

I. integral için $m = x+2$

II. integral için $t = x+1$ değişken

değiştirmeleri yapılarak

$$= -\ln|x+2| + \ln|x+1| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C \quad \text{bulunur.}$$

UYARI: Bu tip integrallerin çözümlerini basit kesirlere ayırma yöntemi ile integral alma konusunda tekrar göreceğiz.

PARÇALI (KISMİ) İNTEGRASYON YÖNTEMİ

TEOREM: u ve ϑ, x in diferansiyellenebilen iki fonksiyonu olsun:

$$\boxed{\int u\,d\vartheta = u.\vartheta - \int \vartheta.du} \text{ dur.}$$

İSPAT: $d(u.\vartheta) = \vartheta.du + u.d\vartheta$ (çarpımın diferanseyeli kuralı)

Buradan $u.d\vartheta = d(u.\vartheta) - \vartheta.du$ yazılır. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\int u.d\vartheta = \int\left[d(u.\vartheta) - \vartheta.du\right]$$

$$\int u.d\vartheta = \int d(u.\vartheta) - \int \vartheta.du$$

$$\int u.d\vartheta = u.\vartheta - \int \vartheta.du \quad \text{bulunur.}$$

İspatladığımız $\boxed{\int u.d\vartheta = u.\vartheta - \int \vartheta.du}$ teoremine parçalı **integrasyon formülü** denir.

Burada, sağdaki $\int \vartheta.du$ integrali, soldaki $\int u.d\vartheta$ integralinden daha basit ise bu formül kullanılır. Bunun içinde, du, u dan daha basit olmalıdır. Ayrıca, bir integrant çarpım durumunda ise kesinlikle parçalı integrasyon yöntemi uygulanacak diye düşünülmemelidir.

UYARI: Hangi durumlarda parçalı integrasyon yöntemi uygulanacağı konusunda kesin bir kural yoktur. Ancak aşağıdaki kural birçok durumda integralin kolaylıkla hesaplanmasını sağlar.

L A P T Ü

1. L: Logaritmik fonksiyonlar (logx, lnx, ln(x+5), ... v.b)
2. A: Ters trigonometrik fonksiyonlar (arcisnx, arccosx, arctanx,...., vb.)
3. P: Polinom fonksiyonlar (x, x^2+3x+1, x^3+4, ... vb.)
4. T: Trigonometrik fonksiyonlar (sinx, tanx, secx, ..., v.b.)
5. Ü: Üstel fonksiyonlar (e^x, a^x, 2^x, ... vb.)

Kuralın uygulanışı şöyledir. integralin içinde, yukarıdaki fonksiyonların hangileri varsa, LAPTÜ sırasına göre önceki u, diğerleri du kabul edilerek, parçalı integrasyon yöntemi kullanılır.

Örnekler:
1. $\int x\sin x dx \Rightarrow x = u, \quad \sin x dx = dv$
2. $\int x\ln x dx \Rightarrow \ln x = u, \quad x dx = dv$
3. $\int e^x \sin x dx \Rightarrow \sin x = u, \quad e^x dx = dv$
4. $\int e^x \ln x dx \Rightarrow \ln x = u, \quad e^x dx = dv$
5. $\int x^2 \arcsin x dx \Rightarrow \arcsin x = u, \quad x^2 dx = dv$
6. $\int x.(x+3)^5 dx \Rightarrow x = u, \quad (x+3)^5 dx = dv$

ÖRNEK $\int x(x+2)^2 dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = (x+2)^2 dx \Rightarrow \int dv = \int (x+2)^2 dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}(x+2)^3$$

$\int udv = uv - \int vdu$ olduğundan

$$\int x(x+2)^2 dx = x\cdot\frac{1}{3}(x+2)^3 - \int \frac{1}{3}(x+2)^3 dx = \frac{1}{3}\cdot x(x+2)^3 - \frac{1}{3}\int (x+2)^3 dx$$

$$= \frac{1}{3}\cdot x(x+2)^3 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}(x+2)^4 + C = \frac{1}{3}(x+2)^3\left(x - \frac{1}{4}(x+2)\right) + C \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK $\int 2x.e^x.dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$u = 2x \Rightarrow du = 2dx$

$$dv = e^x dx \Rightarrow \int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$\int udv = uv - \int vdu$ olduğundan

$$\int 2x.e^x dx = 2x.e^x - \int e^x.2dx = 2x.e^x - 2\int e^x dx$$

$$= 2x.e^x - 2e^x + C = 2e^x(x-1) + C \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK $\int x.\cos x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$u = x \Rightarrow dx = du$

$dv = \cos x dx \Rightarrow \int dv = \int \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$

$\int u.dv = u.v - \int v.du$ olduğundan

$\int x.\cos x.\,dx = x.\sin x - \int \sin x.\,dx = x.\sin x + \cos x + C$ olur.

ÖRNEK $\int \ln x.dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx, \quad dv = dx \Rightarrow v = x$

$\int u\,dv = u\,v - \int v.du$

$\int \ln x.\,dx = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x.\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$

ÖRNEK $\int x^3\ln(2x)dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$u = \ln(2x) \Rightarrow du = \frac{2}{2x}dx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

$dv = x^3dx \Rightarrow v = \frac{x^4}{4}$

$\int udv = u.v - \int v.du$

$$\int x^3\ln(2x)dx = \frac{1}{4}x^4.\ln(2x) - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{4}x^4\ln(2x) - \frac{1}{4}\int x^3dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4\ln(2x) - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} + C = \frac{1}{4}x^4\left(\ln(2x) - \frac{1}{4}\right) + C$$

ÖRNEK $\int x.\sin^2 2x.dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$\sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2}$ olduğundan

$$\int x.\sin^2 2x.\,dx = \int x\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (x - x.\cos 4x)dx \Rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \int x.\cos 4x.\,dx\right] \text{ olur.}$$

Şimdi $I = \int x.\cos 4x.dx$ integralini bulalım.

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \cos 4xdx \Rightarrow v = \frac{1}{4}\sin 4x$

$\int u\,dv = u\,v - \int v.du$

$$\int x.\cos 4xdx = \frac{1}{4}x\cdot\sin 4x - \int \frac{1}{4}\sin 4x.\,dx = \frac{1}{4}x\cdot\sin 4x + \frac{1}{16}\cos 4x \text{ olur.}$$

Bu değer yerine yazılırsa,

$$\int x.\sin^2 2x.\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \left[\frac{x}{4}\sin 4x + \frac{1}{16}\cos 4x\right]\right] + C$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{8}\sin 4x - \frac{1}{32}\cos 4x + C$$

ÖRNEK $\int \arcsin x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$u = \arcsin x \Rightarrow du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x.\arcsin x + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= x.\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $\int \arctan x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$u = \arctan x \Rightarrow du = \dfrac{1}{1+x^2}dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

$\int u.dv = u.v - \int v.du$

$\int \arctan x dx = x.\arctan x - \int \dfrac{x}{1+x^2}dx$ olur.

Şimdi,

$I = \int \dfrac{x}{1+x^2}dx$ integralini bulalım.

$1 + x^2 = t$ $2x\,dx = dt$ olur.

$$I = \int \frac{xdx}{1+x^2} = \int \frac{x}{t}\cdot\frac{dt}{2x} = \int \frac{1}{2t}dt$$

$= \dfrac{1}{2}\ln|t| = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$ olur. Bu değer yerine yazılırsa,

$$\int \arctan x dx = x.\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

ÖRNEK $\int \dfrac{x.\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$u = \arcsin x \Rightarrow du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$dv = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \Rightarrow \int dv = \int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\qquad 1-x^2 = t^2 \Rightarrow -2xdx = 2tdt$

$$v = \int -\frac{x}{t}\cdot\frac{t}{x}dt$$

$$v = -\int dt$$

$$v = -t = -\sqrt{1-x^2}$$

$\int udv = uv - \int vdu$

$$\int \frac{x.\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x + \int \sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= -\sqrt{1-x^2}.\arcsin x + x + C$$

ÖRNEK $\int 3x.e^{3x}.dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $u = 3x \Rightarrow du = 3dx$

$dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x}$

$$\int udv = u.v - \int vdu$$

$$\int 3xe^{3x}dx = 3x\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}3dx$$

$$= x.e^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

$$= e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) + C \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK $\int e^{ax}.\sin bx\,dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $u = e^{ax} \Rightarrow du = ae^{ax}\,dx$

$dv = \sin bx\,dx \Rightarrow v = -\frac{1}{b}\cos bx$

$$\int udv = u.v - \int v.du$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}.\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}.\cos bx\,dx \cdots\cdots (\mathrm{I})$$

Şimdi $\int e^{ax}.\cos bx\,dx$ **integralini hesaplayalım.**

$u = e^{ax} \Rightarrow du = ae^{ax}dx$

$dv = \cos bx \Rightarrow v = \frac{1}{b}\sin bx$

$\int e^{ax}.\cos bx\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}.\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}.\sin bx dx$ bulunur. Bu ifade (I) de yerine yazılırsa

$$\int e^{ax}.\sin bx\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}.\cos bx + \frac{a}{b}\left[\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}.\sin bx\,dx\right]$$

$$\int e^{ax}.\sin bx\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}.\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}.\sin bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}.\sin bx\,dx$$

elde edilir. Son elde edilen integral hesaplanması gereken integraldir. Bu integral eşitliğin sol tarafına geçirilirse;

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}.\sin bx\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}.\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}.\sin bx$$

$$\int e^{ax}.\sin bx\,dx = \frac{-be^{ax}.\cos bx + ae^{ax}.\sin bx}{a^2 + b^2} + C \quad \text{elde edilir.}$$

UYARI: P(x) bir polinom olmak üzere,

1) $\int P(x)e^x dx = e^x\left(P(x) - P'(x) + P''(x) - P'''(x)\cdots\right) + C$ sabit sayıya ulaşıncaya kadar türev alma işlemi sürdürülür.

2) $\int P(x)e^{ax+b}dx = e^{ax+b}\left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \frac{P''(X)}{a^3}\cdots\right) + C$ sabit sayıya ulaşıncaya kadar türev alma işlemi sürdürülür.

3) $\int x^n \ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C \qquad (n \in N^+)$

kuralları ile parçalı integrasyon yöntemi kullanılmadan integral kolaylıkla bulunur.

ÖRNEK $\int (x^2 + 3x)e^x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $P(x) = x^2 + 3x$ dir. Uyarı kullanılarak

$$\int (x^2+3x)e^x dx = e^x\left[(x^2+3x) - (x^2+3x)' + (x^2+3x)''\cdots\right] + C$$

$$= e^x\left[x^2 + 3x - (2x+3) + (2)\right] + C$$

$$= e^x\left(x^2 + 3x - 2x - 3 + 2\right) + C$$

$$= e^x\left(x^2 + x - 1\right) + C \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK $\int x^3 e^{2x} dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\int x^3 e^{2x} dx = e^{2x}\left[\frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{2^2} + \frac{6x}{2^3} - \frac{6}{2^4}\right] + C = e^{2x}\left[\frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{4} + \frac{6x}{8} - \frac{6}{16}\right] + C$$

$$= e^{2x}\left[\frac{x^3}{2} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right] + C \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK $\int \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)e^x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$P(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ dir. Uyarı 1 e göre

$$\int \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)e^x dx = e^x\left[\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right) - \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)' + \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)'' - \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)'''\right] + C$$

$$= e^x\left[\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right) - (x^2 - 2x) + (2x - 2) - (2)\right] + C$$

$$= e^x\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - x^2 + 2x + 2x - 2 - 2\right] + C$$

$$= e^x\left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 4\right) + C \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK $\int x\ln x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C \text{ idi } n=1 \text{ alınırsa}$$

$$\int x\ln x dx = \frac{x^{1+1}}{1+1}\ln x - \frac{x^{1+1}}{(1+1)^2} + C$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\int x^4 \ln x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C \text{ idi. } n=4 \text{ alınırsa}$$

$$\int x^4 \ln x dx = \frac{x^{4+1}}{4+1}\ln x - \frac{x^{4+1}}{(4+1)^2} + C$$

$$= \frac{x^5}{5}\ln x - \frac{x^5}{25} + C \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK $\int e^{2x}.\cos 3x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$e^{2x} = u \Rightarrow 2.e^{2x}dx = du$

$dv = \cos 3x dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}\cdot \sin 3x$

$\int u dv = uv - \int v du$

$$\int e^{2x}.\cos 3x dx = \frac{1}{3}e^{2x}.\sin 3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}.\sin 3x dx \ldots\ldots (I)$$

Şimdi $\int e^{2x}.\sin 3x dx$ integralini bulalım.

$u = e^{2x} \Rightarrow 2e^{2x}dx = du$

$dv = \sin 3x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{3}\cos 3x$

$$\int e^{2x}.\sin 3x dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cdot\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cdot\cos 3x dx$$

Bu, ifade (I) de yerine yazılırsa,

$$\int e^{2x}.\cos 3x dx = \frac{1}{3}e^{2x}.\sin 3x - \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3}e^{2x}.\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}.\cos 3x dx\right]$$

$$\int e^{2x}.\cos 3x dx = \frac{1}{3}e^{2x}.\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}.\cos 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}.\cos 3x dx$$

$$\left(1+\frac{4}{9}\right)\int e^{2x}.\cos 3x dx = \frac{1}{3}e^{2x}.\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}.\cos 3x$$

$$\int e^{2x}.\cos 3x dx = \frac{3.e^{2x}.\sin 3x + 2e^{2x}.\cos 3x}{13} + C \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\int 3x^2e^{-x}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$u = 3x^2 \Rightarrow du = 6xdx$

$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$

$\int udv = u.v - \int vdu$

$\int 3x^2.e^{-x}dx = -e^{-x}.3x^2 + \int 6x.e^{-x}dx......(I)$

Şimdi $\int 6xe^{-x}dx$ integralini bulalım.

$u = 6x \Rightarrow du = 6dx$

$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$

$\int 6xe^{-x}dx = -6x.e^{-x} + \int 6e^{-x}dx$

Bu ifade (I) de yerine yazılırsa

$$\int 3x^2e^{-x}dx = -3x^2e^{-x} - 6xe^{-x} + \int 6e^{-x}dx$$

$$= -3x^2.e^{-x} - 6xe^{-x} - 6e^{-x} + C$$

$$= -3e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$$ bulunur.

ÖRNEK

$\int \sin(\ln x)dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$u = \sin(\ln x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}\cdot\cos(\ln x)dx$

$dv = dx \quad \Rightarrow v = x$

$\int udv = u.v - \int vdu$

$$\int \sin(\ln x)dx = x.\sin(\ln x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\cdot\cos(\ln x)dx$$

$$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx..............(I)$$

Şimdi $\int \cos(\ln x)dx$ integralini bulalım.

$u = \cos(\ln x) \Rightarrow du = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)dx$

$dv = dx \quad \Rightarrow v = x$

$\int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx$

Bu ifade (I) de yerine yazılırsa,

$$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx$$

$$2\int \sin(\ln x)dx = x.\sin(\ln x) - x.\cos(\ln x)$$

$$\int \sin(\ln x)dx = \frac{x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))}{2} + C$$

ÖRNEK $\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $u = x^2e^x \Rightarrow du = \left(2xe^x + x^2.e^x\right)dx = x.e^x(x+2)dx$

$dv = \frac{1}{(x+2)^2}dx \Rightarrow v = -\frac{1}{x+2}$

$$\int udv = u.v - \int vdu$$

$$\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx = -\frac{1}{x+2}x^2e^x + \int \frac{1}{x+2}(x+2)xe^xdx$$

$$= -\frac{1}{x+2}x^2.e^x + \int xe^xdx \ldots\ldots\ldots (\mathrm{I})$$

Şimdi $\int x.e^xdx$ integralini bulalım.

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = e^xdx \Rightarrow v = e^x$

$$\int xe^xdx = xe^x - \int e^xdx$$

$$= e^x(x-1)$$

İfadesi (I) de yerine konursa,

$$\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx = -\frac{1}{x+2}\cdot x^2e^x + e^x(x-1) + C$$

$$= e^x\left(-\frac{x^2}{x+2} + (x-1)\right) + C$$

ÖRNEK $\int e^x\left(x^3+2x+1\right)dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\int P(x)e^x = e^x\left(P(x) - P'(x) + P''(x)\cdots \text{sabit sayıya kadar}\right)$ idi.

$\int e^x\left(x^3+2x+1\right)dx = e^x\left[\left(x^3+2x+1\right) - \left(3x^2+2\right) + (6x) - 6\right] + C$

$= e^x\left[x^3 - 3x^2 + 8x - 7\right] + C$ bulunur.

ÖRNEK $\int x^5 \ln x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$ idi Buna göre

$\int x^5 \ln dx = \frac{x^6}{6}\ln x - \frac{x^6}{36} + C$ bulunur.

AŞAĞIDAKİ İNTEGRALLERİ BULUNUZ.

SORULAR	YANITLAR
1. $\int x^{13} \ln x dx$	$\frac{x^{14}}{14}\ln x - \frac{x^{14}}{196} + C$
2. $\int x^a \ln x dx$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}\ln x - \frac{x^{a+1}}{(a+1)^2} + C$
3. $\int x^2 e^{-x} dx$	$-e^{-x}(2+2x+x^2)+C$
4. $\int x \sec^2 x dx$	$x\tan x + \ln\lvert\cos x\rvert + C$
5. $\int x \sin ax dx$	$-\frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{x}{a}\cos ax + C$
6. $\int x 2^x dx$	$2^x\left(\frac{x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 2}\right)+C$
7. $\int x^2 \ln(2x) dx$	$\frac{x^3}{3}\left(\ln(2x) - \frac{1}{3}\right) + C$
8. $\int x \cos nx dx$	$\frac{1}{n^2}\cos nx + \frac{x}{n}\sin nx + C$
9. $\int \operatorname{arc}\cot x dx$	$x \operatorname{arc}\cot x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$
10. $\int \arccos 2x dx$	$x\arccos 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$
11. $\int \arctan\sqrt{x} dx$	$(x+1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$
12. $\int x^2 \arcsin x dx$	$\frac{x^3}{3}\arcsin x + \frac{x^2+2}{9}\sqrt{1-x^2} + C$
13. $\int e^x \cos x dx$	$\frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x)+C$
14. $\int e^{\arcsin x} dx$	$\frac{e^{\arcsin x}}{2}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)+C$
15. $\int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$	$\frac{x}{x+1}\ln x - \ln(x+1)+C$

AŞAĞIDAKİ İNTEGRALLERİ BULUNUZ.

SORULAR	YANITLAR
1. $\int x \cdot e^{2x} dx$	$\frac{x \cdot e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$
2. $\int (\ln x)^2 dx$	$x \ln x (\ln x - 2) + 2x + C$
3. $\int e^x \sin x dx$	$\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$
4. $\int e^{x + \ln x} dx$	$xe^x - e^x + C$
5. $\int x^2 \cdot e^x dx$	$x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$
6. $\int \cos(\ln x) dx$	$\frac{x \cdot (\cos(\ln x) + \sin(\ln x))}{2} + C$
7. $\int x^2 \sin x dx$	$2x \sin x + \cos x (2 - x^2) + C$
8. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$	$x - \sqrt{1 - x^2} \arcsin x + C$
9. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$	$x \tan x + \ln\lvert\cos x\rvert + C$
10. $\int x^2 \cdot \ln(3x) dx$	$\frac{x^3}{9}[3 \ln\lvert 3x - 1\rvert] + C$
11. $\int (x - 1) \ln x dx$	$\frac{x^2 - 2x}{2} \ln x - \frac{1}{4}(x^2 - 4x) + C$
12. $\int (x^2 - 2x + 5) e^x dx$	$e^x (x^2 - 4x + 9) + C$
13. $\int (x^2 + x) e^x dx$	$e^x (x^2 - x + 1) + C$
14. $\int x^5 e^x dx$	$e^x (x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 20x - 120)$
15. $\int x^3 \ln x dx$	$\frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C$

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ

Trigonometrik fonksiyonların integralinde aşağıdaki özdeşliklerden yararlanılır:

TRİGONOMETRİK ÖZDEŞLİKLER TABLOSU

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	**8)** $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y)+\sin(x+y)\right]$
2) $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$	**9)** $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]$
3) $1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$	**10)** $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y)+\cos(x+y)\right]$
4) $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$	**11)** $1-\cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$
5) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x$	**12)** $1+\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$
6) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$	**13)** $1 \mp \sin x = 1 \mp \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
7) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$	

Şimdi de trigonometrik fonksiyonların integralini integrantlarına göre ayrı gruplara ayırarak bunlara ait kural ve örnekleri göreceğiz.

A) TRİGONOMETRİK ÖZDEŞLİKLERDEN YARARLANARAK HESAPLANABİLEN İNTEGRALLER

UYARI: Bu tür integrallerde özdeşlikler integralin derecesini düşürmekte kullanılır.

ÖRNEK $\int \sin^2 x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

ÖRNEK $\int \sin^3 x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x dx$$

$$= \int \sin x dx - \int \cos^2 x \cdot \sin x dx \cdots \quad (1)$$

$\int \cos^2 x \sin x dx$ integralini bulalım.

$\cos x = u \Rightarrow du = -\sin x dx$

$\int \cos^2 x \sin x dx = \int -u^2 du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$ bu ifade (1) de yerine yazılırsa

$\int \sin^3 x dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$ bulunur.

ÖRNEK $\int \sin^4 x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1-\cos 2x\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1-2\cos 2x + \cos^2 2x\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int 1dx - 2\int \cos 2x dx + \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

B) $\int f(\sin x)\cos x dx$ BİÇİMİNE DÖNÜŞTÜRÜLEBİLEN İNTEGRALLER

Bu tip integrallerin bulunuşunda $t = \sin x$ değişken değiştirmesi yapılarak $dt = \cos x dx$ bulunur.

Böylece $\int f(\sin x)\cos x dx = \int f(t)dt$ biçimine dönüştürülerek integral alınır.

UYARI: $\int f(\cos x)\sin x dx$ biçiminde ise veya bu biçime dönüştürülebiliyor ise $t = \cos x$ değişken değiştirmesi yapılarak $\int f(\cos x)\sin x dx = -\int f(t)dt$ yazılarak integral alınır.

ÖRNEK $I = \int \sin^5 x \cos x dx$ integralini bulunuz.

ÇÖZÜM $t = \sin x$ dersek $dt = \cos x dx$ olur.

$$I = \int t^5 dt = \frac{1}{6}t^6 + C = \frac{\sin^6 x}{6} + C \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\int \cos^3 x dx$ in **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$I = \int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)\cdot \cos x dx$$

$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$ olur.

$$I = \int \left(1-t^2\right)dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C \text{ olur.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int \cos Ax\cdot\cos Bx\,dx\\ \displaystyle\int \sin Ax\cdot\cos Bx\,dx\\ \displaystyle\int \sin Ax\cdot\sin Bx\,dx\end{array}\right\}$$

C) **BİÇİMİNDEKİ İNTEGRALLER**

Bu tip integrallerin bulunuşunda,

1) $\cos a\cdot\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$

2) $\sin a\cdot\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(a+b)]$

3) $\sin a\cdot\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$

formülleri sıra ile uygulanır.

Gerektiğinde **$\sin(-a)=-\sin a$**, **$\cos(-a)=\cos a$** eşitlikleri de kullanılır.

ÖRNEK $\int \cos 4x\cdot\cos 2x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\cos a\cdot\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$ formülü uygulanarak

$$\int \cos 4x\cdot\cos 2x dx=\int\frac{1}{2}[\cos(4x-2x)+\cos(4x+2x)]dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\cos 2x dx+\frac{1}{2}\int\cos 6x dx$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x+C$$
$$=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{12}\sin 6x+C \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK $\int \sin 3x\cdot\sin 2x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\sin a\cdot\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$ formülü uygulanarak

$$\int \sin 3x\cdot\sin 2x dx=\int\frac{1}{2}[\cos(3x-2x)-\cos(3x+2x)]dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\cos x dx-\frac{1}{2}\int\cos 5x dx$$
$$=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\sin 5x+C$$
$$=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{10}\sin 5x+C \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK $\int \sin 2x \cdot \cos 8x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$ formülü uygulanarak

$$\int \sin 2x \cos 8x dx = \int \frac{1}{2}\left[(2x-8x)+\sin(2x+8x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left[\sin(-6x)+\sin 10x\right]dx \qquad \left(\sin(-a) = -\sin a \quad \text{olduğundan}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int \sin 6x + \frac{1}{2}\int \sin 10x dx$$

$$= +\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cos 6x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\cdot\cos 10x + C$$

$$= \frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{20}\cos 10x + C \quad \text{bulunur.}$$

D) $\sin^m x \cdot \cos^n x dx$ $m, n \in N^+$ BİÇİMİNDEKİ İNTEGRALLER

Bu tip integrallerin bulunmasında aşağıdaki yollar izlenir.

1) m tek, n çift ise **t = cosx** değişken değiştirmesi,

2) m çift, n tek ise **t = sinx** değişken değiştirmesi yapılır.

Daha genel olarak söylenirse, yukarıdaki iki durum için üssü çift olan fonksiyona **t** denir.

3) m tek, n tek ise **t = sinx** veya **t = cosx** değışken değiştirmesi yapılır.

4) m çift, n çift ise $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ veya $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ formüleri kullanılır.

ÖRNEK $\int \sin^4 x \cdot \cos^3 x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM çift kuvvetli çarpan, sinx olduğundan; $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$ olur.

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx = \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx \quad \text{olur.}$$

$$= \int \sin^4 x \cdot \left(1-\sin^2 x\right)\cos x dx \qquad \left(\cos^2 x = 1-\sin^2 x \text{ olduğundan}\right)$$

$$= \int t^4\left(1-t^2\right)dt \qquad \left(\sin x = t \text{ yerine yazılarak, } \cos x dx = dt\right)$$

$$= \int \left(t^4 - t^6\right)dt$$

$$= \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C$$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK $\int \cos^6 x \cdot \sin^3 x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM çift kuvvetli çarpan cosx olduğundan; $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$ olur.

$\int \cos^6 x \cdot \sin^3 x dx = \int \cos^6 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x dx$ $\qquad$ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ olduğundan

$= \int \cos^6 x \cdot \left(1 - \cos^2 x\right) \cdot \sin x dx$ $\qquad$ $\cos x = t$ yerine yazılarak

$= \int t^6\left(1 - t^2\right) \cdot dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^9}{9} + C = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + C$ olur.

ÖRNEK $\int \sin 3x \cdot \cos^2 3x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM çift kuvvetli çarpan, cos3x olduğundan

$u = \cos 3x \Rightarrow du = -3\sin 3x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{-3\sin 3x}$ olur.

$\int \sin 3x \cdot \cos^2 3x dx = \int \sin 3x \cdot u^2 \cdot \frac{-du}{3 \cdot \sin 3x} = -\frac{1}{3}\int u^2 du = -\frac{1}{3} \cdot \frac{u^3}{3} + C$

$= -\frac{1}{9}\cos^3 3x + C$ bulunur.

ÖRNEK $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}} dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $u = 1 + \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx \Rightarrow dx = \frac{-du}{\sin x}$

$\int \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}} dx = \int \frac{\sin x}{\sqrt{u}}\left(-\frac{du}{\sin x}\right) = \int -\frac{du}{\sqrt{u}} = -2\sqrt{u} + C$

$= -2\sqrt{1 + \cos x} + C$ olur.

ÖRNEK $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2\sin x \cdot \cos x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sin 2x}$

$\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin 2x}{t} \cdot \frac{dt}{\sin 2x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$

$= \ln\left(\sin^2 x\right) + C$ *olur.*

mutlak değer işaretine gerek kalmadığına dikkat ediniz.

ÖRNEK $\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM *sinx ve cosx ifadelerinin kuvvetleri tek olduğundan her hangi birine t diyelim.*

$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$ olur.

$\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx = \int \sin^3 x \cdot \underbrace{\cos^2 x}_{(1-\sin^2 x)} \cos x dx$

$= \int \sin^3 x\left(1 - \sin^2 x\right)\cos x dx = \int t^3\left(1 - t^2\right)dt$

$= \int \left(t^3 - t^5\right)dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} + C$

$= \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C$ bulunur.

ÖRNEK $\int \cos^2 x \cdot \sin^2 x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM cosx ve sinx in kuvvetleri çift olduğundan;

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ olur.

$$\int \cos^2 x \cdot \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \left[1-\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right]dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx$$
$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)dx = \frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C$$
$$= \frac{x}{8}-\frac{1}{32}\sin 4x + C \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM sinx ve cosx in kuvvetleri çift olduğundan

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ ve $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^2$ olur.

Bu durumda;

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\cdot\frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2 dx$$
$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)\cdot(1+\cos 2x)^2 dx$$
$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos u)\cdot(1+\cos u)^2 \frac{du}{2}$$

$2x = u \Rightarrow 2dx = du \Rightarrow$ $dx = \frac{du}{2}$ olur.

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos u)\cdot(1+\cos u)^2 du$$
$$= \frac{1}{16}\int (1+\cos u-\cos^2 u-\cos^3 u)du$$
$$= \frac{1}{16}\left(\int du+\int \cos u du-\int \cos^2 u du-\int \cos^2 u \cdot \cos u du\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left[u+\sin u-\int \frac{1+\cos 2u}{2}du-\int \cos^2 u\cdot\cos u du\right]$$
$$= \frac{1}{16}\left[u+\sin u-\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{2}\sin 2u\right)-\int (1-\sin^2 u)\cdot\cos u du\right] \cdots\cdots(1)$$

$\int (1-\sin^2 u)\cdot\cos u du$ integrallerini ayrıca çözelim. $t = \sin u \Rightarrow dt = \cos u du$

$\int (1-t^2)dt = t-\frac{t^3}{3} = \sin u-\frac{\sin^3 u}{3}+C$ sonucu (1) de yerine yazalım.

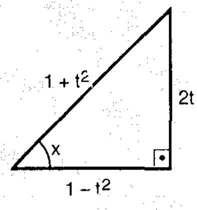
$$= \frac{1}{16}\left[u+\sin u-\frac{1}{2}u-\frac{1}{4}\sin 2u-\sin u+\frac{\sin^3 u}{3}\right]+C$$
$$= \frac{1}{16}\left[2x-\frac{1}{2}2x-\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{\sin^3 2x}{3}\right]+C$$
$$\frac{1}{16}\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{3}\sin^3 2x\right]+C \quad \text{bulunur.}$$

UYARI: sinx ve cosx' i rasyonel olarak bulunduran bir integralde

$\tan\frac{x}{2} = t$ veya $t = 2\arctan x$ dönüşümü yapılır. Buna göre;

$$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}$$

Buna göre yandaki dik üçgen çizilerek



$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

dönüşümleri yapılarak t nin bir rasyonel fonksiyonu haline getirilir. tanx, cotx, secx veya cosecx i rasyonel olarak bulunduruyorsa verilenler sinx veya cosx cinsinden yazılarak yukarıda verdiğimiz dönüşümler uygulanır.

ÖRNEK

$\int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$\tan\frac{x}{2} = t$ yazılarak uyarıda verilen dönüşümler yapılırsa;

$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ *yerlerine yazılırsa*

$$\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}} dt \text{ elde edilir.}$$

Gerekli işlemler yapılırsa;

$\int \frac{dt}{t(1+t)}$ integrali elde edilir.

$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t}$ işlemler yapılarak;

$A = 1, \quad B = -1$ bulunur.

$$\int \frac{dt}{t(1+t)} = \int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)dt = \ln t - \ln|1+t| + C = \ln\left|\frac{t}{1+t}\right| + C = \ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right| + C \text{ olur.}$$

ÖRNEK $I=\int\frac{dx}{3-2\cos x}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\tan\frac{x}{2}=t$ dönüşümü yapılırsa

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$I=\int\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{3-2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}$ gerekli işlemler yapılırsa; $I=\int\frac{2dt}{1+5t^2}=\frac{2}{5}\int\frac{dt}{\frac{1}{5}+t^2}$ olur.

$I=\frac{2}{5}\int\frac{dt}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+t^2}=\frac{2}{5}\cdot\sqrt{5}\arctan\left(\sqrt{5}\tan\frac{x}{2}\right)+C$ elde edilir.

ÖRNEK $I=\int\sec x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\sec x=\frac{1}{\cos x}$ dir. uyarıdaki değişken değiştirmelerine göre,

$I=\int\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}$ integrali elde edilir.

$=\int\frac{2dt}{1-t^2}$ integralini almak için $\frac{2}{1-t^2}$ basit kesirlereayrılır.

$$\frac{2}{1-t^2}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t}$$

Buradan; $A=B=1$ için $\int\frac{2dt}{1-t^2}=-\ln|1-t|+\ln|1+t|+C$

$$=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C$$

$$=\ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|+C$$

$$=\ln|\sec x+\tan x|+C$$

ÖRNEK $\int\frac{dx}{2+\cos x}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $t=\tan\frac{x}{2}$ dönüşümü yapılırsa ,

$dx=\frac{2dt}{1+t^2}\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ olur.

$\int\frac{dx}{2+\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}$ gerekli sadeleştirmeler yapılarak;

$$=2\int\frac{dt}{3+t^2}=2\int\frac{dt}{3\left(1+\frac{t^2}{3}\right)}=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}+C\qquad t=\tan\frac{x}{2}$ yerine yazılarak

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\frac{x}{2}\right)+C$ bulunur.

AŞAĞIDAKİ İNTEGRALLERİ BULUNUZ.

SORULAR	YANITLAR
1. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$	$\frac{1}{3}\tan^3 x + C$
2. $\int \cos 4x \cdot \cos 3x dx$	$\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{14}\sin 7x + C$
3. $\int \sin^5 x dx$	$-\frac{1}{5}\sin^4 x \cdot \cos x - \frac{4}{15}\sin^2 x \cos x - \frac{8}{15}\cos x + C$
4. $\int \sin 2x \cdot \cos 4x dx$	$\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 6x}{12} + C$
5. $\int (\cot^2 2x + \cot^4 2x) dx$	$-\frac{1}{6}\cot^3 2x + C$
6. $\int \left(\frac{\sec 3x}{\sin^2 2x}\right)^4 dx$	$\frac{1}{3}\cot 3x + \frac{1}{3}\cot^3 3x + C$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 2x \cdot \cos^4 x}$	$\tan 2x + \frac{1}{6}\tan^3 2x - \frac{1}{2}\cot 2x + C$
8. $\int \cot^3 2x \cdot \operatorname{cosec} 2x dx$	$\frac{1}{2}\ln \tan \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\tan^2 \frac{x}{2} + C$
9. $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$	$\ln\left(1 + \tan \frac{x}{2}\right) + C$
10. $\int \frac{dx}{5 + 4\cos x}$	$\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\tan \frac{x}{2}\right) + C$
11. $\int \frac{dx}{3 + \sin x}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan \frac{x}{2}\right) + C$
12. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 3}$	$\arctan\left(1 + 2\tan \frac{x}{2}\right) + C$
13. $\int \frac{\cos x dx}{5 - 3\cos x}$	$-\frac{x}{3} + \frac{5}{6}\arctan\left(2\tan \frac{x}{2}\right) + C$
14. $\int \frac{dx}{4\sec x + 5}$	$\frac{2}{5}\arctan\left(\tan \frac{x}{2}\right) + \frac{4}{15}\ln\left(\frac{\tan \frac{x}{2} - 3}{\tan \frac{x}{2} + 3}\right) + C$
15. $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$	$\tan x - \sec x + C$
16. $\int \frac{\sec^2 x dx}{1 + \tan x}$	$\ln\|1 + \tan x\| + C$

AŞAĞIDAKİ İNTEGRALLERİ BULUNUZ.

SORULAR	YANITLAR
1. $\int \frac{dx}{\text{cosec}\,2x \cdot \cot 2x}$	$\frac{1}{2}\ln\lvert 1-\cos 2x\rvert + C$
2. $\int \cot^3 2x\,dx$	$-\frac{\text{cos ec}^2 2x}{4} - \frac{1}{2}\ln\lvert \sin 2x\rvert + C$
3. $\int (\tan 2x + \sec 2x)^2 dx$	$\tan 2x + 2\sec 2x - x + C$
4. $\int (\cot x + \tan x)^2 dx$	$-2\cot 2x + C$
5. $\int \sin^2 3x \cdot \sin 6x\,dx$	$\frac{1}{16}\sin^4 3x + C$
6. $\int \cos^6 x\,dx$	$\frac{\cos^5 x \sin x}{6} + \frac{5}{6}\left[\frac{\cos^3 x \sin x}{4}\right] + \frac{15}{24}\left[\frac{\cos x \sin x}{4} + \frac{1}{2}x\right] + C$
7. $\int \frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x + \cos x}dx$	$\ln\sqrt{\sec 2x} + C$
8. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x - \sin x - 2}$	$\ln\sqrt[3]{\frac{\sin x - 2}{\sin x + 1}} + C$
9. $\int \sin x \cos x \cos 2x\,dx$	$-\frac{1}{16}\cos 4x + C$
10. $\int \cos^2 x\,dx$	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$
11. $\int \sin 5x \cdot \sin 3x\,dx$	$\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C$
12. $\int \cos^3 x\,dx$	$\frac{\cos^2 x \sin x + 2\sin x}{3} + C$
13. $\int \frac{dx}{1+\cos 2x}dx$	$\frac{1}{2}\tan x + C$
14. $\int \cos x \sin 3x\,dx$	$-\frac{1}{8}\cos 4x + \cos 2x + C$
15. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx$	$-\frac{2}{\sin 2x} + C$
16. $\int \tan^2 x \sec^2 x\,dx$	$\frac{\tan^3 x - 4\tan x}{3} + C$
17. $\int \frac{\sec x \tan x\,dx}{9 + 4\sec^2 x}$	$\frac{1}{6}\arctan\frac{2\sec x}{3} + C$
18. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2-\cos^2 x}}$	$\arccos\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right) + C$
19. $\int \tan^5 x\,dx$	$\frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} + \ln\lvert\cos x\rvert + C$
20. $\int \tan^3 x \sec^3 x\,dx$	$\frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + C$

KESİRLİ (RASYONEL) FONKSİYON

TANIM: **Pay ve paydası birer polinom fonksiyon olan fonksiyonlara kesirli (rasyonel) fonksiyon denir.**

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{a_mx^ma_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+b_0}$$ **ifadesi bir rasyonel fonksiyondur.**

($n \geq m$) payın paydaya bölünmesiyle kesir, bir polinom ile basit bir rasyonel kesir toplamına çevrilir.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} - \underline{\qquad} & B(x) \\ R(x) & \end{array}$$

bölme işlemine göre $\frac{P(x)}{Q(x)}=B(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$ **olur.**

ÖRNEK

$\frac{3x^2+4x}{x^2+x-2}$ bileşik kesrini **basit kesirlerine ayırınız.**

ÇÖZÜM

Payı paydaya bölelim.

$$\begin{array}{r|l} 3x^2+4x & x^2+x-2 \\ \cline{2-2} \mp\ \ 3x^2\mp 3x\pm 6 & 3 \\ \hline x+6 & \end{array}$$

bu durumda $\frac{3x^2+4x}{x^2+x-2}=3+\frac{x+6}{x^2+x-2}$ şeklinde basit kesirlere ayrılmış olur.

ÖRNEK

$\frac{5x+7}{x-1}$ kesrini **basit kesirlerine ayırınız.**

ÇÖZÜM

Bölme işlemi yapmadan;

$$\frac{5x+7}{x-1}=\frac{5(x-1)+12}{x-1}=5+\frac{12}{x-1}$$ elde edilir.

ÖRNEK

$\frac{x^3}{x^2+2x+10}$ kesrini **basit kesirlerine ayırınız.**

ÇÖZÜM

Payı paydaya bölelim.

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+2x+10 \\ \cline{2-2} \mp\ \ x^3\mp 2x^2\mp 10x & x-2 \\ \hline -2x^2-10x & \\ \mp\ \ 2x^2\pm 4x\pm 20 & \\ \hline -6x+20 & \end{array}$$

$$\frac{x^3}{x^2+2x+10}=x-2+\frac{-6x+20}{x^2+2x+10}$$ *elde edilir*

BASİT KESİRLERE AYIRMA İŞLEMİ

P(x) ve Q(x) birer polinom ve P(x) in derecesi Q(x) in derecesinden büyük ise

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} - & B(x) \\ \cline{1-1} R(x) & \end{array} \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = B(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

iken teorik olarak $\frac{P(x)}{Q(x)}$ basit kesirleri daha basit kesirlere dönüştürülebilir. Elde edilen yeni basit kesirlerin paydasında $(ax+b)^n$ ve $(ax^2+bx+c)^n$ gibi ifadeler bulunur.

Paydanın çarpanlarına göre dört değişik durum vardır.

1. PAYDASINDA FARKLI DOĞRUSAL ÇARPANLAR BULUNDURAN KESİRLER.

KURAL: **Basit kesirlerin paydalarının çarpanlarının hepsinin birinci dereceden ve farklı çarpanlardan oluştuğu durumlarda her $f(x) = ax + b$ gibi bir çarpana karşılık $\frac{A}{ax+b}$ gibi bir kesir vardır. Genel olarak;**

Eğer; $$\frac{P(x)}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots\cdots(a_nx+b_n)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

yazılır. Paydalar eşitlendikten sonra polinomların özdeşliği kullanılarak A_1, A_2, ...A_n reel sayıları belirlenir.

ÖRNEK

$\frac{x}{x^2-3x-4}$ kesrini **basit kesirlerine ayırınız.**

ÇÖZÜM

$\frac{x}{x^2-3x-4} = \frac{x}{(x-4)(x+1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}$ yazılır. Paydalar eşitlenerek;

$= \frac{(x+1)A + (x-4)B}{(x-4)(x+1)}$ ve $x = (x+1)A + (x-4)B$ elde edilir.

$X = -1$ için $-1 = -5B \Rightarrow B = \frac{1}{5}$

$x = 4$ için $4 = 5A \Rightarrow A = \frac{4}{5}$ bulunur

$$\frac{x}{x^2-3x-4} = \frac{\frac{4}{5}}{x-4} + \frac{\frac{1}{5}}{x+1}$$ elde edilir.

ÖRNEK

$\frac{1}{x^2-4}$ ifadesini **basit kesirlerine ayırınız.**

ÇÖZÜM

$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$ olur.

$1 = A(x+2) + B(x-2)$

Buradan

$x = -2$ için $-4B = 1$ $B = -\frac{1}{4}$

$x = 2$ için $4A =$ $A = \frac{1}{4}$ bulunur.

$$= \frac{\frac{1}{4}}{x-2} - \frac{\frac{1}{4}}{x+2}$$ şeklinde basit kesirlere ayrılmış olur.

2. PAYDASINDA $ax^2 + bx + c$ BULUNDURAN KESİRLER

$ax^2 + b + c = 0$ için $\Delta < 0$ ise basit kesrin paydasında $(ax^2 + bx + c)$ gibi çarpanlar varsa her $ax^2 + bx + c$ çarpanı için $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ şeklinde bir kesir karşı gelir.

ÖRNEK

$\dfrac{x+3}{(x^2+1)x}$ ifadesini **basit kesirlerine ayırınız.**

ÇÖZÜM

$\dfrac{x+3}{(x^2+1)x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ yazılarak paydalar eşitlenirse

$= \dfrac{(x^2+1)A + x(Bx+C)}{x(x^2+1)}$ olur. Paydalar atılarak

$x + 3 = (x^2+1)A + x(Bx+C)$

$x + 3 = (A+B)x^2 + Cx + A$ polinomların denklik özelliği kullanılarak

$\left.\begin{aligned} A+B&=0 \\ C&=1 \\ A&=3 \end{aligned}\right\}$ eşitliklerinden $A = 3 \quad B = -3 \quad C = 1$ olarak bulunur.

$\dfrac{x+3}{(x^2+1)x} = \dfrac{3}{x} + \dfrac{-3x+1}{x^2+1}$ elde edilir.

ÖRNEK

$\dfrac{x^2+2}{x^3-1}$ ifadesini **basit kesirlerine ayırınız.**

ÇÖZÜM

$\dfrac{x^2+2}{x^3-1} = \dfrac{x^2+2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$ yazılır. Paydalar eşitlenirse

$= \dfrac{(x^2+x+1)A + (x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2+x+1)}$ olur. Paydalar atılarak,

$x^2 + 2 = (x^2+x+1)A + (x-1)(Bx+C)$ olur.

Polinomların özdeşliği kullanılarak elde edilen denklemler çözülerek $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$ olur.

$\dfrac{x^2+2}{x^3-1} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x^2+x+1}$ elde edilir.

3. PAYDASINDA TEKRARLANAN DOĞRUSAL ÇARPANLAR BULUNDURAN KESİRLER

Basit kesrin paydasında sadece (ax + b) gibi n defa tekrarlanan doğrusal çarpan varsa:

$$\frac{f(x)}{(ax+b)^n}=\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\dots+\frac{A_{n-1}}{(ax+b)^{n-1}}+\frac{A_n}{(ax+b)^n} \quad \textbf{yazılır.}$$

A_1, A_2, ...A_n gerekli işlemler yapılarak bulunur.

Basit kesrin paydasında (ax + b) n defa (mx + n) k defa tekrarlanıyorsa,

$$\frac{f(x)}{(ax+b)^n(mx+n)^k}=\frac{A_1}{ax+b}+\dots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}+\frac{B_1}{(mx+n)}+\dots+\frac{B_k}{(mx+n)^k} \quad \textbf{yazılır.}$$

A_1, A_2, ..., A_n ve B_1, B_2, ..., B_k gerekli işlemler yapılarak bulunur.

ÖRNEK

$\dfrac{x+2}{(x-1)^3}$ kesrini **basit kesirlerine ayırınız.**

ÇÖZÜM

$\dfrac{x+2}{(x-1)^3}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{(x-1)^3}$ paydalar eşitlenerek;

$x+2=A(x-1)^2+B(x-1)+C$ elde edilir. Polinomların özdeşliğine göre,

$x+2=A(x-1)^2+B(x-1)+C$

$A=0 \quad B=1 \quad C=3 \Rightarrow \dfrac{x+2}{(x-1)^3}=\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{(x-1)^3}$

ÖRNEK

$\dfrac{x^3+1}{x(x-1)^3}$ kesrini **basit kesirlerine ayırınız.**

ÇÖZÜM

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{\underset{(x-1)^3}{x}}+\frac{B}{\underset{(x)}{(x-1)^3}}+\frac{C}{\underset{x(x-1)}{(x-1)^2}}+\frac{D}{\underset{x(x-1)^2}{x-1}}$$

$x^3+1=(A+D)x^3+(-3A+C-2D)x^2+(3A+B-C+D)x-A$ bulunur.

$$\left.\begin{aligned} A+D&=1\\ -3A+C-2D&=0\\ 3A+B-C+D&=0\\ -A&=1 \end{aligned}\right\} \text{denklem sistemi çözülerek;}$$

$A=-1$, $B=2$, $C=1$, $D=2$

$\dfrac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\dfrac{-1}{x}+\dfrac{2}{(x-1)^3}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{x-1}$ bulunur.

ÖRNEK $\dfrac{1}{x^3-x}$ kesrini **basit kesirlerine ayırınız.**

ÇÖZÜM $\dfrac{1}{x^3-x}=\dfrac{1}{x(x^2-1)}=\dfrac{1}{x(x-1)(x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}$ yazılır. Paydalar eşitlenirse;

$$\frac{1}{x^3-x}=\frac{(x-1)(x+1)A+x(x+1)B+x(x-1)C}{x(x-1)(x+1)}$$

Paydalar atılarak $1=(x-1)(x+1)A+x(x+1)B+x(x-1)C$ bulunur.

Polinomların özdeşliğine göre,

$x=0$ için $1=-A \Rightarrow A=-1$

$x=1$ için $1=2B \Rightarrow B=\dfrac{1}{2}$

$x=-1$ için $1=2C \Rightarrow C=\dfrac{1}{2}$ bulunur.

Bulunan değerler yerine yazılarak;

$$\frac{1}{x^3-x}=\frac{-1}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}$$ elde edilir.

4. PAYDASINDA $(ax^2+bx+c)^n$ BULUNDURAN KESİRLER

kesir $\dfrac{f(x)}{(ax^2+bx+c)^n}$ ise

$$\frac{f(x)}{(ax^2+bx+c)^n}=\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\dots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$ **şeklinde yazılarak**

gerekli işlemlerde A_1, A_2 ....A_n ve B_1, B_2, ... B_n gerçel sayıları belirlenir.

ÖRNEK $\dfrac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}$ kesrini **basit kesirlerine ayırınız.**

ÇÖZÜM $\dfrac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}=\dfrac{Ax+B}{(x^2+1)}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$ olur. Payda eşitleme ve sadeleştirme işlemleri yapılarak

$2x^3+x+3=Ax^3+Bx^2+(A+C)x+B+D$ elde edilir. Buradan da

$A=2$ $B=0$ $C=-1$ $D=3$ bulunur.

$$\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{-x+3}{(x^2+1)^2}$$ şeklinde basit kesirlerine ayrılmış olarak yazılır.

ÖRNEK $\dfrac{x^2+x+2}{\left(x^2+2x+3\right)^2}$ kesrini **basit kesirlerine ayırınız.**

ÇÖZÜM $\dfrac{x^2+x+2}{\left(x^2+2x+3\right)^2}=\dfrac{Ax+B}{x^2+2x+3}+\dfrac{Cx+D}{\left(x^2+2x+3\right)^2}$ yazılır. Paydalar eşitlenirse

$$\frac{x^2+x+2}{\left(x^2+2x+3\right)^2}=\frac{(Ax+B)\left(x^2+2x+3\right)+Cx+D}{\left(x^2+2x+3\right)^2}$$

$x^2+x+2=(Ax+B)(x^2+2x+3)+Cx+D$ eşitliğinden gerekli işlemler yapılır.

Polinomların özdeşliğine göre:

$A=0 \quad B=1 \quad C=-1 \quad D=-1$ bulunur.

Böylece $\dfrac{x^2+x+2}{\left(x^2+2x+3\right)^2}=\dfrac{1}{x^2+2x+3}-\dfrac{x+1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}$ şeklinde basit kesirlerine ayrılmış olarak yazılır.

BASİT KESİRLERE AYIRARAK İNTEGRAL ALMA YÖNTEMİ

$\int \dfrac{P(x)}{Q(x)}dx$ integralinde P(x) ve Q(x) birer polinom, integrant $\left(\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right)$ mümkün olan basit kesirlerine ayırma işlemi uygulanarak basit kesirlerin toplamı veya farkı biçiminde yazılır. Sonra integral alma işlemine geçilir.

Şimdi bu yöntemle ilgili örnekleri verelim.

ÖRNEK $\int \dfrac{x}{x+2}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{x+2-2}{x+2}=1-\dfrac{2}{x+2}$

$$\int \frac{x}{x+2}dx=\int\left(1-\frac{2}{x+2}\right)dx$$

$$=\int dx-2\int\frac{1}{x+2}dx$$

$$=x-2\ln|x+2|+C$$

ÖRNEK $\int \dfrac{2x+6}{x+4}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\dfrac{2x+6}{x+4}=\dfrac{2x+6+2-2}{x+4}=\dfrac{2(x+4)}{x+4}-\dfrac{2}{x+4}=2-\dfrac{2}{x+4}$

$$\int\frac{2x+6}{x+4}dx=\int\left(2-\frac{2}{x+4}\right)dx=2\int dx-2\int\frac{1}{x+4}dx$$

$$=2x-2\ln|x+4|+C$$

ÖRNEK $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{x^2+1}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\frac{x^2+4}{x^2+1}=\frac{x^2+1+3}{x^2+1}=1+\frac{3}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x^2+4}{x^2+1}dx=\int\left(1+\frac{3}{x^2+1}\right)dx=\int dx+3\int\frac{1}{x^2+1}dx=x+3\arctan x+C$$

ÖRNEK $\displaystyle\int \frac{x^3+3x^2+2x+4}{x+1}dx$ **integralini bulunuz.**

$$\begin{array}{l|l} x^3+3x^2+2x+4 & x+1 \\ \hline \mp\ \mp x^3 \mp x^2 & x^2+2x \\ \hline \quad 2x^2+2x+4 & \\ +\quad \mp 2x^2 \mp 2x & \\ \hline \qquad\qquad 4 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3+3x^2+2x+4}{x+1}=x^2+2x+\frac{4}{x+1}$$

$$\int \frac{x^3+3x^2+2x+4}{x+1}dx=\int\left(x^2+2x+\frac{4}{x+1}\right)dx$$

$$=\int\left(x^2+2x\right)dx+4\int\frac{dx}{x+1}$$

$$=\frac{x^3}{3}+x^2+4\ln|x+1|+C \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+4}{x^3+x^2-2x}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$x^3+x^2-2x=x(x^2+x-2)=x(x+2)(x-1)$$

$$\frac{x^2-2x+4}{x^3+x^2+2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-1}$$

$x^2-2x+4=A(x+2)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+2)$ eşitliğinden

$x=1$ için $3=3C \Rightarrow C=1$

$x=0$ için $4=-2A \Rightarrow A=-2$

$x=-2$ için $12=6B \Rightarrow B=2$ değerleri bulunur.

$$\int \frac{x^2-2x+4}{x^3+x^2-2x}dx=\int\frac{-2}{x}dx+\int\frac{2}{x+2}dx+\int\frac{1}{x-1}dx$$

$$=-2.\ln|x|+2\ln|x+2|+\ln|x-1|+C \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK

$\int \dfrac{x^2+4x+2}{(x+1)^3}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\frac{x^2+4x+2}{(x+1)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}$$

$$\frac{x^2+4x+2}{(x+1)^3}=\frac{A(x+1)^2+B(x+1)+C}{(x+1)^3}$$

$x^2+4x+2=Ax^2+(2A+B)x+A+B+C$ eşitliğinden

$A=1,\ B=2,\ C=-1$ bulunur.

$$\int\frac{x^2+4x+2}{(x+1)^3}dx=\int\frac{1}{x+1}dx+2\int\frac{1}{(x+1)^2}-\int\frac{1}{(x+1)^3}dx$$

$$=\int\frac{1}{x+1}dx+2\int\frac{1}{(x+1)^2}-\int\frac{1}{(x+1)^3}dx$$

$x+1=u$ denirse

$dx=du$

$$=\ln|x+1|+2\cdot\int u^{-2}du-\int u^{-3}du$$

$$=\ln|x+1|+2\frac{u^{-1}}{-1}-\frac{u^{-2}}{-2}+C$$

$$=\ln|x+1|-2\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+C \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\int\dfrac{x+2}{x^2(x+1)(x-1)^2}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\frac{x+2}{x^2(x+1)(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{(x-1)^2}$$

$x+2=Ax(x+1)(x-1)^2+B(x+1)(x-1)^2+Cx^2(x-1)^2+Dx^2(x+1)(x-1)+Ex^2(x+1)$

$x=0$ için $2=B \Rightarrow B=2$

$x=-1$ için $1=4C \Rightarrow C=\dfrac{1}{4}$

$x=1$ için $3=2E \Rightarrow E=\dfrac{3}{2}$

$x=2$ için $4=6A+3B-4C+12D+12E$

$x=-2$ için $0=18A-9B+36C+12D-4E$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse $A=2$ ve $D=-\dfrac{39}{12}$ bulunur. Buna göre,

$$\int\frac{x+2}{x^2(x+1)(x-1)^2}dx=3\int\frac{1}{x}dx+2\int\frac{1}{x^2}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{39}{12}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x-1)^2}dx$$

$$=3\ln|x|-\frac{2}{x}+\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{39}{12}\ln|x-1|-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+C \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\int \frac{3x^2+5x-7}{(x+1)(x^2+2)}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\frac{3x^2+5x-7}{(x+1)(x^2+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$\frac{3x^2+5x-7}{(x+1)(x^2+2)}=\frac{A(x^2+2)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+2)}$$

$$3x^2+5x-7=(A+B)x^2+(B+C)x+2A+C$$

$A+B=3$

$B+C=5$

$2A+C=-7$ *denklemleri çözülerek*

$3A=-9 \Rightarrow A=-3,\quad B=6,\quad C=-1$ bulunur.

$$\int \frac{3x^2+5x-7}{(x+1)(x^2+2)}dx=-3\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{6x-1}{x^2+2}dx$$

$$=-3\int\frac{1}{x+1}dx+3\int\frac{2x}{x^2+2}dx-\int\frac{1}{x^2+2}dx$$

$$=-3\int\frac{1}{x+1}dx+3\int\frac{2x}{x^2+2}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}dx$$

$$=-3\ln|x+1|+3\ln(x^2+2)-\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C$$

İRRASYONEL FONKSİYONLARIN İNTEGRALLERİ

KURAL: **m_i ve $n_i \in Z$ olmak üzere, integrantında $(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, \cdots,$ biçimindeki ifadeleri bulunduran integrallerde $\text{Okek}(n_1, n_2, n_3, \cdots)=S$ olmak üzere, $(ax+b)=t^S$ dönüşümü yapılır.**

ÖRNEK $\int x^2\sqrt{x+3}\,dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x+3=t^2 \Rightarrow dx=2tdt$

$$\int x^2\sqrt{x+3}\,dx=\int (t^2-3)^2\sqrt{t^2}\,2tdt=2\int (t^4-6t^2+9)t^2dt$$

$$=2\int (t^6-6t^4+9t^2)dt=2\left(\frac{1}{7}t^7-\frac{6}{5}t^5+\frac{9}{3}t^3\right)+C$$

$$=\frac{2}{7}\left(\sqrt{x+3}\right)^7-\frac{12}{5}\left(\sqrt{x+3}\right)^5+6\left(\sqrt{x+3}\right)^3+C \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\int \frac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $2x+1=t^6 \Rightarrow 2dx = 6.t^5dt$

$\sqrt[6]{2x+1}=t \Rightarrow dx = 3t^5dt$

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt[3]{2x+1}}dx = \int \frac{\sqrt{t^6}+3}{\sqrt[3]{t^6}}\cdot 3t^5dt = \int \frac{t^3+3}{t^2}\cdot 3t^5dt = 3\int \left(t^6+3t^3\right)dt = 3\left(\frac{1}{7}t^7+\frac{3}{4}t^4\right)+C$$

$$= \frac{3}{7}\left(\sqrt[6]{2x+1}\right)^7 + \frac{9}{4}\left(\sqrt[6]{2x+1}\right)^4 + C$$

ÖRNEK $\int \frac{\sqrt[3]{3x+2}}{\sqrt[4]{3x+2}}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $3x+2=t^{12} \Rightarrow 3dx = 12t^{11}dt$

$$\int \frac{\sqrt[3]{3x+2}}{\sqrt[4]{3x+2}} = \int \frac{\sqrt[3]{t^{12}}}{\sqrt[4]{t^{12}}}4\cdot t^{11}dt = 4\int \frac{t^4}{t^3}t^{11}dt = 4\int t^{12}dt = \frac{4}{13}t^{13}+C$$

$$= \frac{4}{13}\left(\sqrt[12]{3x+2}\right)^{13}+C$$

ÖRNEK $\int x^3\sqrt{x^2+6}\,dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x^2+6=t^2 \Rightarrow 2xdx = 2tdt$

$$dx = \frac{t}{x}dt$$

$$\int x^3\sqrt{x^2+6} = \int x^2\sqrt{x^2+6}\,xdx = \int \left(t^2-6\right)\sqrt{t^2}\cdot x\frac{t}{x}dt = \int \left(t^2-6\right)t^2dt = \int \left(t^4-6t^2\right)dt$$

$$= \frac{1}{5}t^5 - \frac{6}{3}t^3 + C = \frac{1}{5}\left(x^2+6\right)^{\frac{5}{2}} - 2\left(x^2+6\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

UYARI: 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ biçimindeki ifadelerin integralleri temel integral formüllerine benzetilerek hesaplanır.

2) $\int \frac{dx}{(a-x)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ biçimindeki integrallerde $x-a=\frac{1}{t}$ $dx=-\frac{dt}{t^2}$ dönüşümü yapılır.

3) $\int \frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (P(x): n. dereceden bir polinom) biçimindeki integraller

Q(x): $(n-1)$. dereceden bir polinom olmak üzere,

$I = \int \frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q(x).\sqrt{ax^2+bx+c} + k\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ yazılarak k, Q(x) belirsiz katsayılar teoremine göre belirlenir ve integral işlemine geçilir.

ÖRNEK $I = \int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM Uyarı 3 ü kullanalım.

$$I = \int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \left(ax^2+bx+c\right)\cdot\sqrt{x^2+2x+2} + k\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} \text{ yazılır.}$$

İki tarafın diferansiyeli alınırsa;

$$\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}} = (2ax+b)\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right) + \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}}\cdot\left(ax^2+bx+C\right) + \frac{k}{\sqrt{x^2+2x+2}} \text{ olur.}$$

$$= (2ax+b)\left(x^2+2x+2\right) + (x+1)\left(ax^2+bx+c\right) + k$$

$$x^3+2x^2+3x+4 = 3ax^3 + (5a+2b)x^2 + (4a+3b+c)x + 2b+c+k \text{ özdeşliğinden}$$

$$3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$5a+2b = 2 \Rightarrow b = \frac{1}{6}$$

$$4a+3b+c = \Rightarrow \frac{4}{3}+\frac{1}{2}+c = 3 \Rightarrow c = \frac{7}{6}$$

$$2b+c+k = 4 \Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{7}{6}+k = 4 \Rightarrow k = \frac{5}{2}$$

bu belirlemelere göre,

$$I = \left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{5}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}}_{I_1} \text{ yazılır.}$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1^2}}$$

$u = x+1$ seçilirse
$du = dx$ olur.

$$= \int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right) + C_1 \text{ olduğundan } u = x+1 \text{ yerine yazılırsa}$$

$$= \ln\left[x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right] + C_1$$

Bu durumda

$$I = \left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{5}{2}\ln\left[x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right] + C \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $I=\int \frac{1+\sqrt{\cos x}}{\sin x}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\sqrt{\cos x}=t \Rightarrow \cos x = t^2$

$$-\sin x dx = 2tdt$$

$\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$ olduğundan

$$-\sin x dx = 2tdt \Rightarrow -\sqrt{1-\cos^2 x}\,dx = 2tdt$$

$$-\sqrt{1-t^4}\,dx = \frac{-2t}{\sqrt{1-t^4}}$$

Bu belirlemelere göre,

$$I=\int \frac{1+t}{\sqrt{1-t^4}}\cdot\frac{2t}{-\sqrt{1-t^4}}dt=-2\int\frac{t+t^2}{1-t^4}dt$$

$$I=-2\int\frac{t(1+t)}{(1-t)(1+t^2)}dt$$

$$\frac{t}{(1-t)(1+t^2)}=\frac{A}{1-t}+\frac{Bt+C}{1+t^2}$$

$$\frac{t}{(1-t)(1+t^2)}=\frac{A(1+t^2)+(Bt+C)(1-t)}{(1-t)(1+t^2)}$$

$$t=At^2-Bt^2+Bt-Ct+A+C$$

$$t=t^2(A-B)+t(B-C)+A+C$$

Polinomların özdeşliğine göre

$\left.\begin{array}{l}A-B=0\\B-C=1\\A+C=0\end{array}\right\}$ sistemi çözülerek $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{2}$, $C=-\frac{1}{2}$ bulunur.

$$I=-2\left[\int\frac{\frac{1}{2}}{1-t}dt+\int\frac{\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}}{1+t^2}dt\right]$$

$$=-2\left[\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-t}+\frac{1}{2}\int\frac{t-1}{1+t^2}dt\right]$$

$$=\ln|1-t|-\frac{1}{2}\ln|1+t^2|+\arctan t+C$$

$$=\ln\left|1-\sqrt{\cos x}\right|-\frac{1}{2}\ln|1+\cos x|+\arctan\sqrt{\cos x}+C \text{ olur.}$$

AŞAĞIDAKİ İNTEGRALLERİ BULUNUZ.

SORULAR	YANITLAR
1. $\int \frac{x+3}{x+2}dx$	$x+\ln\lvert x+2\rvert+C$
2. $\int \frac{x+2}{x(x^2-4)}dx$	$\ln\sqrt{\frac{x-2}{x}}+C$
3. $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$	$\ln\left\lvert\frac{x-2}{x-1}\right\rvert+C$
4. $\int \frac{x+2}{x^2-1}dx$	$\ln\left(\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x+1}}\right)+C$
5. $\int \frac{2dx}{x^2+x}$	$\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+C$
6. $\int \frac{x}{x^2+3x+2}dx$	$\ln\left(\frac{(x+2)^2}{x+1}\right)+C$
7. $\int \frac{x}{(x-2)^2}dx$	$\ln\lvert x-2\rvert-\frac{2}{x-2}+C$
8. $\int \frac{x^3+6x^2+6}{x^2+1}dx$	$\left(\frac{x^2}{2}+6x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C\right)$
9. $\int \frac{dx}{x^3+2x^2+x}$	$\ln\left\lvert\frac{x}{x+1}\right\rvert+\frac{1}{x+1}+C$
10. $\int \frac{5-x}{x^2-x-2}dx$	$\ln\left(\frac{x-2}{(x+1)^2}\right)+C$
11. $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$	$\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+2}+C$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$	$2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}+\ln\left(\sqrt[4]{x}-1\right)^4+C$
13. $\int x^5\sqrt{1-x^3}\,dx$	$\frac{2}{15}(1-x^3)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{9}(1-x^3)^{\frac{3}{2}}+C$
14. $\int (x-1)\ln x\,dx$	$\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}+x+C$
15. $\int x^3\ln x\,dx$	$\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{x^4}{16}+C$

AŞAĞIDAKİ İNTEGRALLERİ BULUNUZ.

SORULAR	YANITLAR
1. $\int \frac{dx}{x^2-9}$	$\frac{1}{6}\ln\left\|\frac{x-3}{x+3}\right\|+C$
2. $\int \frac{dx}{x^2-1}$	$\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\|+C$
3. $\int \frac{x^2+2}{x+1}dx$	$\frac{x^2}{2}-x+3\ln\|x+1\|+C$
4. $\int \frac{(x^3+3x)dx}{x^2+1}$	$\frac{x^2}{2}+\ln(x^2+1)+C$
5. $\int \frac{4dx}{x^4-1}$	$\ln\frac{x-1}{x+1}-2\arctan x+C$
6. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$	$\ln\|x\|-\arctan x+C$
7. $\int \frac{x^5}{(x^2+4)^2}dx$	$\frac{x^2}{2}-4\ln(x^2+4)-\frac{8}{x^2+4}+C$
8. $\int \frac{(2x^2+3x+2)dx}{(x+2)(x^2+2x+2)}$	$2\ln(x+2)-\arctan(x+1)+C$
9. $\int \frac{dx}{x^3-x^2-6x}$	$-\frac{1}{6}\ln\|x\|+\frac{1}{5}\ln\|x-3\|-\frac{1}{30}\ln\|x+2\|+C$
10. $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$	$-\frac{1}{x}-\arctan x+C$
11. $\int \frac{2xdx}{(x^2+1)(x+1)^2}$	$\arctan x+\frac{1}{x+1}+C$
12. $\int \frac{(x^3+3x)dx}{(x^2+1)^2}$	$\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{x^2+1}+C$
13. $\int \frac{(x-18)dx}{4x^3+9x}$	$\ln\frac{4x^2+9}{x^2}+\frac{1}{6}\arctan\frac{2x}{3}+C$
14. $\int \frac{(x^5+4x^3)dx}{(x^2+2)^3}$	$\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+\frac{1}{(x^2+2)^2}+C$
15. $\int \frac{(x^2+x)dx}{(x-1)(x^2+1)}$	$\ln\|x-1\|+\arctan x+C$

İNTEGRAL HESABININ TEMEL TEOREMLERİ

1. BİRİNCİ TEMEL TEOREM (İNTEGRAL FONKSİYONUNUN TÜREVİ)

KURAL–1: h ve g, x in türevlenebilen fonksiyonları olmak üzere;

$$F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt \Rightarrow F'(x)=g'(x)\cdot f(g(x))-h'(x)\cdot f(h(x))$$

KURAL–2: $F(x)=\int_{a}^{g(x)} f(t)dt \Rightarrow F'(x)=g'(x)\cdot f(g(x))$

KURAL–3: $F(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt \Rightarrow F'(x)=f(x)$

ÖRNEK $F(x)=\int_{x^2}^{2x+1} 2^{t^3}dt \Rightarrow F'(1)$ **değeri nedir?**

ÇÖZÜM Kural–1 uygulanırsa,

$$F'(x)=(2x+1)'\cdot 2^{(2x+1)^3}-(x^2)'\cdot 2^{(x^2)^3}$$

$$F'(x)=2\cdot 2^{(2x+1)^3}-2x\cdot 2^{x^6}$$

$$F'(1)=2\cdot 2^{27}-2\cdot 2^1$$

$$F'(1)=2^{28}-2^2 \Rightarrow F'(1)=2^2(2^{26}-1)$$

ÖRNEK $f(x)=\int_2^{3x}(t^2+2t+1)dt$ ise **f′(−1) nedir?**

ÇÖZÜM $f'(x)=f(3x)\cdot(3x)'-f(2)\cdot(2)'$

$$f'(x)=(9x^2+6x+1)\cdot 3-(4+4+1)\cdot 0$$

$$f'(x)=27x^2+18x+3 \Rightarrow f'(-1)=27(-1)^2+18(-1)+3=12$$

ÖRNEK $\frac{d}{dx}\left(\int_2^{4x}\sqrt{t^2-2t}\,dt\right)$ **ifadesinin eşitini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\frac{d}{dx}\left(\int_2^{4x}\sqrt{t^2-2t}\,dt\right)=\sqrt{16x^2-8x}\,(4x)'-\sqrt{4-4}\cdot(2)'$

$$=4\sqrt{16x^2-8x}=8\sqrt{4x^2-2x} \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$f(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x^2} t^2 \cdot 2^t \cdot dt$ ise **f′(1) değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$f'(x)=x^4 \cdot 2^{(x^2)}(x^2)'-\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}\right)' \cdot 2^{\frac{1}{x}}$

$=2x^5 \cdot 2^{(x^2)}+\frac{1}{x^4} \cdot 2^{\frac{1}{x}}$

$f'(1)=2 \cdot 1^5 \cdot 2^{1^2}+\frac{1}{1^4} \cdot 2^{\frac{1}{1}}=4+2=6$

ÖRNEK

$f(x)=\int_{-2}^{x^2}\frac{dt}{t^2+1}$ biçimindeki **f fonksiyonunun grafiğinin x = 1 deki teğetinin eğimi kaçtır?**

ÇÖZÜM

$f'(x)=\frac{1}{x^4+1}2x-\frac{1}{4+1} \cdot (-2)'$

$f'(x)=\frac{2x}{x^4+1}$

Teğetin eğimi f′(1) dir.

$f'(1)=\frac{2 \cdot 1}{1^4+1}=1$

ÖRNEK

$\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{\sin x} t^2 dt$, $x=\frac{\pi}{4}$ için **neye eşittir?**

ÇÖZÜM

$\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{\sin x} t^2 dt=(\sin x)' \sin^2 x-(\cos x)' \cdot \cos^2 x$

$=\cos x \cdot \sin^2 x+\sin x \cdot \cos^2 x$

$=\cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin^2\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos^2\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$=\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{4}=\frac{2\sqrt{2}}{4}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ÖRNEK $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^2}\sqrt{1+u^4}\,du$ ifadesinin **eşitini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^2}\sqrt{1+u^4}\,du = 2x\cdot\sqrt{1+\left(x^2\right)^4} = 2x\sqrt{1+x^8}$

ÖRNEK $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_3^{\ln t} r\sin r\,dr$ ifadesinin **eşitini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_3^{\ln t} r\sin r\,dr = (\ln t)'\cdot\ln t\cdot\sin(\ln t) = \dfrac{\ln t\cdot\sin(\ln t)}{t}$

2. İKİNCİ TEMEL TEOREM (BELİRLİ İNTEGRAL)

f, [a, b] aralığında tanımlı ve integrali alınabilen bir fonksiyon $x \in [a, b]$ için $F'(x) = f(x)$ olacak şekilde sürekli bir F: $[a, b] \to R$ fonksiyonu varsa:

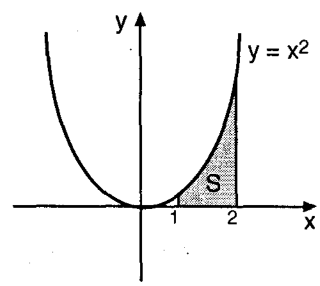
$$\boxed{\int_a^b f(x) = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}\ \textbf{dır.}$$

ÖRNEK $\displaystyle\int_1^2 x^2dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\displaystyle\int_1^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

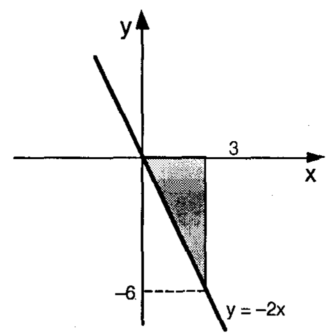
Bulduğumuz integralin hangi alan olduğunu bir de grafik ile görelim.

Alanını hesapladığımız düzlemsel bölge, x ekseninin üst tarafında olduğundan alanın pozitif çıktığına dikkat ediniz.



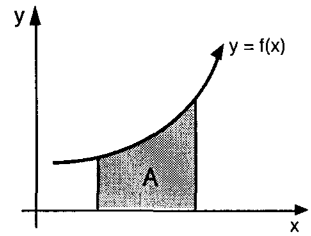
ÖRNEK $\displaystyle\int_0^3 -2x\,dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\displaystyle\int_0^3 -2x\,dx = -2\frac{x^2}{2}\Big]_0^3 = -(9-0) = -9$ integralinin sonucu negatif çıktığında integral ile bulduğumuz sayının x ekseninin alt tarafında kalan bir düzlemsel bölgenin alanı olduğunu yandaki grafikte görmekteyiz.



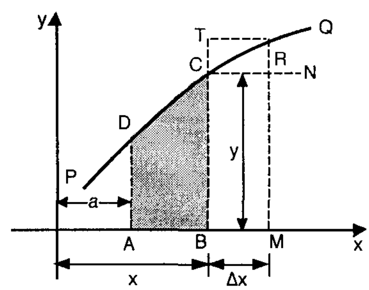
BELİRLİ İNTEGRAL VE UYGULAMALARI

BİR EĞRİ ALTINDAKİ ALAN



Bir dikdörtgenin, üçgenin, çemberin sınırladığı bölgelerin alanlarını veren formüller vardır. Fakat şekildeki gibi bir eğri ile sınırlanan A bölgesinin alanının bulunuşu ile ilgili herhangi bir formül yoktur.

Şimdi bu tür alanların nasıl hesaplanacağını göreceğiz.



Yanda grafiği verilen y = f(x) fonksiyonunun bir kolu $\overset{\frown}{PQ}$olsun.

[AD] sabit, [BC] değişken bir ordinat ve S, ABCD alanını göstersin. x e Δx artımı verildiğinde S de ΔS artımı (BMRC alanı) alır. Buradan.

BMNC alanı < ΔS < BMRT alanı veya

$|BC| \cdot \Delta x < \Delta S < |MR| \cdot \Delta x$ (her terim Δx e bölünerek)

$BC < \dfrac{\Delta S}{\Delta x} < MR$ bulunur.

$\Delta x \to 0$ için |BC| sabit kalır. $|MR| \to |BC|$ olacağından, $\dfrac{dS}{dx} = y = |BC|$ veya diferansiyel olarak; ds=ydx elde edilir.

Bu bağıntıya **bir eğri altındaki alanın diferansiyeli** denir.

Eğer; $\int f(x)dx = F(x) + C$ ise

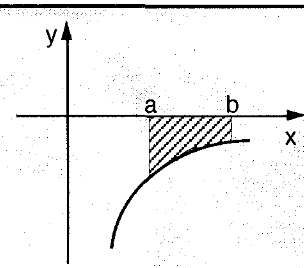
$\int_a^b f(x)dx = F(x) + C \Big]_a^b$ biçiminde yazılır. x yerine önce üst sınır b , sonra alt sınır a yazılarak ;

$$= (F(b) + C) - (F(a) + C) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ bulunur.}$$

UYARI: Alanı hesaplanan bölge şekilde görüldüğü gibi x ekseninin alt tarafında (3. veya 4. bölgede) ise integral negatif çıkar fakat alan pozitiftir.

Bu nedenle (a, b) aralığında tanımlı ve sürekli bir y = f(x) fonksiyonunun grafiği, x = a, x = b doğruları ve x ekseni ile sınırlanan düzlemsel bölgenin alanı S ise

$$\boxed{S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|} \text{ olur.}$$



RİEMANN TOPLAMI (BELİRLİ İNTEGRALİN TOPLAMA İŞLEMİ OLARAK TANIMI)

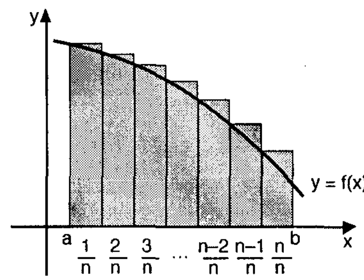
İntegral işlemini türev alma işleminin tersi olarak gördük. Halbuki integral hesabının bir çok uygulamalarında integrasyon bir toplama işlemi olarak tanımlanır. Gerçekten eğrilerle sınırlı alan hesaplanırken istenilen alan sonsuz sayıda alana bölünerek hesaplanabilir. Bu işlem yapılırken integralin bir toplama işlemi olduğu görülmüştür.

Şimdi belirli integralin bir toplama işlemi olduğunu açıklayalım.

Eğer F(x) in türevi f(x) ise

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ integralinin f(x) eğrisi, x ekseni, x = a, x = b doğuları ile sınırlı alan olduğunu görmüştük.

Şekildeki [a,b] aralığı n kadar bölünse ve bölüm noktalarının apsislerine karşılık olan y = f(x) üzerindeki ordinatlar belirlenip her noktadan x eksenine paraleller çizilerek n tane dikdörtgen elde edilir. n sınırsız arttığında bu dikdörtgenlerin alanları toplamının limiti eğri altındaki alana eşit olur.



Bu ardışık iç aralıklar;

$\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots, \Delta x_n$ ve

iç aralıklarda alınan noktaların apsisleri

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ile gösterirsek;

bu noktalardaki ordinatlar:

$f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_n)$ olur.

Ardışık dikdörtgenlerin alanları:

$f(x_1)\cdot \Delta x_1, f(x_2)\cdot \Delta x_2, \ldots, f(x_n)\cdot \Delta x_n$ olur.

$f(x_1)\cdot \Delta x_1 + f(x_2)\cdot \Delta x_2 + \ldots + f(x_n)\cdot \Delta x_n$ bu dikdörtgenlerin alanları toplamıdır.

n olabildiğince artırıldığında yani n $+\infty$ a yaklaştırıldığında

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(f(x_1)\cdot\Delta x_1 + f(x_2)\cdot\Delta x_2 + \cdots + f(x_n)\Delta x_n\right)$ toplamı, y = f(x) ile sınırlanan alana eşit olur.

Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} f(x_1)\cdot\Delta x_1 + f(x_2)\cdot\Delta x_2 + \cdots + f(x_n)\cdot\Delta x_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx \text{ yazılabilir.}$$

Bu da integralin toplama işlemi olarak tanımlanabileceğini gösterir.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x_k$ ifadesine **Riemann Toplamı** denir.

BELİRLİ İNTEGRAL İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

1) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

2) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (a<c<b)$

4) $\int_a^a f(x)dx = 0$

5) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

BELİRLİ İNTEGRALLERLE İLGİLİ ÖRNEKLER

ÖRNEK $\int_1^2 (3x^2+4x-5)dx$ **integralini hasaplayınız.**

ÇÖZÜM $\int_1^2 (3x^2+4x-5)dx = x^3+2x^2-5x\Big]_1^2$

$$=(2^3+2.2^2-5.2)-(1^3+2.1^2-5.1)=6+2=8$$

ÖRNEK $\int_{\ln 4}^{\ln 7} e^x dx$ **integralini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM $\int_{\ln 4}^{\ln 7} e^x dx = e^x\Big]_{\ln 4}^{\ln 7} = e^{\ln 7} - e^{\ln 4} = 7-4=3$

ÖRNEK $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x}$ **integralini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x} = \ln x\Big]_1^{e^2} = \ln e^2 - \ln 1 = 2-0=2$

ÖRNEK $\int_0^1 (e^{2x}+3x^2)dx$ **integralini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM $\int_0^1 (e^{2x}+3x^2)dx = \left(\frac{1}{2}e^{2x}+x^3\right)\Big]_0^1 = \left(\frac{1}{2}e^2+1\right)-\left(\frac{1}{2}e^0+0\right)$

$$=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(e^2+1)$$

ÖRNEK $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \cos 2t dt$ **integralini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \cos 2t\,dt = \frac{1}{2}\sin 2t \Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \frac{1}{2}\left(\sin 2\pi - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

ÖRNEK $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du$ **integralini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u\,du = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2u}{2} du = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2u)du = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{2}\sin 2u\right)\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{\sin 2\frac{\pi}{2}}_{0}\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\sin 0}_{0}\right)\right] = \frac{\pi}{4}$$

ÖRNEK $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dk}{1+k^2}$ **integralini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dk}{1+k^2} = \arctan k \Big]_{1}^{\sqrt{3}} = \arctan\sqrt{3} - \arctan 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

ÖRNEK $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$ **integralini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x|\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \ln|\cos 0|\right)$

$$= \ln 1 - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = +\ln\sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\int_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$ **integralini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM $\int_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{3-x}} = \int_{0}^{3} (3-x)^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{(3-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg]_{0}^{3} = 2.(3-x)^{\frac{1}{2}}\Big]_{3}^{0}$

$$= 2\left[(3-0)^{\frac{1}{2}} - (3-3)^{\frac{1}{2}}\right] = 2\sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\int_{2}^{4} \frac{t-1}{\sqrt{t}-1} dt$ **integralini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM $\int_{2}^{4} \frac{t-1}{\sqrt{t}-1} dt = \int_{2}^{4} \frac{(\sqrt{t}-1)(\sqrt{t}+1)}{\sqrt{t}-1} dt = \int_{2}^{4} (\sqrt{t}+1) dt = \left(\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + t\right)\Bigg]_{2}^{4} = \left(\frac{2\sqrt{t^3}}{3} + t\right)\Bigg]_{2}^{4}$

$$= \left(\frac{2\sqrt{4^3}}{3} + 4\right) - \left(\frac{2\sqrt{2^3}}{3} + 2\right) = \frac{22}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$ **integralini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM x = 2.sint dönüşümü yapılırsa,

dx = 2.cost.dt

İntegral sınırları;

$x=0 \Rightarrow 0=2\sin t$ için $\sin t=0 \Rightarrow t_1=0$

$x=1 \Rightarrow 1=2.\sin t$ için $\sin t=\frac{1}{2} \Rightarrow t_2=\frac{\pi}{6}$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4.\sin^2 t}{\sqrt{4-4.\sin^2 t}}2.\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4.\sin^2 t}{2.\cos t}2\cos t dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t dt=\frac{4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2t)dt=2.\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=2\left[\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{6}\right)-\left(0-\frac{1}{2}\cdot\sin 2.0\right)\right]$$

$$=2\left[\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right]=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ÖRNEK $\int_1^e \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$ **integralini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM $\ln x=t \Rightarrow \frac{1}{x}\cdot dx=dt$ olur. Sınırlar;

$x=1$ için $\ln 1=t \Rightarrow t=0$

$x=e$ için $\ln e=t \Rightarrow t=1$

$$\int_1^e \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx=\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{3}}}{x}x.dt=\int_0^1 t^{\frac{1}{3}}dt=\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Bigg]_0^1=\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}\Bigg]_0^1$$

$$=\frac{3}{4}-0=\frac{3}{4}$$

ÖRNEK $\int_1^{e^3} d(\ln x^2)dx$ **integralini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM $\int_1^{e^3} d(\ln x^2)dx=\ln x^2\Big]_1^{e^3}=\ln(e^3)^2-\ln 1^2=\ln e^6-\ln 1$

$=6-0=6$

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ

A) MUTLAK DEĞER FONKSİYONUNUN İNTEGRALİ

KURAL: $\int_a^b |f(x)|dx$ **biçimindeki integrallerde f(x) in [a,b] aralığındaki işareti incelenir.**

$x \in (a,c]$ **için** $f(x) < 0 \Rightarrow |f(x)| = -f(x)$

$x \in [c,b)$ **için** $f(x) \geq 0 \Rightarrow |f(x)| = f(x)$

$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^c -f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ **olur.**

ÖRNEK $\int_1^4 |x-3|dx$ **integralini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM $|x-3|$nin kritik noktası $x = 3$ tür.

$x < 3$ için $|x-3| = -(x-3)$

$x \geq 3$ için $|x-3| = x-3$ olduğundan

$$\int_1^4 |x-3|dx = \int_1^3 -(x-3)dx + \int_3^4 (x-3)dx = \left.\frac{-(x-3)^2}{2}\right]_1^3 + \left.\frac{(x-3)^2}{2}\right]_3^4$$

$$= \left[\frac{(1-3)^2}{2} - \frac{(3-3)^2}{2}\right] + \left[\frac{(4-3)^2}{2} - \frac{(3-3)^2}{2}\right] = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

ÖRNEK $\int_{-3}^1 \frac{|2x|}{x}dx$ **integralini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM $\frac{|2x|}{x} = \begin{cases} 2 & ; \ x > 0 \\ -2 & ; \ x < 0 \end{cases}$

$$\int_{-3}^1 \frac{|2x|}{x}dx = \int_{-3}^0 -2dx + \int_0^1 2dx = -2x\Big]_{-3}^0 + 2x\Big]_0^1 = 2x\Big]_0^{-3} + 2x\Big]_0^1 = -6 + 2 = -4$$

B) SİGNUM (İŞARET) FONKSİYONUN İNTEGRALİ

KURAL: $\int_a^b sgn(f(x))dx$ **biçimindeki integrallerde f(x) in [a,b] aralığındaki işareti incelenir.**

$x \in [a,c)$ için $f(x) < 0 \Rightarrow sgnf(x) = -1$

$x \in [c,b)$ için $f(x) > 0 \Rightarrow sgnf(x) = 1$

$$\int_a^b sgn(f(x))dx = \int_a^c -1dx + \int_c^b 1dx$$

ÖRNEK $\int_1^4 2x\,\mathrm{sgn}(6-3x)dx$ **integralini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM

$$\mathrm{sgn}(6-3x)=\begin{cases}1 & ; \ x<2\\ 0 & ; \ x=2\\ -1 & ; \ x>2\end{cases}$$

$$\int_1^4 2x\,\mathrm{sgn}(6-3x)dx=\int_1^2 2x.1dx+\int_2^4 2x.(-1)dx=x^2\Big]_1^2+\left(-x^2\Big]_2^4\right)$$

$$=x^2\Big]_1^2+x^2\Big]_4^2=(4-1)+(4-16)$$

$$=-9$$

ÖRNEK $\int_{-3}^4 \mathrm{sgn}\left(x^2-x-2\right)dx$ **integralini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM $x^2-x-2=0$ denklemimin kökleri olan $x=-1$ ve $x=2$ kritik noktalardır.

Tabloda görüldüğü gibi

x		−1		2	
x^2-x-2	+	0	−	0	+

$$\mathrm{sgn}\left(x^2-x-2\right)=\begin{cases}1 & ; \quad x<-1 \quad \text{veya} \quad x>2 \quad \text{ise}\\ 0 & ; \quad x=-1 \quad \text{ve} \quad x=2 \quad \text{ise}\\ -1 & ; \quad -1<x<2 \quad \text{ise}\end{cases}$$

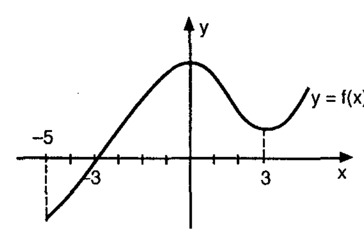
$$\int_{-3}^4 \mathrm{sgn}\left(x^2-x-2\right)=\int_{-3}^{-1}1.dx+\int_{-1}^{2}(-1)dx+\int_2^4 1dx$$

$$=x\Big]_{-3}^{-1}+(-x)\Big]_{-1}^{2}+x\Big]_2^4$$

$$=\left(-1-(-3)\right)+(-1-2)+(4-2)$$

$$=2-3+2=1$$

ÖRNEK $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği şekildeki gibidir. Buna göre, $\int_{-5}^{3}\mathbf{sgn(f(x))dx}$ **integralini hasaplayınız.**



ÇÖZÜM

$-5<x<-3$ için $f(x)<0$ ve $\mathrm{sgn}f(x)=-1$

$-3<x<3$ için $f(x)>0$ ve $\mathrm{sgn}f(x)=1$

Buna göre;

$$\int_{-5}^{3}\mathrm{sgn}(f(x))x=\int_{-5}^{-3}-dx+\int_{-3}^{3}dx=-x\Big]_{-5}^{-3}+x\Big]_{-3}^{3}=x\Big]_{-3}^{-5}+x\Big]_{-3}^{3}=(-5+3)+(3+3)=4$$

C) TAMDEĞER FONKSİYONUNUN İNTEGRALİ

KURAL: $\int_a^b [\![f(x)]\!]$ **biçimindeki integrallerde [a,b] aralığı uygun aralıkları bölünür.**

Eğer,

$x \in [a, c)$ **için** $[\![f(x)]\!] = m \in Z$

$x \in [c, b)$ **için** $[\![f(x)]\!] = n \in Z$ **ise**

$\int_a^b [\![f(x)]\!]\,dx = \int_a^c m\,dx + \int_c^b n\,dx$ **olur.**

ÖRNEK $\int_{-3}^{1} [\![\frac{x+1}{2}]\!]dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $[\![\frac{x+1}{2}]\!]$ ün kritik noktalarından biri tamdeğerin içini sıfır yapan $x = -1$ noktasıdır. Aralık boyu

$\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ *olduğundan*

$-3 < x < -1$ için $-1 < \frac{x+1}{2} < 0$ ve $[\![\frac{x+1}{2}]\!] = -1$

$-1 < x < 1$ için $0 < \frac{x+1}{2} < 1$ ve $[\![\frac{x+1}{2}]\!] = 0$

olur. Buna göre,

$$\int_{-3}^{1} [\![\frac{x+1}{2}]\!]dx = \int_{-3}^{-1}(-1)dx + \int_{-1}^{1} 0\cdot dx$$

$$= -x\Big]_{-3}^{-1} = x\Big]_{-1}^{-3} = (-3-(-1))$$

$$= -2$$

ÖRNEK $\int_{\frac{1}{2}}^{3} [\![x]\!]\cos x\,dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\int_{\frac{1}{2}}^{3} [\![x]\!]\cos x\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 0\cdot\cos x + \int_{1}^{2} 1\cos x\,dx + \int_{2}^{3} 2\cos x\,dx$$

$$= \sin x\Big]_1^2 + 2\cdot\sin x\Big]_2^3$$

$$= \sin 2 - \sin 1 + 2\sin 3 - 2\sin 2$$

$$= 2\sin 3 - \sin 2 - \sin 1$$

ÖRNEK $\int_{0}^{3} 6x^{[\![x]\!]}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$0 \le x < 1$ için $[\![x]\!] = 0$

$1 \le x < 2$ için $[\![x]\!] = 1$

$2 \le x < 3$ için $[\![x]\!] = 2$ olduğundan

$$\int_0^3 6x^{[\![x]\!]}dx = \int_0^1 6x^0dx + \int_1^2 6x\,dx + \int_2^3 6x^2dx = 6x\Big]_0^1 + 3x^2\Big]_1^2 + 2x^3\Big]_2^3$$

$$= 6 + 3(4-1) + 2(27-8) = 6 + 9 + 38$$

$$= 53$$

İNTEGRANTIN ÖZELLİĞİNE GÖRE İNTEGRASYONDA YAPILABİLECEK SADELEŞTİRMELER

1) f çift bir fonksiyon ise,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

2) f tek fonksiyon ise,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

3) f periyodik bir fonksiyon ve periyod T ise,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a+kT}^{b+kT} f(x)dx$$

ÖRNEK

$\int_{-3}^{3} x^5 dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$\int_{-3}^{3} x^5 dx = 0$ dır.

Çünkü x^5 tek fonksiyondur, aralık simetriktir.

ÖRNEK

$\int_{-4}^{4} \frac{x^2 \sin 3x}{x^6+5}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$\int_{-4}^{4} \frac{x^2 \sin 3x}{x^6+5} = 0$ dır. Çünkü; x^2 çift, sin3x tek, x^6+5 çift fonksiyonlardır.

$\frac{x^2 \cdot \sin 3x}{x^6+5}$ tek fonksiyon olur.

İntegrant tek fonksiyon, aralık simetrik olduğundan integralin değeri 0 dır.

ÖRNEK

$\int_{-2\pi}^{2\pi} \cos x dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$\forall x \in R$, $\cos(-x) = \cos x$ olduğundan kosinüs fonksiyonu çift fonksiyondur.

Aralık simetrik olduğundan;

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \cos x dx = 2\int_{0}^{2\pi} \cos x dx = 2\sin x \Big]_{0}^{2\pi}$$

$$= 2\cdot(\sin 2\pi - \sin 0)$$

$$= 2\cdot(0-0) = 0$$

ÖRNEK $\int_{-1}^{1}(|x|+1)dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $f(x)=|x|+1$ olsun.

$f(-x)=|-x|+1=|x|+1$ olduğundan f(x) çift fonksiyondur.

$$\int_{-1}^{1}(|x|+1)dx=2\int_{0}^{1}(|x|+1)dx=2\int_{0}^{1}(x+1)dx$$

$$=2\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1=2\left[\left(\frac{1}{2}+1\right)-(0+0)\right]$$

$$=2\left(\frac{3}{2}-0\right)=3 \text{ olur.}$$

BELİRLİ İNTEGRALDE DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME

KURAL: $\int_a^b f(x)dx$ **integrali için**

$x=g(t)$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

1) g, $[c,d]$ aralığında sürekli ve türevli,

2) $t\in[c,d]$ ise $g(t)\in[a,b]$,

3) $g(c)=a$ ve $g(d)=b$ oluyorsa,

$[a,b]$ aralığında sürekli f fonksiyonu için

$\int_a^b f(x)dx=\int_c^d f(g(t))\cdot g'(t)dt$ eşitliği yazılır.

ÖRNEK $I=\int_1^{e^3}\frac{dx}{2x\sqrt{1+\ln x}}$ **integrali neye eşittir?**

ÇÖZÜM $t=1+\ln x$ alınırsa

$x=1$ için $t=1+\ln 1 \Rightarrow t=1+0 \Rightarrow t=1$

$x=e^3$ için $t=1+\ln e^3 \Rightarrow t=1+3 \Rightarrow t=4$

$dt=\frac{1}{x}dx$ olur.

Bu durumda;

$$\int_1^{e^3}\frac{dx}{2x\sqrt{1+\ln x}}=\int_1^4\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\int_1^4 d\left(\sqrt{t}\right)=\sqrt{t}\,\Big]_1^4$$

$$=\sqrt{4}-\sqrt{1}=1 \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$\int_0^1 \left(x^2\sqrt{1-x^2}\right)dx$ integrali için $x = \sin t$ dönüşümü yapılırsa **hangi integral elde edilir?**

ÇÖZÜM

$x = \sin t \Rightarrow x = 0$ için $\sin t = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = 1$ için $\sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$

$x = \sin t \Rightarrow x^2 = \sin^2 t$ olur.

Buna göre,

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cdot\sqrt{\underbrace{1-\sin^2 t}_{\cos^2 t}}\cdot\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cdot\cos t\cdot\cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cdot\cos^2 t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin t\cdot\cos t)^2\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t)^2\,dt$$

integrali elde edilir.

ÖRNEK

$\int_{-2}^{3} e^{-\frac{x}{2}}dx$ integrali için $t = -\frac{x}{2}$ dönüşümü yapılırsa **hangi integral elde edilir?**

ÇÖZÜM

$t = -\frac{x}{2} \Rightarrow x = -2 \Rightarrow t = \frac{-(-2)}{2} = 1$

$\Rightarrow x = 3 \Rightarrow t = -\frac{3}{2}$

$t = \frac{-x}{2} \Rightarrow dt = \frac{-1}{2}dx \Rightarrow dx = -2dt$

Bu durumda,

$\int_{-2}^{3} e^{-\frac{x}{2}}dx = \int_1^{-\frac{3}{2}} -2e^t dt = -2\int_1^{-\frac{3}{2}} e^t dt$ integrali bulunur.

ÖRNEK

$\int_0^2 \left(\frac{2x}{x^2+3}\right)dx$ integrali için $t = x^2 + 3$ değişken değiştirmesi yapılırsa **hangi integral elde edilir?**

ÇÖZÜM

$t = x^2 + 3 \Rightarrow x = 0$ için $t = 0^2 + 3 \Rightarrow t = 3$

$x = 2$ için $t = 2^2 + 3 \Rightarrow t = 7$

$t = x^2 + 3 \Rightarrow dt = 2xdx$ olur. Böylece; $\int_3^7 \frac{dt}{t}$ integrali bulunur.

ÖRNEK

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1-\sin x}$ integralini için $t=\tan\frac{x}{2}$ dönüşümü yapılırsa **hangi integral elde edilir?**

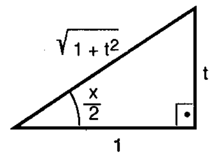
ÇÖZÜM

$$t=\tan\frac{x}{2} \quad\Rightarrow\quad x=0 \quad \text{için} \quad t=\frac{0}{2}=\tan 0 = 0$$

$$x=\frac{\pi}{3} \quad \text{için} \quad t=\tan\frac{\frac{\pi}{3}}{2}=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$t=\tan\frac{x}{2} \quad\Rightarrow\quad x=2\arctan t$$

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2} \quad \text{olur.}$$



$$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\sin x = 2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$$

$$=2\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

Bu durumda;

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1-\sin x}=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}}=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{(t-1)^2}{1+t^2}}$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{(t-1)^2}dt \quad \text{integrali bulunur.}$$

ÖRNEK

$\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{5+4\cos x}$ belirli integrali için $x=2\arctan t$ dönüşümü yapılırsa **hangi integral elde edilir?**

ÇÖZÜM

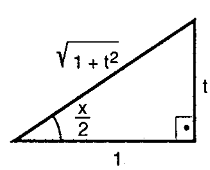
$$x=2\arctan t \;\Rightarrow\; x=0 \;\Rightarrow\; 2\arctan t=0 \;\Rightarrow\; t=0$$

$$x=\frac{2\pi}{3} \;\Rightarrow\; 2\arctan t=\frac{2\pi}{3} \;\Rightarrow\; t=\sqrt{3} \quad \text{olur.}$$

$$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$x=2\arctan t \Rightarrow \arctan t=\frac{x}{2}$$

$$\tan\frac{x}{2}=t$$



$$\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\cos x = 2\frac{1}{1+t^2}-1$$

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{5+4\cos x}=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{5+4\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{5+5t^2+4-4t^2}{1+t^2}}$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2dt}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{9+t^2}$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2dt}{9+t^2} \quad \text{integrali elde edilir.}$$

GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER

TANIM: $I = \int_a^b f(x)dx$ **integralinde**

a veya b den biri $\mp\infty$ veya f $[a,b]$ aralığında süreksiz veya sınırsız ise I integraline genelleştirilmiş (hasolmayan) integral denir.

Bu tip integraller limit olarak hesaplanır.

Limit sonlu (gerçel sayı) ise integral yakınsaktır.

Limit sonsuz ($\mp\infty$) ise integral ıraksaktır denir.

Şimdi genelleştirilmiş integralleri 2 ayrı grupta inceleyelim.

I. SINIRLARI SONSUZ OLAN İNTEGRALLER

a) Üst sınır sonsuz ise,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \quad \text{dir.}$$

b) Alt sınır sonsuz ise,

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \quad \text{dir.}$$

c) Alt ve üst sınır sonsuz ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{(a,b)\to(-\infty,+\infty)}\int_a^b f(x)dx \quad \text{dir.}$$

ÖRNEK $\int_4^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{b\to\infty}\left[\int_4^b \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\int_4^b x^{-\frac{3}{2}}dx\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_4^b = \lim_{b\to\infty}\left[-2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_4^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-2}{\sqrt{b}} - \frac{-2}{\sqrt{4}}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-2}{\sqrt{b}} + 1\right] = 0 + 1 = 1 \quad \text{bulunur.}$$

$1 \in R$ olduğundan integral yakınsaktır.

ÖRNEK $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ **integralini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} \left[2\sqrt{x}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[2\sqrt{b} - 2\right] = \infty \quad \textit{bulunur.}$$

limitin sonucu ∞ olduğundan integral ıraksaktır.

ÖRNEK $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{(a,b)\to(-\infty,+\infty)} \left(\int_a^b \frac{dx}{1+x^2}\right) = \lim_{(a,b)\to(-\infty,+\infty)} \left(\arctan x\right)_a^b$$

$$= \lim_{(a,b)\to(-\infty,+\infty)} \left(\arctan b - \arctan a\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \quad \text{bulunur.}$$

II. SINIRLARI İÇERİSİNDE SÜREKSİZ İNTEGRALLER

Bu tip integralleri dört değişik durumda inceleyeceğiz.

$\int_a^b f(x)dx$ *integralinde*

a) f, fonksiyonu $x = a$ da süreksiz, $(a,b]$ aralığında sürekli ise,

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to 0} \int_{a-t}^{b} f(x)dx} \text{ dir.}$$

b) f, fonksiyonu $x = b$ süreksiz, $[a,b)$ aralığında sürekli ise,

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to 0^+} \int_{a}^{b-t} f(x)dx} \text{ dir.}$$

c) $a < c < b$ olmak üzere, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığının $x = c$ noktası dışındaki tüm noktalarında sürekli ise

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to 0^+} \left(\int_{a}^{c-t} f(x)dx + \int_{c+t}^{b} f(x)dx\right)} \text{ dir.}$$

d) f fonksiyonu $x = a$, $x = b$ noktalarında süreksiz (a,b) aralığında sürekli ise

$$\boxed{\lim_{t\to 0^+} \int_{a+t}^{b-t} f(x)dx} \text{ dir.}$$

ÖRNEK $\int_0^2 \frac{\ln x}{x}dx$ integralini bulunuz.

ÇÖZÜM İntegrant x = 0 da süreksizdir. a şıkkındaki tanımı uygularsak;

$$\int_0^2 \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^2 \frac{\ln x}{x}dx \text{ olur.}$$

$\int \frac{\ln x}{x}dx$ in integralinden $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$ olur.

$\int \frac{\ln x}{x} = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$ olduğundan;

$$\lim_{t\to 0^+}\left[\int_t^2 \frac{\ln x}{x} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln^2 x}{2}\right]_t^2 = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{\ln^2 2}{2} - \frac{\ln^2 t}{2}\right] = -\infty \text{ olur.}$$

integral ıraksaktır.

ÖRNEK $\int_0^4 \frac{dx}{(x-4)^2}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-4)^2} = \lim_{t\to 0^+}\int_0^{4-t} \frac{dx}{(x-4)^2} = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{1}{4-x}\right]_0^{4-t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{4-4+t} - \frac{1}{4-0}\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{4}\right) = +\infty \quad \text{olur.}$$

İntegral ıraksaktır.

ÖRNEK $\int_2^3 \frac{dx}{x-2}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $f(x) = \frac{1}{x-2}$, x = 2 de süreksiz (2, 3] aralığında süreklidir. a şıkkındaki tanımı uygularsak,

$$\int_2^3 \frac{dx}{x-2} = \lim_{t\to 0}\int_{2-t}^3 \frac{dx}{x-2} = \lim_{t\to 0} \ln|x-2|\Big]_{2-t}^3 = \lim_{t\to 0}\left[\ln 1 - \ln|2-t-2|\right]$$

$= \lim_{t\to 0}(\ln 1 - \ln|-t|) = -\infty$ bulunur. İntegral ıraksaktır.

ÖRNEK $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, x = 1 de süreksiz, [0, 1) aralığında süreklidir. b şıkkındaki tanımı uygularsak;

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 0}\int_0^{1-t} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 0}\int_0^{1-t} \frac{\cos t dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \lim_{t\to 0}\int_0^{1-t} \frac{\cos t dt}{\cos t} \quad \begin{pmatrix} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{pmatrix}$$

$$= \lim_{t\to 0}\int_0^{1-t} dt = \lim_{t\to 0}\left(t\right]_0^{1-t} = \lim_{t\to 0}(1-t-0)$$

$= 1$ bulunur.

ÖRNEK

$\int_0^3 \frac{2x\,dx}{\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}}}$ **integralini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$[0,3]$ aralığında integrant $x = 1$ için süreksizdir. Burada c şıkkındaki tanımı uygulayalım.

$$\int_0^3 \frac{2x\,dx}{\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{t\to 0^+}\left[\int_0^{1-t} \frac{2x\,dx}{\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}}} + \int_{1+t}^3 \frac{2x\,dx}{\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}}}\right]$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\int_0^{1-t} \frac{2x\,dx}{\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}}} + \lim_{t\to 0}\int_{1+t}^3 \frac{2x\,dx}{\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left[3\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{3}}\right]_0^{1-t} + \lim_{t\to 0^+}\left[3\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{3}}\right]_{1+t}^3$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left[\left(3\sqrt[3]{(1-t)^2-1}+3\right)+\left(3\sqrt[3]{8}-3\sqrt[3]{(1+t)^2-1}\right)\right]$$

$= 0+3+6-0 = 9$ bulunur.

ÖRNEK

$\int_{-2}^2 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$ **integralini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM

İntegrant $x = -2$, $x = 2$ de süreksizdir. d şıkkındaki tanım uygulanır.

$$\int_{-2}^2 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{t\to 0^+}\left(\int_{-2+t}^{2-t} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}\right)$$

$\left(\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}\right.$ integrali $x = 2\sin t$ dönüşümü yapılarak$\left.\right)$

$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left[2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}\right]+C$ bulunur.

$$= \lim_{t\to 0^+}\left[2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}\right]_{-2+t}^{2-t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left[\left(2\arcsin\frac{2-t}{2}-\frac{2-t}{2}\sqrt{4-(2-t)^2}\right)-\left(2\arcsin\frac{-2+t}{2}-\frac{-2+t}{2}\sqrt{4-(-2+t)^2}\right)\right]$$

$= \left(2\cdot\frac{\pi}{2}+0\right)-\left(2\left(-\frac{\pi}{2}\right)+0\right) = \pi+\pi = 2\pi$ olur.

İNTEGRAL UYGULAMALARI

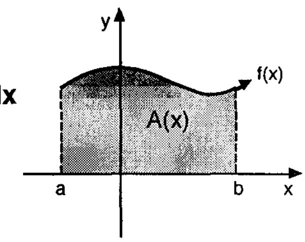
İNTEGRAL İLE ALAN HESABI

Daha önce belirli integralin bir alanı ifade ettiğini görmüştük. Şimdi integral kullanarak alan hesaplamanın kurallarını veriyoruz.

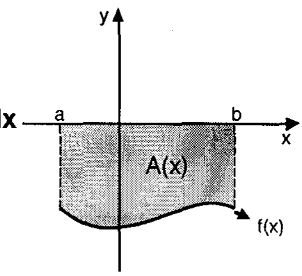
KURAL–1: a) $y = f(x)$ fonksiyonu ile $x = a$, $x = b$ ve $x = 0$ doğruları ile sınırlanan alan $A(x)$ ise;

$$A(x) = \int_a^b |f(x)|dx$$

$$A(x) = \int_a^b f(x)dx$$

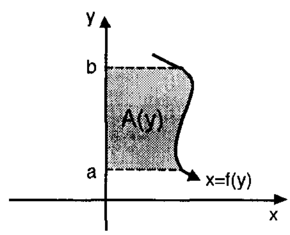


$$A(x) = -\int_a^b f(x)dx$$

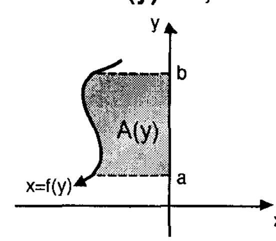


b) $x = f(y)$ $y = a$, $y = b$, $y = 0$ doğruları ile sınırlanan alan $A(y)$ ise;

$$A(y) = \int_a^b f(y)dy$$



$$A(y) = -\int_a^b f(y)dy$$



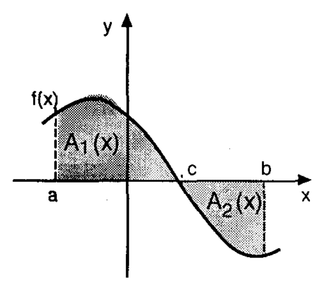
KURAL–2: a) $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği $x = a$, $x = b$, $x = 0$ doğruları ile sınırlanan alan $A(x)$ ise,

$$A(x) = A_1(x) + A_2(x)$$

$$A_1(x) = \int_a^c f(x)dx$$

$$A_2(x) = -\int_c^b f(x)dx$$

$$\boxed{A(x) = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx}$$



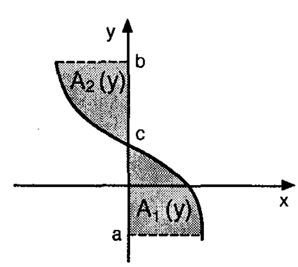
b) $x = f(y)$ fonksiyonunun grafiği, $y = a$, $y = b$, $y = 0$ doğruları ile sınırlanan alan $A(y)$ ise;

$$A(y) = A_1(y) + A_2(y)$$

$$A_1(y) = \int_a^c f(y)dy$$

$$A_2(y) = -\int_c^b f(y)dy$$

$$\boxed{A(y) = \int_a^c f(y)dy - \int_c^b f(y)dy}$$

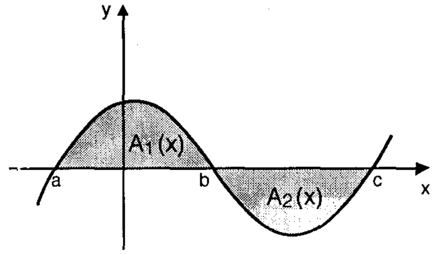


KURAL–3: a) y = f(x) fonksiyonunun grafiği ve x ekseni ile sınırlanan alan bulunurken f(x) = 0 denkleminin kökleri (eğrinin x eksenini kestiği noktaların apsisleri) bulunur. Bu sınırlar altında integral alınır.

$y = f(x)$ in grafiği yandaki gibi ise

$A(x) = A_1(x) + A_2(x)$

$$\boxed{A(x) = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx}$$

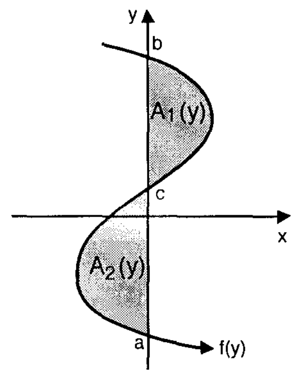


b) x = f(y) fonksiyonunun grafiği ve y ekseni ile sınırlanan alan bulunurken f(y) = 0 denkleminin kökleri (eğrinin y eksenini kestiği noktaların ordinatları) bulunur. Bu sınırlar altında integral alınır.

$x = f(y)$ nin grafiği yandaki gibi ise

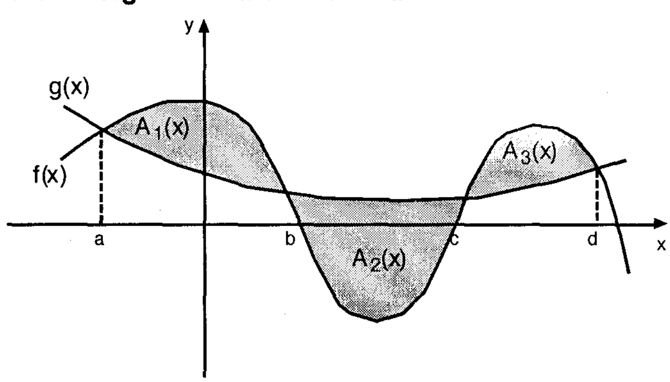
$A(y) = A_1(y) + A_2(y)$

$$\boxed{A(y) = -\int_a^c f(y)dy + \int_c^b f(y)dy}$$



İKİ EĞRİ ARASINDAKİ ALAN

KURAL: y = f(x) ile y = g(x) arasında sınırlanan alan bulunurken, f(x) = g(x) denkleminin kökleri integralin sınırları olarak alınır.



$[a,b]$, $[b,c]$, $[c,d]$ aralıklarında f(x) ve g(x) den hangisi büyük ise büyükten diğerinin çıkarılması ile elde edilen fonksiyonun integrali olarak bulunur.

Yukarıdaki grafiğe göre,

$$A_1(x) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx \quad (f(x) \geq g(x))$$

$$A_2(x) = \int_b^c (g(x) - f(x))dx \quad (g(x) \geq f(x))$$

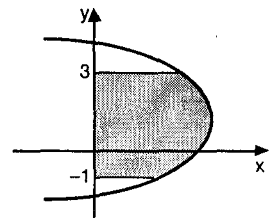
$$A_3(x) = \int_c^d (f(x) - g(x))dx \quad (f(x) \geq g(x))$$

ÖRNEK **$x = 8 + 2y - y^2$ parabolü, y ekseni, $y = -1$ ve $y = 3$ doğruları arasındaki alanı bulunuz.**

ÇÖZÜM Fonksiyon, $x = f(y)$ biçiminde tanımlandığından integral y değişkenine göre alınacaktır.

$8 + 2y - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 - 2y - 8 = 0 \Rightarrow y_1 = 4, \quad y_2 = -2$ olur.

Bu durumda;



$$A(y) = \int_{-1}^{3}\left(8 + 2y - y^2\right)dy$$

$$= 8y + \frac{2y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Bigg]_{1}^{3}$$

$$= \left(8\cdot3 + 3^2 - \frac{3^3}{3}\right) - \left(8\cdot1 + 1^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{46}{3}\text{br}^2 \text{ olur.}$$

ÖRNEK $y = x - [\![x]\!]$ denklemi ile verilen fonksiyonun grafiğinin $x = -\frac{2}{3}$, $x = 0$, $x = 2$ doğruları ile sınırladığı bölgenin **alanını bulunuz.**

ÇÖZÜM Önce fonksiyonu parçalı tanımlayalım.

$$-\frac{2}{3} \le x < 0 \Rightarrow [\![x]\!] = -1$$

$$0 \le x < 1 \Rightarrow [\![x]\!] = 0$$

$$1 \le x < 2 \Rightarrow [\![x]\!] = 1$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} x+1 & ; \quad -\frac{2}{3} \le x < 0 \quad \text{ise} \\ x & ; \quad 0 \le x < 1 \quad \text{ise} \\ x-1 & ; \quad 1 \le x < 2 \quad \text{ise} \\ 0 & ; \quad x = 2 \quad \text{ise} \end{cases}$$

$\int_{-\frac{2}{3}}^{0}(x+1)\,dx + \int_{0}^{1}x\,dx + \int_{1}^{2}(x-1)dx$ gerekli işlemler yapılarak alan $\frac{13}{9}\text{br}^2$ bulunur.

UYARI: $y = f(x)$ fonksiyonu $x = a$, $x = b$ doğruları ile sınırlanan alanı: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx$, $x = f^{-1}(y)$ şekline dönüştürülüp;

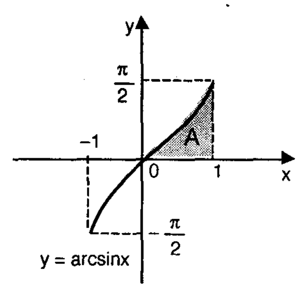
$x = a$ için $f^{-1}(y) = a \Rightarrow y = f(a)$

$x = b$ için $f^{-1}(y) = b \Rightarrow y = f(b)$ bulunarak

$\int_{f(a)}^{f(b)} xdy = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy = \int_a^b f(x)dx$ şeklinde bulunabilir.

ÖRNEK $y = f(x) = \arcsin x$ eğrisi x ekseni $x = 0$ ve $x = 1$ doğruları arasındaki **alanı bulunuz.**

ÇÖZÜM Alan $= A = \int_0^1 \arcsin x dx$ dir.



Sorulan alanı uyarıya göre hesaplayalım.

$y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y$

$dx = \cos y.dy$ olur.

$x = 0$ için $0 = \sin y \Rightarrow y = 0$

$x = 1$ için $1 = \sin y \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$ bulunur.

Bu durumda; $\int_0^1 \arcsin x \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cdot\cos y\cdot dy$ olur.

Şimdi bu integrali kısmi integrasyon metodu ile hesaplayalım.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cdot\cos y\cdot dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cdot(\sin y)'\cdot dy = y\cdot\sin y - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(y')\cdot\sin y dy = y\cdot\sin y + \cos y\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(0\cdot\sin 0 + \cos 0\right) = \frac{\pi}{2} - 1 \text{ bulunur.}$$

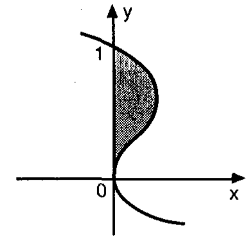
ÖRNEK

$x = y^2 - y^3$ eğrisi ve y ekseniyle sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM

Fonksiyon $x = f(y)$ biçiminde verildiğinde integral y değişkenine göre alınacaktır.

Şimdi eğrinin y eksenini kestiği noktaları bulalım ve grafiğini çizelim.



$$y^2 - y^3 = 0 \Rightarrow y^2(1 - y) = 0$$

$$\Rightarrow y = 0, \quad y = 1$$

$$\text{Alan} = \int_0^1 (y^2 - y^3)dy$$

$$= \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\Bigg]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - (0) = \frac{1}{12}\text{br}^2 \text{ olur.}$$

ÖRNEK

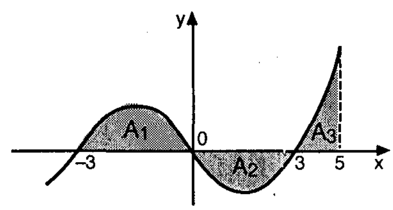
$y = x^3 - 9x$ fonksiyonunun grafiği, x ekseni ve $x = 5$ doğrusu ile sınırlanan **bölgenin alanını bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$x^3 - 9x = 0$$

$$x(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad x = \mp 3$$

$$\text{Alan} = A_1 + A_2 + A_3$$



$$A_1 = \int_{-3}^{0}(x^3 - 9x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\Bigg]_{-3}^{0} = 0 - \left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right) = \frac{81}{4}$$

$$A_2 = -\int_0^3 (x^3 - 9x)dx = -\left(\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right)\Bigg]_0^3 = -\left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right) - 0 = \frac{81}{4}$$

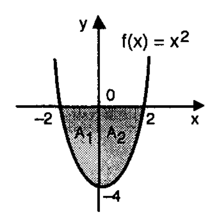
$$A_3 = \int_3^5 (x^3 - 9x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\Bigg]_3^5 = \left(\frac{625}{4} - \frac{225}{2}\right) - \left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right) = \frac{256}{4}$$

$$A = \frac{81}{4} + \frac{81}{4} + \frac{256}{4} = \frac{418}{4} = \frac{209}{2}\text{br}^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$f(x) = x^2 - 4$ fonksiyonunun grafiği ve x ekseni ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM



$$x^2 - 4 = 0 \quad x = \mp 2$$

$$\text{Alan} = A = \int_{-2}^{2}(x^2 - 4)dx$$

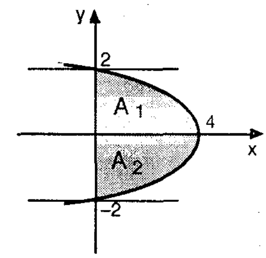
$f(x) = x^2 - 4$ için $f(-x) = f(x)$ olduğundan

$$A_2 = -\int_0^2 (x^2 - 4)dx = -\left(\frac{x^3}{3} - 4x\right]_0^2 = -\left[\left(\frac{2^3}{3} - 4.2\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 4.0\right)\right] = -\left(\frac{8}{3} - 8\right) = \frac{16}{3}$$

$A_1 = A_2$ ve $A_1 + A_2 = A$ olduğundan $A = 2 \cdot \frac{16}{3} = \frac{32}{3}\text{br}^2$ olur.

ÖRNEK **$x = 4 - y^2$ ve y ekseni ile sınırlanan alanı bulunuz.**

ÇÖZÜM–1 İntegral sınırlarını y ekseni üzerinden seçersek.



$4 - y^2 = 0 \Rightarrow y = \mp 2$

$x = f(y) = 4 - y^2$

$$\text{Alan} = \int_{-2}^{2}\left(4 - y^2\right)dy \text{ olur.}$$

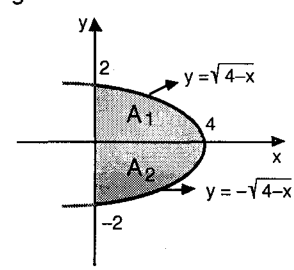
Grafik x eksenine göre simetrik olduğundan;

$A_1 = A_2$ dir. O halde;

$$\text{Alan} = 2\int_0^2\left(4 - y^2\right)dy = 2\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = 2\left(\left[4\cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right] - 0\right) = 2\cdot\frac{16}{3} = \frac{32}{3}br^2 \text{ olur.}$$

ÇÖZÜM–2 İntegral sınırlarını ekseni üzerinden seçerek alanı bulabiliriz.

$x = 4 - y^2 \Rightarrow y^2 = 4 - x \Rightarrow y = \mp\sqrt{4-x}$ olur. $y = 0 \Rightarrow x = 4$ olduğundan



$$A_1 = \int_0^4 \sqrt{4-x}\,dx$$

$$A_2 = -\int_0^4 -\sqrt{4-x}\,dx = \int_0^4 \sqrt{4-x}\,dx$$

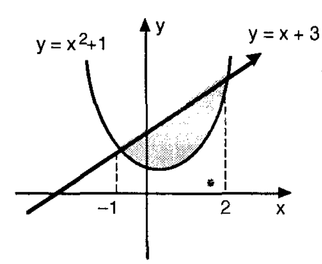
$A_1 = A_2$ olduğu bir kez daha görülür.

$$A = 2\cdot A_1 = 2\int_0^4\left(\sqrt{4-x}\right)dx \text{ integrali hesaplanarak}$$

$$A = 2\left[-\frac{2}{3}\cdot(4-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{32}{3}br^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $y = x^2 + 1$ ve $y = x + 3$ ile verilen fonksiyonların grafikleri ile sınırlanan **bölgenin alanını bulunuz.**

ÇÖZÜM Önce eğrilerin kesim noktalarını bulalım ve grafiği çizelim.



$x^2 + 1 = x + 3$

$x^2 - x - 2 = 0$

–2   1

$x = 2$ $x = -1$ kesim noktalarıdır.

Grafikten $\forall x \in [-1, 2]$ için $x + 3 \geq x^2 + 1$ olduğu görülmektedir. O halde;

$$\text{Alan} = \int_{-1}^{2}\left[(x+3) - (x^2+1)\right]dx = \int_{-1}^{2}\left(-x^2 + x + 2\right)dx$$

$$= \left.\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{-8}{3} + 2 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right)$$

$$= \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}br^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK **$y = x^2 - 7x + 6$ eğrisi, x ekseni ve $x = 2$ ile $x = 6$ doğrularıyla sınırlanan alanı bulunuz.**

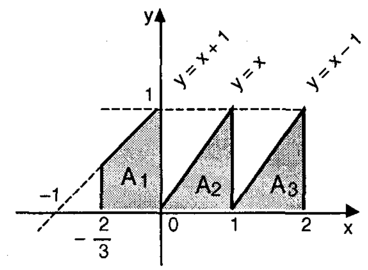
ÇÖZÜM A alanı x ekseninin alt tarafından oluştuğundan

$$A = -\int_2^6\left(x^2 - 7x + 6\right)dx \text{ dir.}$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x\right]_2^6 = -\left[\left(\frac{6^3}{3} - \frac{7.6^2}{2} + 6.6\right) - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{7.2^2}{2} + 6.2\right)\right] = \frac{56}{3}br^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

Yandaki şekilde verilenlere göre taralı alanların koplamı kaçtır?



ÇÖZÜM

Hesaplayacağımız alana A dersek

$A = A_1 + A_2 + A_3$ olur.

$$A_1 = \int_{-\frac{2}{3}}^{0}(x+1)dx = \left.\frac{(x+1)^2}{2}\right]_{-\frac{2}{3}}^{0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{18} = \frac{4}{9}$$

$$A_2 = \int_0^1 x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$A_3 = \int_1^2 (x-1)dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{2}$$

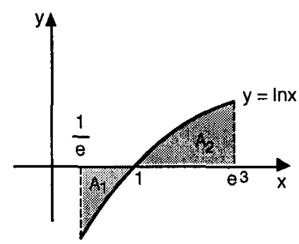
$$A = \frac{4}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{13}{9} br^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$y = \ln x$ fonksiyonunun grafiği, x ekseni, $x = \frac{1}{e}$ ve $x = e^3$ doğruları ile sınırlanan alanı bulunuz.

ÇÖZÜM

Hesaplanacak alan yanda gösterilmiştir. Buna göre



Alan $= A_1 + A_2$ ise

$$A_1 = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x dx$$

$$A_2 = \int_1^{e^3} \ln x dx \text{ olur.}$$

$$\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{idi.}$$

$$\int \ln x dx = x(\ln x - 1) \quad \text{olur.}$$

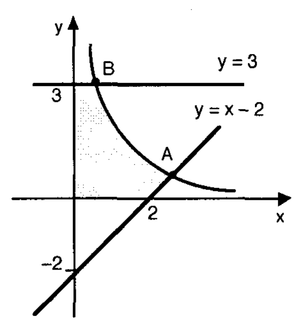
$$x(\ln x - 1)\Big]_1^{\frac{1}{e}} + x(\ln x - 1)\Big]_1^{e^3} = 2e^3 - \frac{2}{e} + 2$$

ÖRNEK

$y = \frac{3}{x}$ eğrisi, x ekseni, $x = 0$, $y = x - 2$ *ve* $y = 3$ doğruları ile **sınırlı bölgenin alanı kaç br^2 dir?**

ÇÖZÜM

İstenilen alan şekilde görüldüğü gibidir. Önce A ve B noktalarının koordinatlarını bulalım.



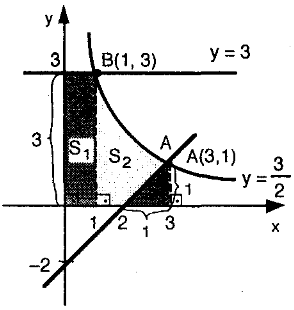
A noktası için;

$$x - 2 = \frac{3}{x} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$x = 3 \Rightarrow y = 1$ olur

A(3, 1) dir.



B noktası için;

$$\left.\begin{array}{l} y=3 \\ y=\dfrac{3}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow 3=\frac{3}{x} \Rightarrow x=1 \text{ ve } y=3$$

B(1, 3) dür.
Şekildeki S_1 alanı dikdörtgendir.
$S_1 = 3.1 = 3$ br^2 ve S_3 alanı dik üçgendir.

$$S_3=\frac{1 \cdot 1}{2}=\frac{1}{2} \text{br}^2 \text{ dir.}$$

S_2 alanı ise;

$$S_2=\int_1^3 \frac{3}{x}dx - S_3 \text{ dür.}$$

$$S_2 = 3\ln x\Big]_1^3-\frac{1}{2}=3\cdot(\ln 3-\ln 1)-\frac{1}{2}$$

$$=3\ln 3-\frac{1}{2}$$

$$=\ln 27-\frac{1}{2} \text{ dir.}$$

O halde istenilen bölgenin alanı;

$$S_1+S_2=3+\ln 27-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{5}{2}+\ln 27 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

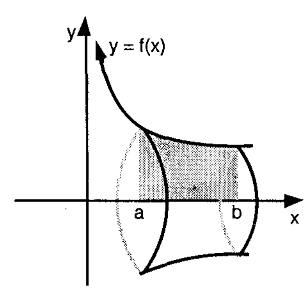
İNTEGRALİN HACİM HESAPLARINA UYGULANMASI

KURAL–1: y = f(x) olarak verilen bir f fonksiyonun grafiği, x = a, x = b doğruları ve x ekseni ile sınırladığı düzlemsel bölgenin x ekseni etrafında 360° dönmesiyle oluşan cismin hacmi:

$$\mathbf{Vx}=\pi\int_a^b \mathbf{y^2dx}$$

$$\mathbf{Vx}=\pi\int_a^b \mathbf{f^2(x)dx}$$

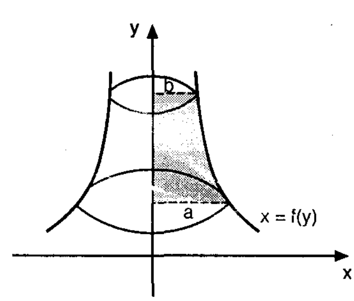
ile bulunur.



KURAL–2: x = f(y) olarak verilen bir f fonksiyonunun grafiği y = a, y = b doğruları ve y ekseni ile sınırladığı düzlemsel bölgenin y ekseni etrafında 360° döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi

$$\mathbf{Vy}=\pi\int_a^b \mathbf{x^2dy}$$

$$\mathbf{Vy}=\pi\int_a^b \mathbf{f^2(y)dy} \textbf{ dır.}$$

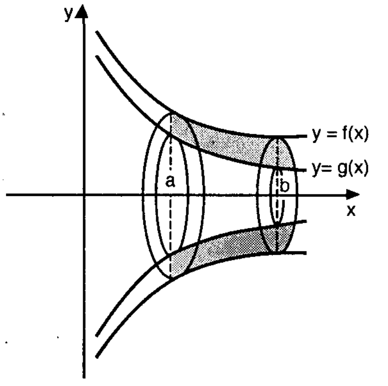


KURAL–3 : y = f(x) ve y = g(x) eğrileri, x = a ve x = b doğruları ile sınırlanan düzlemsel bölgenin x ekseni etrafında 360° dönmesiyle oluşan cismin hacmi; f(x) ve g(x) in kesim noktaları a ve b ise

$$f(x) \geq g(x) \Rightarrow V_x = \pi\int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)dx$$

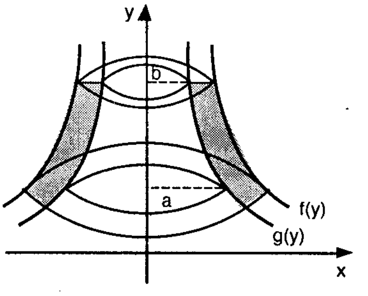
$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow V_x = \pi\int_a^b \left(g^2(x) - f^2(x)\right)dx$$

olur.



KURAL–4: x = f(y), x = g(y) fonksiyonlarının grafikleri, y = a ve y = b doğruları ile sınırlanan düzlemsel bölgenin y ekseni etrafında 360° dönmesiyle oluşan cismin hacmi

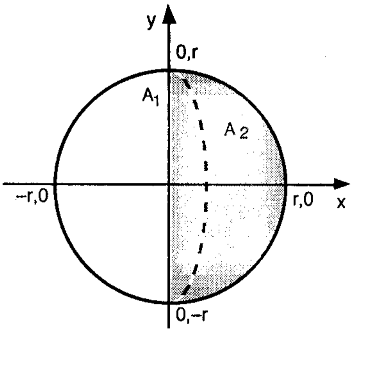
$$f(y) \geq g(y) \Rightarrow V_y = \pi\int_a^b \left[f^2(y) - g^2(y)\right]dy$$



ÖRNEK $x^2 + y^2 = r^2$ denklemi ile verilen çemberin x ekseni etrafında 360° dönmesiyle elde edilen **cismin (kürenin) hacmini bulunuz.**

ÇÖZÜM $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2$ dir.

Çemberin grafiği yanda verilmiştir.



x = –r, x = r arasındaki yarım dairenin x ekseni etrafında 360° dönmesiyle meydana gelen cisim (0,0) merkezli r yarıçaplı küre olacağından;

$V_x = \pi\int_{-r}^{r} y^2dx = \int_{-r}^{r}\left(r^2 - x^2\right)dx$ olur. A_2 ve A_1 alanları simetrik olduğundan;

$$V_x = 2\pi\int_0^r \left(r^2 - x^2\right)dx = 2\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r \pi = 2\pi\cdot\left[r^3 - \frac{r^3}{3}\right]$$

$$= 2\pi\cdot\frac{2r^3}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{olur.}$$

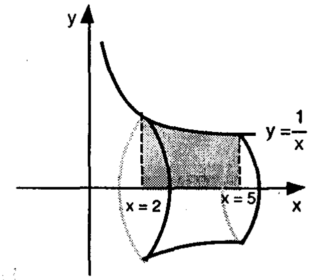
ÖRNEK

$y = \frac{1}{x}$ eğrisi, x = 2, x = 5 ve y = 0 doğruları ile sınırlanan alanın **x ekseni etrafında 360° döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi kaç br³ olur?**

ÇÖZÜM

$$V = \pi\int_2^5 y^2dx \Rightarrow \pi\int_2^5\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi\int_2^5 x^{-2}dx = -\pi\frac{1}{x}\Big]_2^5$$

$$= -\pi\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{10}\text{br}^3 \text{ olur.}$$



ÖRNEK

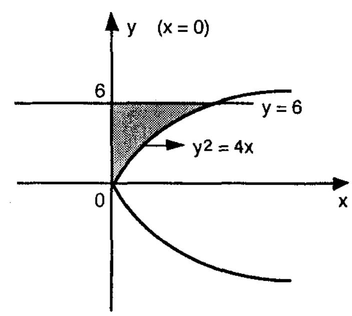
$y^2 = 4x$ eğrisi, y = 0 ve y = 6 doğruları ile sınırlı bölgenin y ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan **cismin hacmini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$V = \pi\int_a^b \left(f(y)\right)^2\cdot dy \text{ kuralından;}$$

$$V = \pi\int_0^6\left(\frac{y^2}{4}\right)^2 dy = \pi\int_0^6 \frac{y^4}{16}dy = \frac{\pi}{16}\left(\frac{y^5}{5}\right)\Big]_0^6$$

$$= \frac{\pi}{80}\left(6^5-0\right) = \frac{486\pi}{5}\text{br}^3 \text{ olur.}$$



ÖRNEK

$f(x) = \sqrt{x}$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonlarının grafikleri ile sınırlanan alanın, **x ekseni etrafında 360° döndürülmesi ile oluşan hacmi kaç br³ olur?**

ÇÖZÜM

Önce eğrilerin kesim noktalarını bulalım.

$$x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^4 = x$$

$$x^4 - x = 0 \Rightarrow x\left(x^3-1\right) = 0$$

$$x = 0 \lor x^3 - 1 = 0, \quad x = 1 \text{ olur.}$$

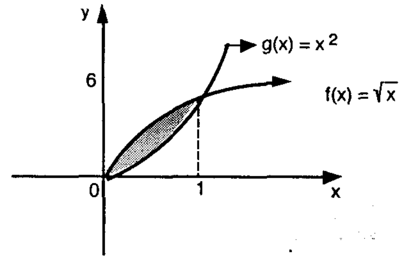
Kesim noktaları: A(0, 0) B(1, 1) dir.

x ekseni etrafından dönmesinden oluşan cismın hacmi

$$V_x = \pi\int_0^1\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right)dx = \pi\int_0^1\left(x - x^4\right)dx$$

$$= \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{3\pi}{10}\text{br}^3 \text{ olur.}$$



ÖRNEK

A(0, 0), B(a, 0), C(a, b) noktalarından oluşan $\overset{\triangle}{ABC}$ nin

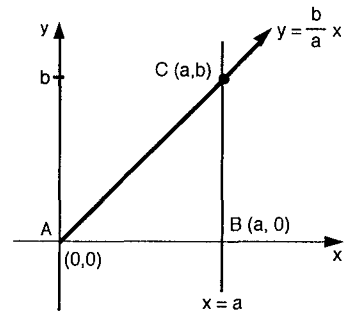
a) x ekseni etrafında,

b) y ekseni etrafında,

360° döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi kaç br³ olur?

ÇÖZÜM

$|AC|$ nin eğimi $=\dfrac{b}{a}$ ve denklemi $\Rightarrow y=\dfrac{b}{a}x$ olur.



a) x ekseninde dönmesiyle oluşan cismin hacmi,

$$V_x=\pi\int_0^a\left(\frac{b}{a}x\right)^2dx=\pi\int_0^a\frac{b^2}{a^2}x^2dx=\frac{\pi b^2}{a^2}\int_0^a x^2dx$$

$$=\frac{\pi b^2}{a^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^a=\frac{\pi b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3}=\frac{\pi ab^2}{3} \text{ olur.}$$

b) y ekseninde dönmesiyle oluşan cismin hacmi,

$$V_y=\pi\int_0^b\left[(f(y))^2-(g(y))^2\right]dy \text{ kuralını uygularsak;}$$

$$V_y=\pi\int_0^b\left[a^2-\left(\frac{a}{b}y\right)^2\right]dy=\pi\int_0^b\left(a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2\right)dy$$

$$=\pi\int_0^b a^2dy-\pi\int_0^b\frac{a^2}{b^2}dy=\pi\left(a^2y-\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y^3}{3}\right)\Bigg]_0^b$$

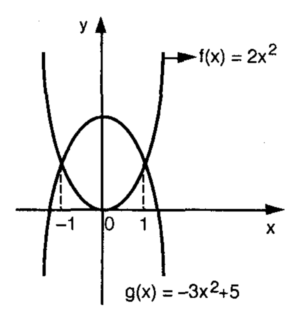
$$=\pi\left(a^2b-\frac{a^2b^3}{b^2\cdot 3}\right)=\pi\left(a^2b-\frac{a^2b}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}a^2b \text{ br}^3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$f(x)=2x^2$, $g(x)=-3x^2+5$ fonksiyonlarının grafikleri ile sınırlanan **alanın, x ekseni etrafında 360° döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi kaç br³ olur?**

ÇÖZÜM

Önce iki eğrinin kesim noktalarını bulalım.



$2x^2=-3x^2+5$

$5x^2=5$

$x^2=1\Rightarrow x=\mp 1$ bulunur.

$$V_x = \pi\int_{-1}^{1}\left[\left(g(x)\right)^2 - \left(f(x)\right)^2\right]dx \text{ uygulanırsa}$$

$$= \pi\int_{-1}^{+1}\left[\left(-3x^2+5\right)^2 - \left(2x^2\right)^2\right]dx$$

$$= \pi\int_{-1}^{+1}\left[9x^4 - 30x^2 + 25 - 4x^4\right]dx$$

$$= \pi\int_{-1}^{+1}\left[5x^4 - 30x^2 + 25\right]dx = \pi\left(x^5 - 10x^3 + 25x\right)\Big]_{-1}^{+1}$$

$$= \pi\left[(1-10+25) - (-1+10-25)\right] = \pi(16+16) = 32\pi br^3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$y = x^2$ ve $y = x$ doğruları arasında kalan alanın

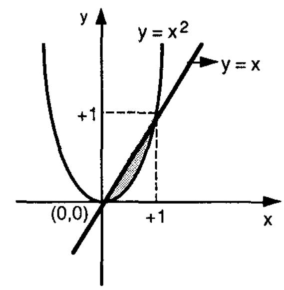
a) x ekseni etrafında,

b) y ekseni etrafında,

360° döndürülmesi ile elde edilen cisimlerin hacimlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Önce eğrilerin kesim noktalarını bulalım.



$x^2 = x \qquad x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x = 0 \qquad x = 1$

Kesim noktaları: A(0, 0) B(1, 1) olur.

a) x ekseni etrafında dönmesinden oluşan cismin hacmi,

$$V_x = \pi\int_0^1\left[\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right]\cdot dx \text{ kuralı uygulanırsa}$$

$$V_x = \pi\int_0^1\left[(x)^2 - \left(x^2\right)^2\right]dx = \pi\int_0^1\left(x^2 - x^4\right)dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right] = \frac{2\pi}{15} br^3 \text{ olur.}$$

b) y ekseni etrafında dönmesinden oluşan cismin hacmi;

$y = x^2 \Rightarrow x = \mp\sqrt{y}$ olan I. bölgede olduğundan $x = \sqrt{y}$ alınarak

$$V = \pi\int_0^1\left[\left(g(y)\right)^2 - \left(f(y)\right)^2\right]dy \text{ kuralı uygulanırsa,}$$

$$V = \pi\int_0^1\left[\left(\sqrt{y}\right)^2 - (y)^2\right]dy = \pi\int_0^1\left[y - y^2\right]dy = \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1$$

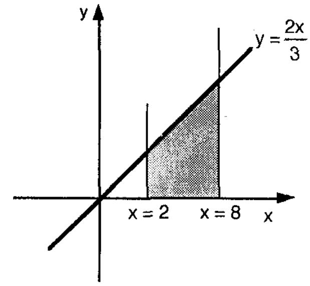
$$= \pi\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = \frac{\pi}{6} br^3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$y = \frac{2x}{3}$, $x = 2$, $x = 8$ doğruların x ekseni ile sınırladığı bölgenin, **x ekseni etrafında 360° döndürülmesi ile elde edilen cismin hacmini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$V=\pi\int_a^b (f(x))^2dx$ kuralını uygularsak,



$$V=\pi\int_2^8\left(\frac{2x}{3}\right)^2dx=\pi\int_2^8\frac{4x^2}{9}dx$$

$$=\frac{\pi}{9}\int_2^8 4x^2\cdot dx=\frac{\pi}{9}\left[\frac{4x^3}{3}\right]_2^8=\frac{4\pi}{27}\left(8^3-2^3\right)$$

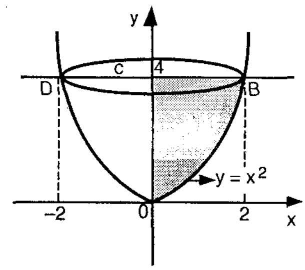
$$=\frac{4\pi}{27}(512-8)=\frac{224\pi}{3}br^3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$y=x^2$ parabolü, $y=4$ ve $x=0$ doğrusu ile sınırlı bölgenin **y** ekseni etrafında 360° dönmesinden elde edilen **cismin hacmini bulunuz.**

ÇÖZÜM

Dönme y eksine etrafında yapıldığından



$y=x^2 \Rightarrow x=\mp\sqrt{y}$ olur.

I. bölgeden ayırdığı kısım istendiğinden $x=\sqrt{y}$ olur.

$V_y=\pi\int_a^b (f(y))^2dy$ kuralını uygularsak hacim;

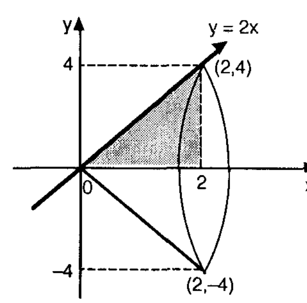
$$V_y=\pi\int_0^4\left(\sqrt{y}\right)^2dy=\pi\int_0^4 ydy=\pi\cdot\frac{16}{2}=8 \text{ br}^3 \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$y=2x$ doğrusu $x=0$, $x=2$ doğrusu ve x ekseni ile sınırlanan bölgenin **x ekseni etrafında 360° döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.**

ÇÖZÜM

Kural 1 uygulanarak



$$V_x=\pi\int_0^2(2x)^2dx$$

$$V_x=\pi.4\left.\frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$V_x=\pi.\frac{4}{3}\left(2^3-0^3\right)$$

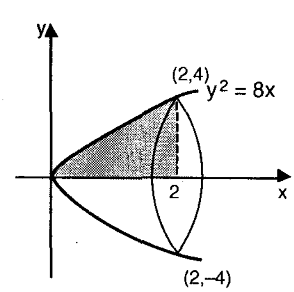
$$V_x=\frac{32\pi}{3}br^3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$y^2=8x$ parabolünün $x=2$ doğrusu ile sınırlanan birinci bölgedeki alanının **x ekseni etrafında 360° döndürülmesi ile meydana gelen cismin hacmini bulunuz.**

ÇÖZÜM

Kural 1 uygulanırsa



$$V_x=\pi\int_0^2 y^2dx$$

$$=\pi\int_0^2 8xdx$$

$$=\pi\cdot 8\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\pi\cdot\frac{8.4}{2}=16\pi br^3 \text{ bulunur.}$$

İNTEGRAL YARDIMIYLA LİMİT HESABI

TANIM: **f, $[a,b]$ aralığında sürekli olmak üzere;**

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)=\int_a^b f(x)dx$$

$a=0,\ b=1$ alınırsa

2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

ÖRNEK $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2\pi}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{(k-1)\pi}{2}$ **limitini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b-a}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a+\dfrac{k(b-a)}{n}\right)$ idi.

Burada; $f(x)\to \cos x$, $a=0$ ve $b=\dfrac{\pi}{2}$ alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2\pi}\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{(k-1)\pi}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1 \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{1}{n}+\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+\sin\dfrac{n-1}{n}\right)$ ise **L kaçtır?**

ÇÖZÜM 1. formülde $a=0$, $b=1$ alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}$$

$$=\int_0^1 \sin x dx=-\cos x\Big]_0^1=(-\cos 1+\cos 0)$$

$$=\cos 0-\cos 1=1-\cos 1 \quad \text{bulunur.}$$

BİR FONKSİYONUN BİR ARALIKTAKİ ORTALAMA DEĞERİ

TEOREM: $[a,b]$ **aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere;**

$K = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ **şeklinde tanımlanan K sayısına f fonksiyonunun** $[a,b]$ **aralığındaki ortalama değeri denir.**

ÖRNEK $f(x) = x^3$ fonksiyonunun **[1, 4] aralığındaki ortalama değerini bulunuz.**

ÇÖZÜM Teoreme: $a = 1,\ b = 4,\ f(x) = x^3$ uygulanırsa

$$\text{f nin ortalama değeri} = \frac{1}{4-1}\cdot\int_1^4 x^3dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg]_1^4 = \frac{1}{12}\left(4^4-1^4\right) = \frac{1}{12}(256-1) = \frac{255}{12} \text{ olur.}$$

ÖRNEK $f(x) = \cos 2x$ fonksiyonunun $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ **aralığındaki ortalama değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM Teoreme $a = \dfrac{\pi}{4}$, $b = \dfrac{\pi}{2}$ $f(x) = \cos 2x$ uygulanırsa

$$\text{f nin ortalama değeri} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx \text{ olur.}$$

$$= \frac{1}{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\cdot 2dx = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\sin 2x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}(0-1) = -\frac{2}{\pi} \text{ bulunur.}$$

İNTEGRALİN HAREKET PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

KURAL: **Bir hareketlinin t anında gittiği yolun uzunluğu S = f(t) ise**

Hız $= \vartheta = \dfrac{dS}{dt}$ **(Yolun zamana göre türevi hızı verir.)**

İvme $= a = \dfrac{d\vartheta}{dt} = \dfrac{d^2S}{dt^2}$ **(Hızın zamana göre türevi ivmeyi verir veya yolun zamana göre ikinci türevi ivmeyi verir.)**

Buradan; $a = \dfrac{d\vartheta}{dt}$ $\quad adt = d\vartheta$ **olur.**

t anında; $S = \displaystyle\int_0^t \vartheta(x)dx$ **(Hızın zaman göre integrali yolu verir)**

$\vartheta = \displaystyle\int_0^t a(x)dx$ **(İvmenin zamana göre integrali hızı verir)**

ÖRNEK

t = zaman, S = yol olmak üzere bir hareketlinin hızı = $\vartheta = \sin t\sqrt{2+2\cos t}$ olduğuna göre,

$0 \leq t \leq \pi$ zaman aralığında, **t = π anında hareketlinin gittiği yolun uzunluğunu bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\vartheta = \frac{dS}{dt} \Rightarrow \sin t\sqrt{2+2\cos t} = \frac{dS}{dt}$$

$$\Rightarrow dS = \sin t\cdot\sqrt{2+2\cos t}\,dt$$ her iki yanın integrali alınırsa,

$$\int dS = \int \sin t\sqrt{2+\cos t}\,dt$$ $0 \leq t \leq \pi$ olduğundan

$$S = \int \sin t\sqrt{2+2\cos t}\,dt$$

$$S = \int_0^{\pi} \sin t\cdot\sqrt{2+2\cos t}\,dt \text{ olur.}$$

u = 2 + 2cost, du = –2sintdt

t = 0 için u = 2 + 2cos0 ⇒ u = 2 + 2 = 4

$\sin t dt = -\frac{du}{2}$

t = π için u = 2 + 2cosπ ⇒ u = 2 – 2 = 0

O halde,

$$S = \int_4^0 u^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_4^0 = -\frac{1}{2}\left(0-\frac{4^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{8}{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{3} = \frac{8}{3} \text{ birim olur.}$$

ÖRNEK

Bir hareketlinin t zamanındaki hızı $\vartheta = |t-1|$ dir. $0 \leq t \leq 4$ olduğuna göre, **t = 4 anında hareketlinin gittiği yolun uzunluğunu bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\vartheta = |t-1| \Rightarrow \vartheta = \begin{cases} -t+1 \ ; \ 0 \leq t \leq 1 \text{ ise} \\ t-1 \ ; \ 1 < t < 4 \text{ ise} \end{cases}$$ yolu S olmak üzere;

$\vartheta = \frac{dS}{dt}$ idi. Yolun zamana göre türevi hızı verir .

$$|1-t| = \frac{dS}{dt} \Rightarrow |1-t|dt = dS$$

$0 \leq t \leq 1$ için dS = (–t + 1)dt

$1 \leq t \leq 4$ için dS = (t – 1)dt olur.

$$S = \int_0^4 |t-1|dt = \int_0^1 (-t+1)dt + \int_1^4 (t-1)dt$$

$$S = -\frac{1}{2}t^2 + t\Big]_0^1 + \frac{t^2}{2} - t\Big]_1^4 = \left(-\frac{1}{2}+1\right) - 0 + \left(\frac{4^2}{2}-4\right) - \left(\frac{1}{2}-1\right)$$

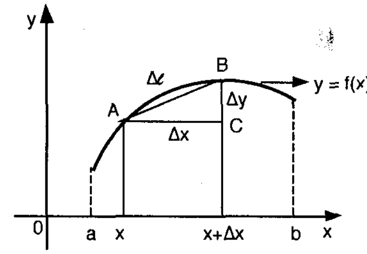
$$= \frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{2} = 5 \text{ birim olur.}$$

YAY UZUNLUĞUNUN HESABI

$y = f(x)$ eşitliği ile verilen türevli f fonksiyonunu göz önüne alalım.

Bu eğrinin $x_1 = a$ ve $x_2 = b$ apsisli noktaları arasında bulunan parçasının uzunluğunu hesaplamak istiyoruz.

Δx çok küçük olduğundan $\overset{\frown}{AB}$ yayının uzunluğu $\Delta\ell$ uzunluğu ile AB doğru parçasının uzunluğu yaklaşık olarak eşittir.



Buna göre, $\Delta\ell \cong \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

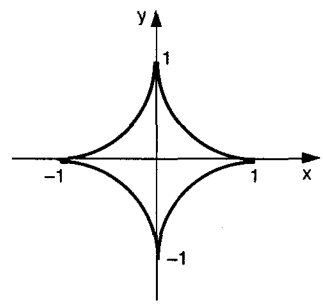
Buradan $\Delta\ell = \sqrt{1+\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x$ yazılabilir.

Her iki taraf Δx ile bölünür ve $\Delta x \to 0$ için limit alınırsa $\ell' = \sqrt{1+(y')^2}$ bulunur.

Diferansiyel ve integral hesabının temel teoremi gereğince $\boxed{\ell = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx}$ bulunur.

ÖRNEK $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ **eğrisinin çevre uzunluğunu bulunuz.**

ÇÖZÜM Eğrinin grafiği yanda verilmiştir.



Verilen fonksiyonun türevi alınırsa (Kapalı fonksiyon türevi)

$y' = \dfrac{-y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$ olduğundan

Çevre uzunluğu:

$$\ell = 4\int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = 4\int_0^1 \sqrt{1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx = 4\int_0^1 \sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx$$

$$= 4\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx = 4\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\,dx = 4\left(\left.\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_0^1\right) = 6 \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK $y = \dfrac{1}{3}\left(x^2+2\right)^{\frac{3}{2}}$ denklemi ile verilen eğrinin. $x_1 = 0$ **ve** $x_2 = 3$ **apsisleri arasında kalan parçasının uzunluğu kaç birimdir?**

ÇÖZÜM $y' = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{2}\left(x^2+2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x = \left(x^2+2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot x$

$$\ell = \int_0^3 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{1+\left[\left(x^2+2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot x\right]^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{1+\left(x^2+2\right)\cdot x^2}\,dx$$

$$= \int_0^3 \sqrt{x^4+2x^2+1}\,dx = \int_0^3 \sqrt{\left(x^2+1\right)^2}\,dx$$

$$= \int_0^3 \left(x^2+1\right)dx = \left.\frac{x^3}{3}+x\right]_0^3 = 9+3 = 12 \text{ birim bulunur.}$$

ÇÖZÜMLÜ TEST –1

1. $\int f^2(3x)\,d(f(3x))$ **ifadesinin eşiti nedir?**

A) $f(3x) + C$
B) $\frac{1}{3}f(3x) + C$
C) $\frac{1}{3}f^2(3x) + C$
D) $\frac{1}{3}f^3(3x) + C$
E) $f^3(3x) + C$

ÇÖZÜM

$$\int f^2(3x)\,d(f(3x)) = \frac{1}{3}f^3(3x) + C \text{ bulunur.}$$

YANIT "D"

2. $\int_{-1}^{2}(⟦x⟧ + \text{sgn}(x))dx$ **ifadesi neye eşittir?**

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

ÇÖZÜM

$$\int_{-1}^{2}(⟦x⟧ + \text{sgn}(x))dx = \int_{-1}^{0}(-1+(-1))dx + \int_{0}^{1}(0+1)dx + \int_{1}^{2}(1+1)dx$$

$$= \int_{-1}^{0}-2dx + \int_{0}^{1}dx + \int_{1}^{2}2dx$$

$$= -2x\Big]_{-1}^{0} + x\Big]_{0}^{1} + 2x\Big]_{1}^{2}$$

$$= -2(0-(-1)) + (1-0) + 2(2-1)$$

$$= -2+1+2$$

$$= 1$$

YANIT "E"

3. $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ve $f(-1) = 2$ olduğuna göre, **f(2) nin değeri nedir?**

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

ÇÖZÜM

$$\int f'(x)dx = \int (3x^2 - 2x + 1)dx$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + x + C$$

$$f(-1) = 2 \Rightarrow -1-1-1+C = 2$$

$$C = 5$$

$f(x) = x^3 - x^2 + x + 5$ bulunur.

$f(2) = 2^3 - 2^2 + 2 + 5$

$f(2) = 11$

YANIT"A"

4. $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ ise $\int_{3}^{4}d(f^{-1}(x))$ **ifadesinin değeri nedir?**

A) $-\frac{7}{2}$
B) $-\frac{5}{2}$
C) $-\frac{3}{2}$
D) $-\frac{1}{2}$
E) $\frac{3}{2}$

ÇÖZÜM

$f(x) = \frac{2x+3}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-2}$ bulunur.

$$\int_{3}^{4}d(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x)\Big]_{3}^{4} = f^{-1}(4) - f^{-1}(3)$$

$$= \frac{7}{2} - 6 = -\frac{5}{2}$$

YANIT "B"

5. $f(x) = x + 1$ ise $\int_{0}^{3}2f(x)d(f(x))$ **ifadesinin eşiti nedir?**

A) 10 B) 12 C) 13 D) 15 E) 16

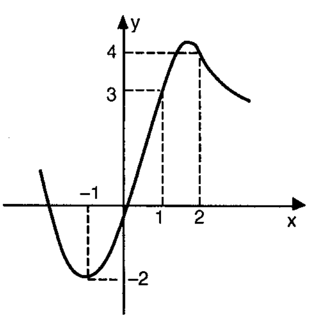
ÇÖZÜM

$$\int_{0}^{3}2f(x)d(f(x)) = f^2(x)\Big]_{0}^{3} = f^2(3) - f^2(0)$$

$$= (3+1)^2 - (0+1)^2 = 15$$

YANIT "D"

6.



$f : R \to R$ fonksiyonunun grafiği yukarıda verilmiştir.

$\int_{-1}^{2}\frac{3x^2f(x) - x^3f'(x)}{f^2(x)}dx$ **ifadesi neye eşittir?**

A) 1
B) $\frac{1}{2}$
C) $\frac{3}{2}$
D) 2
E) $\frac{5}{2}$

ÇÖZÜM

$$\int_{-1}^{2}\frac{3x^2f(x)-x^3f'(x)}{f^2(x)}dx=\int_{-1}^{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{f(x)}\right)dx \text{ bulunur.}$$

$$=\left.\frac{x^3}{f(x)}\right]_{-1}^{2}$$

(Şekilden f(2) = 4 ve f(–1) = –2 bulunur. Dolayısıyla)

$$=\frac{2^3}{f(2)}-\frac{(-1)^3}{f(-1)}$$

$$=\frac{8}{4}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3}{2}$$

YANIT "C"

7. $\int\frac{\pi}{x^2}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)dx$ **ifadesi neye eşittir?**

A) $\sin\frac{\pi}{x}+C$ B) $\sin\left(-\frac{\pi}{x}\right)+C$

C) $\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)+C$ D) $\sin\frac{x}{\pi}+C$

E) $\cos\frac{x}{\pi}+C$

ÇÖZÜM

$\frac{\pi}{x}=t$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$\frac{\pi}{x}=t\Rightarrow -\frac{\pi}{x^2}dx=dt\Rightarrow dx=-\frac{x^2}{\pi}dt$ bulunur.

$$\int\frac{\pi}{x^2}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)dx=\int\frac{\pi}{x^2}\sin t\left(-\frac{x^2}{\pi}\right)dt$$

$$=\int -\sin t\,dt$$

$t=\frac{\pi}{x}$ olduğundan; $=\cos t+C$

$=\cos\frac{\pi}{x}+C$ bulunur.

YANIT "C"

8. $\frac{d}{dx}\left[\int_0^3\frac{x+2}{x^2+4x-7}dx\right]$ **ifadesinin eşiti nedir?**

A) $-\frac{2}{3}$ B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{2}$

ÇÖZÜM

$\int_0^3\frac{x+2}{x^2+4x-7}dx$ integralinin değeri bir reel sayıdır.

$\frac{d}{dx}\left[\int_0^3\frac{x+2}{x^2+4x-7}\right]=0$ bulunur.

YANIT "B"

9. $a>0$ ve $\int_{-a}^{0}\frac{(a+2x)^2}{a}dx=27$ ise **a kaçtır?**

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

ÇÖZÜM

$a+2x=t$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$2dx=dt\Rightarrow dx=\frac{dt}{2}$ olur.

Sınırlar,

$x=0$ için $t=a$

$x=-a$ için $t=-a$

$$\int_{-a}^{0}\frac{(a+2x)^2}{a}=\int_{-a}^{a}\frac{t^2}{2a}dt$$

$$=\left.\frac{t^3}{3\cdot 2a}\right]_{-a}^{a}$$

$$27=\left(\frac{a^3}{6a}-\left(-\frac{a^3}{6a}\right)\right)$$

$$27=\frac{a^2}{3}\Rightarrow a^2=81$$

a = 9 bulunur.

YANIT "C"

10. Aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır?</u>

A) $\int e^{\sin x}\cdot\cos x\,dx=e^{\sin x}+C$

B) $\int\frac{dx}{x\ln x}=\ln|\ln x|+C$

C) $\int\frac{x+3}{x+2}dx=x+\ln|x+2|+C$

D) $\int\frac{(3x^2+2+\sin x)}{(x^3+2x+\cos x)}dx=\ln|x^3+2x+\cos x|+C$

E) $\int\frac{e^x+\sin x}{e^x-\cos x}dx=\ln|e^x-\cos x|+C$

ÇÖZÜM

$\left(x^3+2x+\cos x\right)' = 3x^2+2-\sin x$ olduğundan

$$\int \frac{\left(3x^2+2+\sin x\right)}{\left(x^3+2x+\cos x\right)}dx \neq \ln\left|x^3+2x+\cos x\right|+C$$

YANIT "D"

11. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2+x}$ **ifadesi neye eşittir?**

A) $\ln\frac{3}{2}$ B) $\ln\frac{4}{3}$ C) $\ln\frac{5}{2}$ D) ln3 E) ln4

ÇÖZÜM

$$\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$$

$1=A(x+1)+Bx$

$x=0$ için $A=1$

$x=-1$ için $B=-1$ bulunur.

$$\int_1^2\frac{dx}{x^2+x}=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(\ln|x|-\ln|x+1|\right)\Big]_1^2$$

$$=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Bigg]_1^2=\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}$$

$$=\ln\frac{4}{3}$$

YANIT "B"

12. $\displaystyle\int -\frac{\tan x}{\ln(\cos x)}dx$ **ifadesi neye eşittir?**

A) ln lsinxl + C B) lnlcosxl + C
C) lnltanxl + C D) lnlcotxl+C
E) lnllncosxl + C

ÇÖZÜM

ln(cosx) = t değişken değiştirmesi yapılırsa

$$-\frac{\sin x}{\cos x}dx=dt \Rightarrow dx=-\frac{1}{\tan x}dt$$

$$\int -\frac{\tan x}{\ln(\cos x)}dx=\int -\frac{\tan x}{t}\left(-\frac{1}{\tan x}\right)dt$$

$$=\int \frac{1}{t}dt$$

$t=\ln(\cos x)$ olduğundan

$$=\ln|t|+C$$

$$=\ln|\ln\cos x|+C \text{ bulunur.}$$

YANIT "E"

13. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)dx$ **ifadesi neye eşittir?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

ÇÖZÜM

$$\sin^4 x-\cos^4 x=\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)\underbrace{\left(\sin^2+\cos^2 x\right)}_{1}$$

$$=\sin^2 x-1+\sin^2 x$$

$$=2\sin^2 x-1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\sin^2 x-1\right)dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx$$

$$=\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg]_0^{\frac{\pi}{4}}-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$$

$$=-\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

YANIT "A"

14. $\displaystyle\int \sin x\, 2^{-\cos x}dx$ **ifadesi neye eşittir?**

A) $\dfrac{2^{\cos x}}{\ln 2}+C$ B) $\dfrac{2^{-\cos x}}{\ln 2}+C$

C) $\dfrac{2^{\sin x}}{\ln 2}+C$ D) $\dfrac{2^{-\sin x}}{\ln 2}+C$

E) $2^{\cos x}+C$

ÇÖZÜM

–cosx = t değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\sin x\,dx=dt \Rightarrow dx=\frac{dt}{\sin x} \text{ bulunur.}$$

$$\int \sin x\,2^{-\cos x}dx=\int \sin x\,2^t\,\frac{dt}{\sin x}$$

$$=\int 2^t dt$$

$t=-\cos x$ olduğundan

$$=\frac{2^t}{\ln 2}+C$$

$$=\frac{2^{-\cos x}}{\ln 2}+C$$

YANIT"B"

ZAFER YAYINLARI

15. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2-\sin^2 x}$ integralinde $\tan x = t$ değişken değiştirmesi yapılırsa integralin eşiti **aşağıdakilerden hangisidir?**

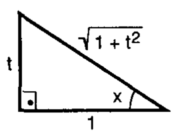
A) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{t^2+2}$ B) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(t^2+1\right) dt$

C) $\displaystyle\int_0^1 \left(t^2+1\right) dt$ D) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt$

E) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^2+2}$

ÇÖZÜM

$\tan x = t$ için



olduğundan $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ bulunur.

$\tan x = t \Rightarrow x = \arctan t \Rightarrow \dfrac{dt}{1+t^2} = dx$ olur.

Sınırlar;

$x = 0$ için $\tan 0 = t \Rightarrow t = 0$

$x = \dfrac{\pi}{4}$ için $\tan\dfrac{\pi}{4} = t \Rightarrow t = 1$ olur.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \int_0^1 \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{2-\dfrac{t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{t^2+2} \text{ bulunur.}$$

YANIT "E"

16. $\displaystyle\int_{e^{\frac{\pi}{6}}}^{e^{\frac{\pi}{4}}} \frac{dx}{x\cos^2(\ln x)}$ **ifadesi neye eşittir?**

A) 3 B) $3\sqrt{3}$ C) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

D) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$ E) $\sqrt{3}$

ÇÖZÜM

$\ln x = t$ değişten değiştirmesi yapılırsa,

$\dfrac{1}{x}dx = dt \Rightarrow dx = xdt$ olur.

$$\int \frac{dx}{x\cos^2(\ln x)} = \int \frac{1}{x\cos^2 t} xdt$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 t} dt$$

$$= \tan t + C$$

$$= \tan(\ln x) + C$$

$$\int_{e^{\frac{\pi}{6}}}^{e^{\frac{\pi}{4}}} \frac{dx}{x\cos^2(\ln x)} = \tan(\ln x)\Big]_{e^{\frac{\pi}{6}}}^{e^{\frac{\pi}{4}}}$$

$$= \tan\left(\ln e^{\frac{\pi}{4}}\right) - \tan\left(\ln e^{\frac{\pi}{6}}\right)$$

$$= \tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{3} \text{ bulunur.}$$

YANIT "D"

17. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ fonksiyonunun $0 \le x \le 8$ **aralığındaki ortalama değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 0 B) $\dfrac{3}{2}$ C) 2 D) 3 E) 4

ÇÖZÜM

Ortalama değer teoremi gereğince

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c) \Rightarrow f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \text{ olduğundan}$$

$$f(c) = \frac{\int_0^8 \sqrt[3]{x}dx}{8-0} = \frac{1}{8}\cdot\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Bigg]_0^8$$

$$= \frac{1}{8}\cdot 8^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{8}16 = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

YANIT "B"

18. $\int_{-3}^{3} \frac{x^5}{1+x^6}$ **ifadesi neye eşittir?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{7}{4}$

ÇÖZÜM

$f(x) = \frac{x^5}{1+x^6}$ için

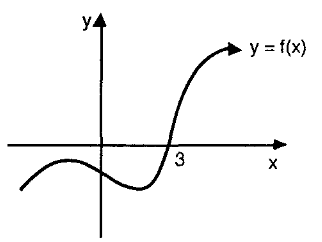
$$f(-x) = \frac{(-x)^5}{1+(-x)^6} = -\frac{x^5}{1+x^6} = -f(x)$$

olduğundan f(x) tek fonksiyondur. Bundan dolayı

$$\int_{-3}^{3} \frac{x^5}{1+x^6}dx = 0 \quad \text{bulunur.}$$

YANIT "B"

19.



y = f(x) fonksiyonunun grafiği yukarıda verilmiştir. Buna göre,

$\int_{-1}^{4} x\,\mathrm{sgn}(f(x))dx$ **integralini hesaplayınız.**

A) $\frac{7}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{3}{2}$

ÇÖZÜM

$$\mathrm{sgn}(f(x)) = \begin{cases} -1 & ; \ x<3 \ \text{ise} \\ 0 & ; \ x=3 \ \text{ise} \\ 1 & ; \ x>3 \ \text{ise} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{4} x\,\mathrm{sgn}(f(x)) = \int_{-1}^{3} x(-1)dx + \int_{3}^{4} x(1)dx$$

$$= -\left.\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{3} + \left.\frac{x^2}{2}\right]_{3}^{4}$$

$$= -\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{16}{2} - \frac{9}{2}\right)$$

$$= -4 + \frac{7}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{bulunur.}$$

YANIT "D"

20. $\int 3x^2 \sin x^3 e^{\cos x^3} dx$ **ifadesi neye eşittir?**

A) $e^{\cos x^3} + C$ B) $e^{\sin x^3} + C$

C) $\frac{1}{3} e^{\cos x^3} + C$ D) $-e^{\sin x^3} + C$

E) $-e^{\cos x^3} + C$

ÇÖZÜM

$\cos x^3 = t$ denirse,

$$-3x^2.\sin x^3 dx = dt \Rightarrow dx = -\frac{dt}{3x^2 \sin x^3}$$

$$= \int 3x^2 \sin x^3 e^t \left(-\frac{dt}{3x^2 \sin x^3}\right)$$

$$= -\int e^t dt$$

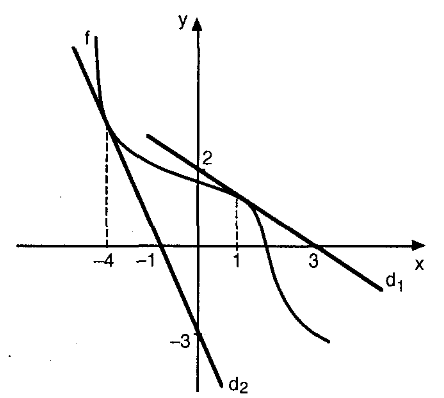
$t = \cos x^3$ olduğundan

$$= -e^t + C$$

$$= -e^{\cos x^3} + C$$

YANIT "E"

21.



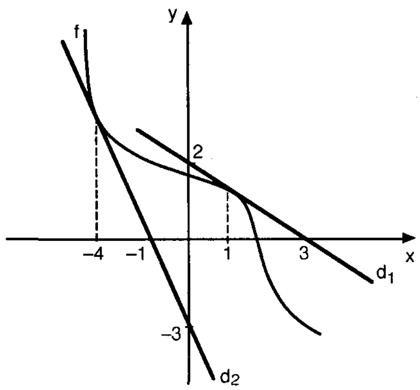
Yukarıdaki şekilde f fonksiyonunun grafiği ile x = –4 ve x = 1 apsisli noktalarındaki teğetleri verilmiştir. Buna göre,

$\int_{-4}^{1} \frac{f''(x)}{f'(x)}dx$ **ifadesi neye eşittir?**

A) $\ln\frac{2}{9}$ B) $\ln\frac{2}{7}$ C) $\ln\frac{1}{2}$

D) $\ln\frac{3}{2}$ E) $\ln 2$

ÇÖZÜM



d_1 doğrusunun eğimi

$$m_{d_1} = \frac{2-0}{0-3} = -\frac{2}{3}$$

$$f'(1) = m_{d_1} = -\frac{2}{3}$$

d_2 doğrusunun eğimi

$$m_{d_2} = \frac{-3-0}{0+1} = -3$$

$f'(-4) = m_2 = -3$ bulunur.

$$\int_{-4}^{1} \frac{f''(x)}{f'(x)}dx = \ln|f'(x)|\Big]_{-4}^{1}$$

$$= \ln|f'(1)| - \ln|f'(-4)|$$

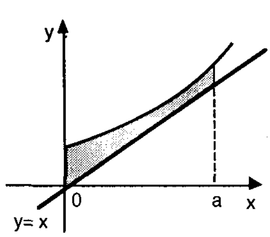
$$= \ln\left|\frac{f'(1)}{f'(-4)}\right| = \ln\frac{2}{9}$$

YANIT "A"

22. $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+2x+1}$ eğrisi, bu eğrinin eğik asimptotu, $x=0$ ve $x=a$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı **$a \to \infty$ kaç br^2 dir?**

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

ÇÖZÜM



$$f(x) = \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+2x+1} = x + \frac{1}{(x+1)^2}$$

fonksiyonun eğik asimptotu $y = x$ doğrusu olup grafiği yukarıdaki gibidir.

Buna göre istenilen alan,

$$A = \lim_{a\to\infty}\left[\int_0^a \left(\frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+2x+1} - x\right)\cdot dx\right] \text{ dir.}$$

$$A = \lim_{a\to\infty}\left[\int_0^a \left(x + \frac{1}{(x+1)^2} - x\right)dx\right]$$

$$A = \lim_{a\to\infty}\left[\int_0^a \frac{dx}{(x+1)^2}\right]$$

$$A = -\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)\Big]_0^a$$

$$= -\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{0+1}\right)$$

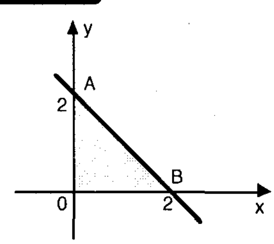
$$= 1 br^2 \text{ dir.}$$

YANIT "B"

23. **$x + y - 2 = 0$ doğrusu ile x ve y eksenlerinin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

ÇÖZÜM–1



$$\overset{\triangle}{(AOB)} = \frac{2\cdot 2}{2} = 2br^2$$

ÇÖZÜM–2

$$x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 - x$$

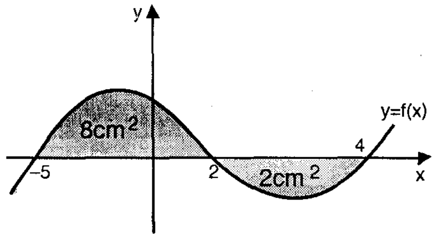
$$A(\overset{\triangle}{AOB}) = \int_0^2 (2-x)dx$$

$$= \int_0^2 (2-x)dx = \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big]_0^2$$

$$= 4 - 2 = 2br^2$$

YANIT "A"

24.



y = f(x) fonksiyonunun grafiği yukarıda verilmiştir. Taralı bölgelerin alanları üzerinde yazılmıştır. Buna göre, $\int_{-5}^{4} f(x)dx$ **integralinin değeri nedir?**

A) 4 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

ÇÖZÜM

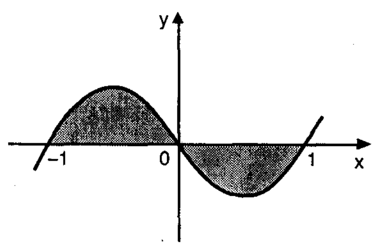
$\int_{-5}^{2} f(x)dx = 8$ ve $\int_{2}^{4} f(x)dx = -2$ olur.

$$\int_{-5}^{4} f(x)dx = \int_{-5}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{4} f(x)dx$$

$= 8 - 2 = 6$ bulunur.

YANIT "B"

25.



Şekilde $y = x^3 - x$ eğrisi ve Ox ekseni ile sınırlanmış taralı bölgenin Ox ekseni etrafında 360° döndürülmesi ile oluşan **cismin hacmi kaç birim küptür?**

A) $\frac{16}{105}\pi$ B) $\frac{19}{105}\pi$ C) $\frac{22}{105}\pi$

D) $\frac{25}{105}\pi$ E) $\frac{28}{105}\pi$

ÇÖZÜM

Taralı bölgeler simetrik olduğundan;

$$V = 2\pi\int_0^1 y^2dx = 2\pi\int_0^1 \left(x^3 - x\right)^2 dx$$

$$= 2\pi\int_0^1 \left(x^6 - 2x^4 + x^2\right)dx = 2\pi\left(\frac{x^7}{7} - \frac{2}{5}x^5 + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^1$$

$$= 2\pi\left[\left(\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) - (0)\right] = 2\pi\left(\frac{8}{105}\right)$$

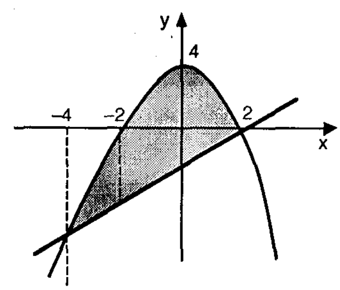
$= \frac{16\pi}{105}br^3$ bulunur.

YANIT "A"

26. $y = 4 - x^2$ parabolü ile $2x - y - 4 = 0$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı **kaç birim karedir?**

A) 18 B) 24 C) 36 D) 40 E) 48

ÇÖZÜM



Eğrilerin kesim noktası

$y = 2x - 4$, $y = 4 - x^2$ ise

$4 - x^2 = 2x - 4 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$

$x = 2$ $x = -4$ bulunur.

$$A = \int_{-4}^{2}\left[\left(4 - x^2\right) - \left(2x - 4\right)\right]dx$$

$$= \int_{-4}^{2}\left(-x^2 - 2x + 8\right)dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - x^2 + 8x\right)\Bigg]_{-4}^{2}$$

$= 36\,br^2$ bulunur.

YANIT "C"

27. $y = x^2$, $y = \dfrac{8}{x}$ eğrileri ve $x = 10$, $y = 0$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı **kaç birim karedir?**

A) $\dfrac{1}{2} + \ln 5$ B) $\dfrac{1}{3} + \ln 6$ C) $\dfrac{5}{3} + \ln 5$

D) $\dfrac{\ln 5}{2}$ E) $\dfrac{8}{3} + 8\ln 5$

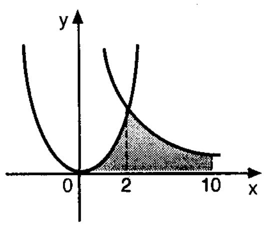
ÇÖZÜM

$y = x^2$ ve $y = \dfrac{8}{x}$

eğrilerinin kesim noktası

$x^2 = \dfrac{8}{x} \Rightarrow x^3 = 8$

$x = 2$ bulunur.



$$A = \int_0^2 x^2 dx + \int_2^{10} \frac{8}{x} dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^2 + 8\ln x \Big]_2^{10}$$

$$= \frac{8}{3} + 8(\ln 10 - \ln 2) = \frac{8}{3} + 8\ln 5 \text{ bulunur.}$$

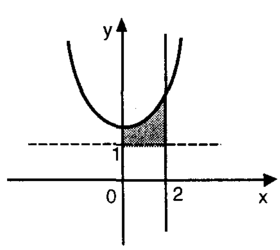
YANIT "E"

28. $y = x^2 + 2$ eğrisi y ekseni $y = 1$ ve $x = 2$ doğruları tarafından sınırlanan bölge $y = 1$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan **cismin hacmi kaç birim küptür?**

A) $\dfrac{48}{25}\pi$ B) $\dfrac{76}{32}\pi$ C) $\dfrac{346}{15}\pi$

D) $\dfrac{216}{15}\pi$ E) $\dfrac{281}{17}\pi$

ÇÖZÜM



$$V = \pi\int_0^2 \left(f^2(x) - 1^2\right)dx = \pi\int_0^2 \left[\left(x^2 + 2\right)^2 - 1\right]dx$$

$$= \pi\int_0^2 \left(x^4 + 4x^2 + 3\right)dx = \pi\left(\frac{x^5}{5} + \frac{4}{3}x^3 + 3x\right)\Big]_0^2$$

$$= \pi\left(\frac{96 + 160 + 90}{15}\right) = \frac{346}{15}\pi br^3$$

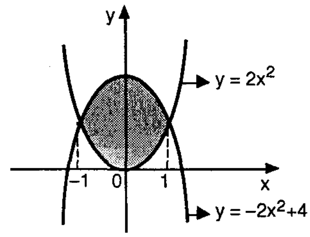
YANIT "C"

29. Denklemi $y = 2x^2$ ve $y = -2x^2 + 4$ olan eğrilerle sınırlanan düzlemsel bölgenin x ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan **cismin hacmi kaç birim küptür?**

A) $\dfrac{16}{3}\pi$ B) $\dfrac{22}{3}\pi$ C) $\dfrac{43}{3}\pi$

D) $\dfrac{64}{3}\pi$ E) $\dfrac{74}{3}\pi$

ÇÖZÜM



$$V = \pi\int_{-1}^{1} \left[\left(-2x^2 + 4\right)^2 - \left(2x^2\right)^2\right]dx$$

$$= \pi\int_{-1}^{1} \left(-16x^2 + 16\right)dx$$

$$= \pi\left(-\frac{16}{3}x^3 + 16x\right)\Big]_{-1}^{1}$$

$$= \pi\left[\left(-\frac{16}{3} + 16\right) - \left(\frac{16}{3} - 16\right)\right]$$

$$= \frac{64}{3}\pi$$

YANIT "D"

30. $\int \sin(\sin x)\cos x dx$ **ifadesi neye eşittir?**

A) sin(sinx) + C B) cos(cosx) + C

C) –sin(sinx) + C D) –cos(sinx) + C

E) –cosx + C

ÇÖZÜM

$\sin x = t$ denirse,

$\cos x dx = dt \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{\cos x}$ olur.

$$\int \sin(\sin x)\cos x dx = \int \sin t \cos x \frac{dt}{\cos x}$$

$$= \int \sin t dt$$

$$= -\cos t + C \text{ bulunur.}$$

$t = \sin x$ olduğundan $= -\cos(\sin x) + C$

YANIT "D"

ÇÖZÜMLÜ TEST –2

1. $\int \frac{f(x)}{x}dx = x^2+2x+C$ ise **f(2) kaçtır?**

A) 2 B) 4 C) 8 D) 10 E) 12

ÇÖZÜM

$\int \frac{f(x)}{x}dx = x^2+2x+C$ ise

$$\frac{d}{dx}\int \frac{f(x)}{x} = \frac{d}{dx}\left(x^2+2x+C\right)$$

$$\frac{f(x)}{x} = 2x+2 \Rightarrow f(x) = x(2x+2)$$

$$\Rightarrow f(2) = 2\cdot(2\cdot2+2)$$

$$\Rightarrow f(2) = 2\cdot(6)$$

$$\Rightarrow f(2) = 12 \text{ bulunur.}$$

YANIT "E"

2. $\sum_{n=2}^{3}\left(\int_2^n (2x+1)dx\right)$ **ifadesinin eşiti nedir?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

ÇÖZÜM

$$\int_2^n (2x+1)dx = \frac{2x^2}{2}+x\Big]_2^n = x^2+x\Big]_2^n$$

$$= \left(n^2+n\right)-(4+2)$$

$$= n^2+n-6$$

$$\sum_{n=2}^{3}\left(n^2+n-6\right) = \left(2^2+2-6\right)+\left(3^2+3-6\right) = 6$$

YANIT "E"

3. $b\neq 0$ için $\int_0^1 \frac{x^a}{x^b}dx = \frac{\int_0^1 x^a dx}{\int_0^1 x^b dx}$ ise **a – b kaçtır?**

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^a}{x^b}dx = \int_0^1 x^{a-b} = \frac{x^{a-b+1}}{a-b+1}\Big]_0^1 = \frac{1}{a-b+1} \text{ olur.}$$

$$I_2 = \int_0^1 x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}\Big]_0^1 = \frac{1}{a+1}$$

$$I_3 = \int_0^1 x^b dx = \frac{x^{b+1}}{b+1}\Big]_0^1 = \frac{1}{b+1}$$

$$I_1 = \frac{I_2}{I_3} \Rightarrow \frac{1}{a-b+1} = \frac{\frac{1}{a+1}}{\frac{1}{b+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a-b+1} = \frac{1}{a+1}\cdot\frac{b+1}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a-b+1} = \frac{b+1}{a+1}$$

$$\Rightarrow (a+1) = (b+1)(a-b+1)$$

$$\Rightarrow a+1 = ab-b^2+b+a-b+1$$

$$\Rightarrow 0 = b(a-b)$$

$b\neq 0$ olduğundan $a-b=0$ bulunur.

YANIT "B"

4. $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$ **integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{7}{3}$ C) 3 D) $\frac{11}{3}$ E) 4

ÇÖZÜM

$$x^3+1 = u$$

$$3x^2dx = du$$

$$x^2dx = \frac{du}{3}$$

$$\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} = \int_0^2 \frac{du}{3\sqrt{u}} = \frac{1}{3}2\sqrt{u}\Big]_0^2$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}\Big]_0^2 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{9}-\sqrt{1}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\cdot2 = \frac{4}{3} \text{ bulunur.}$$

YANIT "A"

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x e^{\cos x} dx$ belirli integralinin değeri **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) e–2 B) e–1 C) 1+e
D) e^2 E) e^3

ÇÖZÜM

$\cos x = u$

$-\sin x dx = du$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x e^{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -e^u du$$

$$= -e^{\cos x}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -e^{\cos\frac{\pi}{2}} - \left(-e^{\cos 0}\right)$$

$$= -1 + e = e - 1 \text{ bulunur.}$$

YANIT "B"

6. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$ **integralinin değeri nedir?**

A) 1 B) 2 C) ln2 D) 4 E) ln4

ÇÖZÜM

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x} dx$

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \int_e^{e^2} \frac{du}{u} = \ln|u|\Big]_e^{e^2}$$

$$= \ln|\ln x|\Big]_e^{e^2} = \ln|\ln e^2| - \ln|\ln e|$$

$$= \ln|2| - \ln|1| = \ln\left|\frac{2}{1}\right| = \ln 2$$

YANIT "C"

7. $\int_3^4 \frac{x^2+4x+4}{x^2-3x+2} dx$ **integralinin değeri nedir?**

A) 1 + 25ln2 – 9ln3 B) ln2 + ln3
C) ln2 – ln3 D) 25ln2–9ln3
E) 0

ÇÖZÜM

$$\int_3^4 \frac{x^2+4x+4}{x^2-3x+2} = \int_3^4 \frac{x^2+4x+4}{(x-2)(x-1)}$$

$$= \int_3^4 \left(1 + \frac{7x+2}{(x-2)(x-1)}\right) dx$$

$$\frac{7x+2}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-1)}$$

$$7x + 2 = Ax - A + Bx - 2B$$

$$7x + 2 = (A+B)x + (-A-2B)$$

$$\begin{matrix} A + B = 7 \\ -A - 2B = 2 \end{matrix} \Rightarrow A = 16 \text{ ve } B = -9 \text{ bulunur.}$$

$$I = \int_3^4 \left(1 + \frac{16}{x-2} - \frac{9}{x-1}\right) dx$$

$$= \int_3^4 dx + 16\int_3^4 \frac{dx}{x-2} - 9\int_3^4 \frac{dx}{x-1}$$

$$= x\Big]_3^4 + 16 \cdot \ln|x-2|\Big]_3^4 - 9\ln|x-1|\Big]_3^4$$

$$= 1 + 16(\ln 2 - \ln 1) - 9(\ln 3 - \ln 2)$$

$$= 1 + 16\ln 2 - 16\ln 1 - 9\ln 3 + 9\ln 2$$

$$= 1 + 25\ln 2 - 9\ln 3 \quad \text{bulunur.}$$

YANIT"A"

8. $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \cdot \cos x^2 \cdot e^{\sin x^2} dx$ **integralinin değeri nedir?**

A) $-e^2$ B) $\frac{1}{2}(e-1)$ E) e^2
B) $e^3 + 1$ C) $1 + e^5$

ÇÖZÜM

$t = \sin x^2$

$dt = 2x \cdot \cos x^2 dx$

$dx = \frac{dt}{2x \cdot \cos x^2}$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \cdot \cos x^2 \cdot e^{\sin x^2} dx = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \cdot \cos x^2 \cdot e^t \frac{dt}{2x \cdot \cos x^2}$$

$$= \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{e^t}{2} dt = \frac{1}{2} e^t \Big]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{2}\left(e^{\sin x^2}\right)\Big]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\sin\frac{\pi}{2}} - e^0\right) = \frac{1}{2}(e-1) \text{ bulunur.}$$

YANIT "B"

9. $\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+3)\right)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $-\frac{4}{\pi}$ B) $-\frac{3}{\pi}$ C) $-\frac{2}{\pi}$ D) $\frac{2}{\pi}$ E) π

ÇÖZÜM

$t=\frac{\pi}{2}(x+3)$

$dt=\frac{\pi}{2}dx \Rightarrow dx=\frac{2dt}{\pi}$

$\int_0^1 \sin\frac{\pi}{2}(x+3)dx=\int_0^1 \sin t\frac{2}{\pi}dt$

$=-\frac{2}{\pi}\cos t\Big]_0^1=-\frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}(x+3)\right)\Big]_0^1$

$=-\frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\cos 2\pi}_{1}-\underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{0}\right)=-\frac{2}{\pi}$ bulunur.

YANIT "C"

10. $\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}dx$ **integralinin değeri nedir?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 1 D) 3 E) 4

ÇÖZÜM

$t=\ln x$

$dt=\frac{1}{x}dx \Rightarrow dx=x\cdot dt$

$\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}dx=\int_1^e \frac{t^3}{x}\cdot x dt$

$=\int_1^e t^3dt=\frac{t^4}{4}\Big]_1^e=\frac{(\ln x)^4}{4}\Big]_1^e$

$=\frac{1}{4}\left[\underbrace{(\ln e)^4}_{1}-\underbrace{(\ln 1)^4}_{0}\right]=\frac{1}{4}$ bulunur.

YANIT "A"

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{2}dx$ **integralinin değeri nedir?**

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 4 D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$

ÇÖZÜM

$t=\frac{x}{2}$

$dt=\frac{1}{2}dx \Rightarrow dx \Rightarrow 2dt$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x)\frac{x}{2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot 2dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt$

$=2\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\sin\frac{x}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=2\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin 0\right)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

YANIT "A"

12. $\int_1^2 \sqrt{1-(x-1)^2}dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{12}$

ÇÖZÜM

$x-1=\sin t$

$dx=\cos tdt$

$\int_1^2 \sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=\int_1^2 \cos^2 tdt$

$=\int_1^2 \frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big]_1^2$

$=\frac{1}{2}\left(\arcsin(x-1)+(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}\right)\Big]_1^2$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{4}$ bulunur.

YANIT "C"

13. $\int_0^1 (2x+1)e^x\cdot dx$ **integralinin değeri nedir?**

A) e B) e + 1 C) e^2+1

D) e^2 E) e − 1

ÇÖZÜM

$2x+1=u \quad e^x dx = d\vartheta$

$2dx = du \quad e^x = \vartheta$

$I = e^x(2x+1)\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot 2dx$

$I = \left(e^x(2x+1) - 2e^x\right)\Big]_0^1$

$I = \left[e^x(2x-1)\right]\Big]_0^1 = e^1 \cdot 1 - \left(e^0 \cdot (-1)\right)$

$= e+1$ bulunur.

YANIT "B"

14. $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ **inetgralinin değeri nedir?**

A) $\ln\frac{3}{4}$ B) $\ln\frac{5}{4}$ C) $\ln\frac{9}{4}$

D) $\ln\frac{9}{8}$ E) 0

ÇÖZÜM

$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$

$1 = A(x+2) + B(x+1)$

$1 = Ax + 2A + Bx + B$

$1 = (A+B)x + 2A + B$

$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ 2A+B=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A=1, \quad B=-1$

$\int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \left(\ln|x+1| - \ln|x+2|\right)\Big]_1^2$

$= (\ln 3 - \ln 4) - (\ln 2 - \ln 3)$

$= \ln 3 - \ln 4 - \ln 2 + \ln 3$

$= 2\ln 3 - (\ln 2^3)$

$= \ln 3^2 - \ln 2^3$

$= \ln\frac{9}{8}$ bulunur.

YANIT "D"

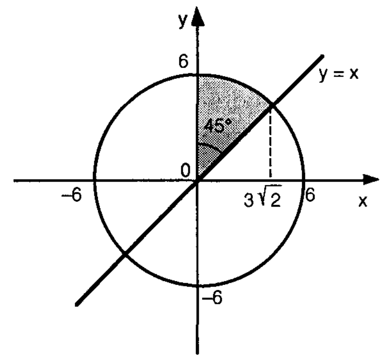
ZAFER YAYINLARI

15. $\int_0^{3\sqrt{2}} \left(\sqrt{36-x^2} - x\right)dx$ **integralinin değeri nedir?**

A) $\frac{9\pi}{2}$ B) $\frac{3\pi}{4} - \frac{15}{2}$ C) 1

D) 0 E) $\frac{\pi}{4}$

ÇÖZÜM



Yukarıdaki şekle göre,

$\int_0^{3\sqrt{2}} \left(\sqrt{36-x^2} - x\right)dx$ ifadesi $\left[0, 3\sqrt{2}\right]$ aralığında $y = \sqrt{36-x^2}$ çember yayının altında kalan alan ile $y = x$ doğrusunun altında kalan alanın farkına eşittir. O halde, integralin değeri yarıçapı 6 br olan dairenin alanının $\frac{1}{8}$ ine eşittir.

$\int_0^{3\sqrt{2}} \left(\sqrt{36-x^2} - x\right)dx = \frac{\pi \cdot 6^2}{8}$

$= \frac{9\pi}{2}$ bulunur.

YANIT "A"

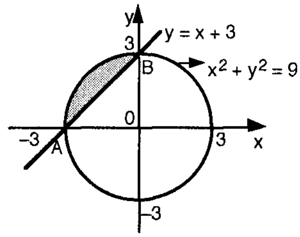
16. $\int_{-3}^{0} \left(\sqrt{9-x^2} - (x+3)\right)dx$ **integralinin değeri nedir?**

A) $-\frac{9}{4}\pi$ B) $-\frac{9}{4}(3\pi+2)$

C) $3\pi+2$ D) $-\frac{9\pi}{4}(\pi-1)$

E) $\frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2}$

ÇÖZÜM



Yukarıdaki şekle göre $\int_{-3}^{0}\left[\sqrt{9-x^2}-(x+3)\right]dx$ ifadesi $[-3,0]$ aralığında $y=\sqrt{9-x^2}$ çember yayının altında kalan alan ile $y=x+3$ doğrusunun altında kalan alanın farkına eşittir. O halde integralin değeri yarıçapı 3 br. olan $\frac{1}{4}$ dairenin alanı ile OAB diküçgeninin alanının farkına eşittir.

$$\int_{-3}^{0}\left[\sqrt{9-x^2}-(x+2)\right]dx=\frac{\pi\cdot 3^2}{4}-\frac{3\cdot 3}{2}$$

$$=\frac{9\pi}{4}-\frac{9}{2}\text{ bulunur.}$$

YANIT "E"

17. $\int_{0}^{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{16-x^2}-2\right)dx$ **integralinin değeri nedir?**

A) $\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$ B) $\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}$ C) $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$

D) $\frac{4\pi}{3}-2\sqrt{3}$ E) $\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}$

ÇÖZÜM

$x=4\sin t \rightarrow dx=4\cos t.dt$

$x=0 \Rightarrow \sin t=0 \Rightarrow t=0$

$x=2\sqrt{3} \Rightarrow \sin t=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$

$$\int_{0}^{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{16-x^2}-2\right)dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{16-16\sin^2 t}-2\right)4\cos t.dt$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(4\cos t-2)\cdot 4\cos t dt$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(16\cos^2 t-8\cos t\right)dt$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(16\frac{1+\cos 2t}{2}-8\cos t\right)dt$$

$$=\left(8t+4\sin 2t-8\sin t\right)\Big]_{0}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\left(8\frac{\pi}{3}+4\sin\frac{2\pi}{3}-8\sin\frac{\pi}{3}\right)-(0)$$

$$=\frac{8\pi}{3}+2\sqrt{3}-4\sqrt{3}=\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}$$

YANIT "E"

18. $\int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$ **integralinin değeri nedir?**

A) $\ln 3$ B) $\ln\sqrt{3}$ C) $-\ln\sqrt{3}$

D) 1 E) 0

ÇÖZÜM

$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2+4}} \Rightarrow f(-x)=\frac{1}{-x\sqrt{x^2+4}}$

$\Rightarrow f(-x)=-f(x)$ olup $f(x)$ tek fonksiyondur.

O halde,

$$\int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}=0\text{ olur.}$$

YANIT "E"

19. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\arccos x dx$ **integralinin değeri nedir?**

A) π B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{3\pi}{2}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{4}$

ÇÖZÜM

$\arccos x=u \quad d\vartheta=dx$

$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=du \quad \vartheta=x$

$\left(1-x^2=t,\ -2xdx=dt,\ xdx=-\frac{dt}{2}\right)$

$$=x\arccos x\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}\sqrt{1-x^2}\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

YANIT "B"

20. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot\cos 2x dx$ **integralinin değeri nedir?**

A) $\frac{\pi-2}{4}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{4}$

D) $\frac{\pi-2}{8}$ E) $\frac{\pi}{2}$

ÇÖZÜM

$\cos 2x dx = d\vartheta \quad x = u$

$\frac{1}{2}\sin 2x = \vartheta \quad dx = du$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\sin 2x\cdot dx$$

$$= \frac{x}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}\cdot 1 - \frac{1}{4} = \frac{\pi-2}{8}$$

YANIT "D"

21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\sin x dx$ **integralininin değeri nedir?**

A) $-\frac{4}{3}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

ÇÖZÜM

$t = \cos x$

$dt = -\sin x dx \Rightarrow dx = -\frac{dt}{\sin x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{1}{2}} \sin x dx = \int \sqrt{t}\cdot\sin x\cdot\frac{dt}{-\sin x}$$

$$= -\int t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{2}{3}\left(t^{\frac{3}{2}}\right)\Big] = -\frac{2}{3}\left(\sqrt{t^3}\right)\Big]$$

$$= -\frac{2}{3}\left(\sqrt{\cos^3 x}\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3}\left(\sqrt{\cos^3\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\cos^3 0}\right)$$

$$= -\frac{2}{3}(0-1) = \frac{2}{3}$$

YANIT "E"

21. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{(\arctan x)^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}dx$ **integralinin değeri nedir?**

A) $\frac{2}{5}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{5}{2}}$ B) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{5}{2}}$ C) 1

D) $\frac{3\pi}{2}$ E) 2

ÇÖZÜM

$t = \arctan x$

$dt = \frac{1}{1+x^2}dx \Rightarrow dx = (1+x^2)dt$

$$\int \frac{t^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}(1+x^2)dt = \int t^{\frac{3}{2}}dt$$

$$= \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\Big] = \frac{2}{5}\sqrt{t^5}\Big]$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(\arctan x)^5}\Big]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{5}\left(\sqrt{\left(\arctan\sqrt{3}\right)^5} - \underbrace{\sqrt{\left(\sqrt{\arctan 0}\right)^5}}_{0}\right)$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{5}{2}}$$

Yanıt "A"

22. $\int_1^e x\ln x$ **integralinin değeri nedir?**

A) $\frac{e^2}{4}$ B) $\frac{1}{4}(e^2+1)$ C) e^5

D) e^6 E) e^8

ÇÖZÜM

$$\int_1^e x\ln x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\Big]_1^e$$

$$= \left(\frac{e^2}{2}\ln e - \frac{e^2}{4}\right) - \left(\frac{1^2}{2}\ln 1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2+1)$$

YANIT "B"

ÇÖZÜMLÜ TEST –3

1. $df(x) = (5x^4 + 2x - 3)dx$ ve $f(1) = 3$ ise **f(0) kaçtır?**

A) –1 B) 0 C) 2 D) 3 E) 4

ÇÖZÜM

Her iki tarafın x e göre integrali alınırsa,

$f(x) = x^5 + x^2 - 3x + C$

$f(1) = -1 + C = 3 \Rightarrow C = 4$

$f(x) = x^5 + x^2 - 3x + 4$

$f(0) = 4$

YANIT "E"

2. $\int_{-2}^{2}\left(x + x^2 + x^3 + x^5 + x^9\right)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $-\frac{16}{3}$ B) $-\frac{8}{3}$ C) 0

D) $\frac{8}{3}$ E) $\frac{16}{3}$

ÇÖZÜM

$\int_{-2}^{2} x^{tek}dx = 0$ olduğundan içerideki tek kuvvetli terimlerin integrali sıfır olacağından biz sadece $\int_{-2}^{2} x^2dx$ i çözmeliyiz.

$$\int_{-2}^{2} x^2dx = \frac{x^3}{3}\Bigg]_{-2}^{2} = \frac{8}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3}$$

YANIT "E"

3. $\int_{0}^{\pi} \sin x.\cos y dx = -1$ ise **y aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{2\pi}{3}$ B) $\frac{5\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{6}$

ÇÖZÜM

$$\cos y\int_{0}^{\pi} \sin xdx = -1 \Rightarrow \cos y\left(-\cos x\Big]_0^{\pi}\right) = -1$$

$$\cos y(-(-1-1)) = -1 \Rightarrow \cos y = -\frac{1}{2}$$

$y = \frac{2\pi}{3}$ olabilir.

YANIT "A"

4. $\int_{0}^{4}\left(x + |x-4| + \operatorname{sgn}x\right)dx$ **integrallerinin değeri kaçtır?**

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

ÇÖZÜM

$0 < x < 4$ aralığında $|x-4| = 4 - x$

$\operatorname{sgn}x = 1$ olduğundan

$$\int_{0}^{4}(x + 4 - x + 1)dx = \int_{0}^{4} 5dx = 5x\Big]_0^4 = 20$$

YANIT "C"

5. $f(x) = \begin{cases} [\![\frac{x}{3}]\!] & ; x \geq 0 \text{ ise} \\ |x-2| & ; x < 0 \text{ ise} \end{cases}$

$\int_{-3}^{6} f(x)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{15}{2}$ B) $\frac{27}{2}$ C) 15 D) 27 E) 36

ZAFER YAYINLARI

ÇÖZÜM

$$\int_{-3}^{6} f(x)dx = \int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{6} f(x)dx$$

$$= \int_{-3}^{0} (2-x)dx + \int_{0}^{3} 0.dx + \int_{3}^{6} 1.dx$$

$$= 2x - \frac{x^2}{2}\Big]_{-3}^{0} + x\Big]_{3}^{6}$$

$$= \frac{27}{2}$$

YANIT "B"

6. $\int \frac{(\ln x)^{15}}{x} dx$ **integralinin değeri nedir?**

A) $(\ln x)^{16} + C$ B) $\frac{1}{14}(\ln x)^{14} + C$

C) $\frac{1}{15}(\ln x)^{15} + C$ D) $\frac{1}{16}(\ln x)^{16} + C$

E) $\ln x + C$

ÇÖZÜM

$\ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du$ olur.

$$\int \frac{(\ln x)^{15}dx}{x} = \int u^{15}du = \frac{u^{16}}{16} = \frac{1}{16}(\ln x)^{16} + C$$

YANIT "D"

7. $\int_{-1}^{0} (3x^2+2x)^{25}\cdot(3x+1)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $-\frac{1}{52}$ B) $-\frac{1}{26}$ C) 0

D) $\frac{1}{52}$ E) $\frac{1}{26}$

ÇÖZÜM

$3x^2 + 2x = u \Rightarrow (6x + 2)dx = du$

$2(3x+1)dx = du \Rightarrow (3x+1)dx = \frac{du}{2}$

Dönüşüm integrali yazılırsa;

$$\int u^{25}\cdot\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{26}}{26}\Big]$$

$$= \frac{1}{52}(3x^2+2x)^{26}\Big]_{-1}^{0}$$

$$= \frac{1}{52}\left(0-(3-2)\right)^{26} = \frac{1}{52}$$

YANIT "D"

8. $\int \frac{f(x)}{x}dx = x^2 - x + 2$ ise **f(x) nedir?**

A) $x^2 - x$ B) $2x^2 - x$ C) $2x - 1$

D) $2x^2 - x + 2$ E) $2x^2$

ÇÖZÜM

Her iki tarafın türevi alınırsa

$$\frac{f(x)}{x} = 2x - 1 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - x$$

YANIT "B"

9. $\int \frac{-dx}{x^3+x^2} - \int \frac{xdx}{x^3+x^2}$ **işleminin sonucu nedir?**

A) $x + C$ B) $-x + C$ C) $-\frac{1}{x} + C$

D) $\frac{1}{x} + C$ E) $\frac{1}{x^2} + C$

ÇÖZÜM

$$\int \frac{-dx}{x^3+x^2} - \int \frac{xdx}{x^3+x^2} = \int \frac{-dx(1+x)}{x^2(1+x)}$$

$$= \int \frac{-dx}{x^2} = -\int x^{-2}dx$$

$$= -\frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{x} + C$$

YANIT "D"

10. $\int \frac{x^5}{4+x^{12}}dx$ **integralinin sonucu nedir?**

A) $\frac{1}{6}\arctan x^6 + C$

B) $\frac{1}{12}\arctan x^6 + C$

C) $\frac{1}{12}\arctan \frac{x^{12}}{2} + C$

D) $\frac{1}{12}\arctan x + C$

E) $\frac{1}{12}\arctan \frac{x^6}{2} + C$

ÇÖZÜM

$x^{12} = \left(x^6\right)^2$ olarak alalım.

$x^6 = u \Rightarrow 6.x^5dx = du \Rightarrow x^5dx = \frac{du}{6}$

Yerlerine konursa,

$$\frac{1}{6}\int \frac{du}{4+u^2} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\text{Arctan}\frac{u}{2} + C$$
$$= \frac{1}{12}\text{Arctan}\frac{x^6}{2} + C$$

YANIT "E"

11. $\int x^3 \cdot f(x)dx = \frac{x^4}{16}(4\ln x - 1) + C$ **eşitliğini gerçekleyen f(x) fonksiyonu nedir?**

A) lnx B) lnx+x C) 4lnx

D) $\frac{\ln x}{4}$ E) x.lnx

ÇÖZÜM

Her iki tarafın türevi alınırsa,

$$x^3.f(x) = \frac{4x^3}{16}(4\ln x - 1) + \frac{x^4}{16}\cdot\frac{4}{x}$$

$$x^3 \cdot f(x) = \frac{x^3}{4}(4\ln x - 1) + \frac{x^3}{4} = \frac{x^3}{4}(4\ln x - 1 + 1)$$

$$x^3 \cdot f(x) = \frac{x^3}{4}\cdot 4\ln x \Rightarrow f(x) = \ln x$$

YANIT "A"

12. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) 1

ÇÖZÜM

$5x - 1 = u \Rightarrow 5dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{5}$

$$= \frac{1}{5}\int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{5}\int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{5}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{5x-1}\Big]_1^2 = \frac{2}{5}\left(\sqrt{9} - \sqrt{4}\right)$$

$$= \frac{2}{5}(3-2) = \frac{2}{5}$$

YANIT "B"

13. $\int_{3\pi}^{4\pi} \sqrt{\cos^2 x - \cos 2x}\,dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) –2 B) 0 C) 2 D) 4 E) 6

ÇÖZÜM

$$\int_{3\pi}^{4\pi} \sqrt{\cos^2 x - \cos 2x}\,dx = \int_{3\pi}^{4\pi} \sqrt{\sin^2 x}\,dx$$
$$= \int_{3\pi}^{4\pi} |\sin x|dx$$
$$= \int_{3\pi}^{4\pi} (-\sin x)dx$$
$$= \cos x\Big]_{3\pi}^{4\pi}$$
$$= \cos 4\pi - \cos 3\pi$$
$$= 1 - (-1) = 2$$

YANIT "C"

14. $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{1+x}$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{24}$ B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$

ÇÖZÜM

$d\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+x\right)}$ integrali elde edilir. Burada

$\sqrt{x}=t \Rightarrow x=t^2 \Rightarrow dx=2tdt$ dönüşümü yapılırsa,

$\frac{1}{2}\int\frac{2tdt}{t\left(1+t^2\right)}=\int\frac{dt}{1+t^2}$ integrali elde edilir.

$$\int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{dt}{1+t^2}=\text{Arc}\tan t\Big]_{\frac{1}{3}}^{1}=\text{Arc}\tan\sqrt{x}\Big]_{\frac{1}{3}}^{1}$$

$$=\text{Arc}\tan 1-\text{Arc}\tan\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$=\underset{(3)}{\frac{\pi}{4}}-\underset{(2)}{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{12}$$

YANIT "B"

15. $\int_0^{\ln 2}\cos e^{-x}dx$ integralinde $e^{-x}=t$ dönüşümü yapılırsa **aşağıdakilerden hangisi elde edilir?**

A) $\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{\cos t}{t}dt$ B) $\int_0^{\frac{1}{2}}-\frac{\sin t}{t}dt$

C) $\int_1^{\frac{1}{2}}-\frac{\cos t}{t}dt$ D) $\int_1^{2}-\frac{\cos t}{t}dt$

E) $\int_0^{2}-\frac{\cos t}{t}dt$

ÇÖZÜM

$e^{-x}=t \Rightarrow -e^{-x}dx=dt \Rightarrow dx=\frac{-dt}{t}$

$x=0 \Rightarrow e^{-0}=1=t_1$

$x=\ln 2 \Rightarrow e^{-\ln 2}=e^{\ln\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}=t_2 \Rightarrow \int_1^{\frac{1}{2}}\frac{-\cos t}{t}dt$

YANIT "C"

16. $\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1+x^8}dx=A$ ise $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\cos x}{1+x^8}dx$ integralinin **A türünden değeri nedir?**

A) 2A B) 3A C) 4A D) 6A E) 8A

ÇÖZÜM

$\frac{\cos x}{1+x^8}$ fonksiyonu çift fonksiyondur.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\cos x}{1+x^8}dx=2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos x}{1+x^8}dx$$

$$=2.2\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1+x^8}dx=4A$$

YANIT "C"

17. $F(x)=\int_{-2}^{5}\frac{3t^2+1}{5t}dt$ ise **F′(2) kaçtır?**

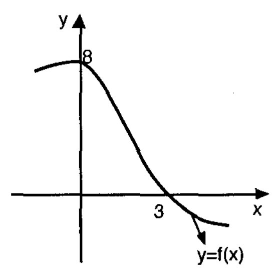
A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

ÇÖZÜM

Sınırları sayı olan integral fonksiyonunun türevi sıfırdır.

YANIT "C"

18.



Şekilde grafiği verilen f(x) fonksiyonu için

$\int_0^3 f'(x)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) 8 B) 4 C) 0 D) –4 E) –8

ÇÖZÜM

$$\int_0^3 f'(x)dx=f(x)\Big]_0^3=f(3)-f(0)$$

$$=0-8=-8$$

YANIT "E

19. f: R → R ye fonksiyonunun $x_1 = 3$ noktasındaki yerel extremum değeri 5, $x_2 = 4$ noktasındaki teğeti x ekseni ile pozitif yönde 135° lik açı yapmaktadır. f fonksiyonunun türevleri olan f′ ve f″ fonksiyonları R de sürekli ise,

$\int_3^4 f'(x) \cdot f''(x)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) 2 B) 1 C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

ÇÖZÜM

x = 3 yerel extremum noktasının apsisi olduğundan f′(3) = 0

x = 4 teğetin değme noktasının apsisi olduğundan f′(4) = Teğetin eğimi = tan135° = –1

f′(x) = u ise f″(x)dx = du dönüşümü yapılırsa

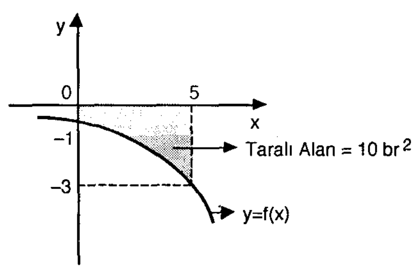
$$\int_3^4 f'(x) \cdot f''(x)dx = \int_3^4 u.du = \frac{u^2}{2} = \left.\frac{[f'(x)]^2}{2}\right]_3^4$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(f'(4)^2 - \left(f'(3)\right)^2\right]_3^4\right.$$

$$= \frac{1}{2}\left[(-1)^2 - 0\right] = \frac{1}{2}$$

YANIT "D"

20.



Şekilde verilenlere göre,

$\int_0^5 f'(x)dx + \int_0^5 f(x)dx$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) –24 B) –18 C) –12 D) 8 E) 12

ÇÖZÜM

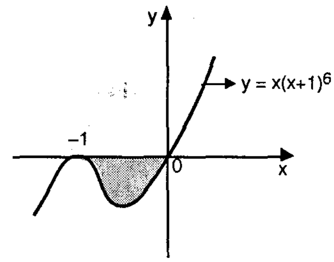
$$\int_0^5 f'(x)dx = f(x)\Big]_0^5 = f(5) - f(0) = -3 - (-1) = -2$$

$$\int_0^5 f(x)dx = -10$$

Sonuç: –2 + (–10) = –12

YANIT "C"

21.



Şekilde verilenlere göre taralı bölgenin alanı kaç br² dir?

A) $\frac{2}{23}$ B) $\frac{1}{56}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{7}$ E) $\frac{1}{112}$

ÇÖZÜM

$$\int_{-1}^{0} \left|x(x+1)^6\right| dx = -\int_{-1}^{0} x(x+1)^6 dx$$

$x + 1 = u \Rightarrow x = u - 1$ ve $dx = du$

$$-\int (u-1).u^6 = -\int \left(u^7 - u^6\right) = -\frac{u^8}{8} + \frac{u^7}{7}$$

$$= \left.\frac{-(x+1)^8}{8}\right]_{-1}^{0} + \left.\frac{(x+1)^7}{7}\right]_{-1}^{0}$$

$$= -\underset{(7)}{\frac{1}{8}} + 0 + \underset{(8)}{\frac{1}{7}} + 0$$

$$= \frac{1}{56}$$

YANIT "B"

22. $\int_2^4 \left(\lim_{y \to x} \frac{y^3 - y^2x + yx - x^2}{y^2 - x^2} \right) dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

ÇÖZÜM

$$\lim_{y \to x} \frac{y^3 - y^2x + yx - x^2}{y^2 - x^2} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği var.}$$

L'Hospital kuralı uygulanırsa,

$$\lim_{y \to x} \frac{3y^2 - 2yx + x}{2y} = \frac{3x^2 - 2x^2 + x}{2x} = \frac{x^2 + x}{2x}$$

$$= \frac{x+1}{2}$$

$$\int_2^4 \frac{x+1}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg]_2^4 = \frac{1}{2}\left(8 + 4 - (2+2)\right)$$

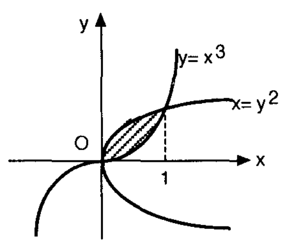
$$= 4$$

YANIT "C"

23. $x = y^2$ ve $y = x^3$ eğrileriyle sınırlı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 1 E) $\frac{3}{5}$

ÇÖZÜM



$x = x^6 \Rightarrow x^6 - x = 0 \Rightarrow x(x^5 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ veya

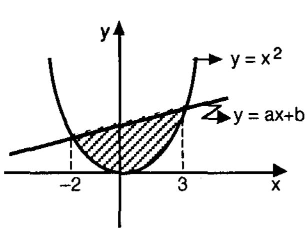
$x^5 = 1 \Rightarrow x = 1$

$$\text{Taralı Alan} = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^3\right)dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^4}{4}\Bigg]_0^1$$

$$= \underset{(4)}{\frac{2}{3}} - \underset{(3)}{\frac{1}{4}} = \frac{5}{12}$$

YANIT "A"

24.



Şekilde verilenlere göre taralı alan kaç br^2 dir?

A) $\frac{37}{6}$ B) $\frac{115}{6}$ C) $\frac{119}{6}$ D) $\frac{125}{6}$ E) $\frac{49}{6}$

ÇÖZÜM

$x = -2 \Rightarrow y = 4$ $(-2, 4)$

$x = 3 \Rightarrow y = 9$ $(3, 9)$

$\text{Eğim} = \frac{5}{5} = 1$

Doğru denklemi $y - 4 = 1(x + 2) \Rightarrow y = x + 6$

$$\text{Taralı Alan} = \int_{-2}^{3} \left(x + 6 - x^2\right)dx$$

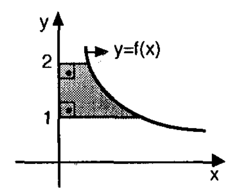
$$= \frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\Bigg]_{-2}^{3}$$

$$= \left(\frac{9}{2} + 18 - 9\right) - \left(2 - 12 + \frac{8}{3}\right)$$

$$= \frac{125}{6}$$

YANIT "D"

25. $k > 0$ olmak üzere, şekilde $y = \frac{k}{x}$ bağıntısıyla verilen eğrinin y ekseni çevresinde döndürülmesiyle oluşan hacmin belirlenen sınırlar arasında 8π br^3 olması için **k ne olmalıdır?**



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

$$\text{Hacim} = 8\pi = \pi \int_1^2 \left(\frac{k}{y}\right)^2 dy$$

$$8\pi = \pi \int_1^2 \frac{k^2}{y^2} dy = k^2\pi \int_1^2 y^{-2} dy = -k^2.\pi y^{-1}\Big]_1^2$$

$$8\pi = \pi.k^2.\frac{1}{2} \Rightarrow k = \pm 4$$

ancak $k > 0$ için $k = 4$

YANIT "D"

26. $\frac{d}{dx}\left(\int_5^{2x} \frac{1}{t} dt\right)$ **işleminin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{1}{x}$ B) $\ln x$ C) $-\ln x$ D) 1 E) $-\frac{1}{x}$

ÇÖZÜM

$$\frac{1}{2x}\cdot 2=\frac{1}{x}$$

YANIT A"

27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\int_0^x t\cdot e^t dt}{\sin x}\right)$ **işleminin sonucu kaçtır?**

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x\to 0}$ için $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. L'Hospital kuralı uygulanırsa:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot e^x}{\cos x}=\frac{0}{1}=0$$

YANIT "C"

28. $f(x) = x^2$ fonksiyonu veriliyor.

$g(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{2h}$ biçiminde yeni bir fonksiyon tanımlanıyor. $\int_1^2 g(x)dx$ **kaçtır?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) 0 C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

ÇÖZÜM

$$g(x)=\frac{1}{2}\cdot f'(x)$$

$$\int_1^2 g(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^2 f'(x)dx=\frac{1}{2}\left(f(x)\Big]_1^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2\Big]_1^2\right)=\frac{1}{2}(4-1)=\frac{3}{2}$$

YANIT "E"

29. $f(x)=\displaystyle\int\frac{x^2+3x+a}{x+2}dx$ dir.

f fonksiyonunun grafiğine $x = 3$ apsisli noktadan çizilen teğet $y = 4x + 1$ doğrusuna paralel ise **a kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

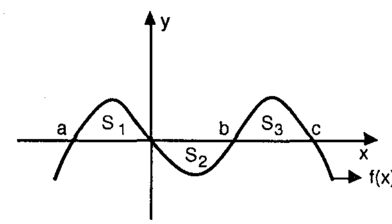
$f'(3) = 4$ olduğu verilmiştir. Verilen sistemde her iki tarafın türevini alırsak;

$$f'(x)=\frac{x^2+3x+a}{x+2} \text{ olur.}$$

$$f'(3)=\frac{9+9+a}{5}=4\Rightarrow a=2$$

YANIT "B"

30.



S_1, S_2, S_3 kapalı bölgelerin alanları olmak üzere,

$\int_a^b f(x)dx=7;\ \int_0^c f(x)dx=2$ ve

$S_1+S_2+S_3=30\,br^2$ ise

S_2 kaç br^2 dir?

A) 21 B) 14 C) 14 D) 9 E) 7

ÇÖZÜM

$\int_a^b f(x)dx=S_1-S_2=7$ ve

$\int_0^c f(x)dx=-S_2+S_3=2$ dir.

$$\begin{array}{r} S_1-S_2=7 \\ +\quad -S_2+S_3=2 \\ \hline S_1+S_3-2S_2=9 \\ +\quad S_1+S_2+S_3=30 \\ \hline -3S_2=-21 \Rightarrow S_2=7\,br^2 \end{array}$$ bulunur.

YANIT "E"

ÇÖZÜMLÜ TEST –4

1. $\int x \cdot f(x-2) \cdot dx = x^2 + e^{2x} + 3$ olduğuna göre **f(0) nedir?**

A) e^2 B) $e^3 + 2$ C) $e^3 + 4$
D) $e^4 + 2$ E) $e^4 + 4$

ÇÖZÜM

$x.f(x-2) = (x^2 + e^{2x} + 3)' = 2x + 2e^{2x}$

$x = 2 \Rightarrow 2.f(0) = 4 + 2e^4$

$f(0) = 2 + e^4$

YANIT "D"

2. $\int d\left(f^{-1}(x)\right) = 1 + \int \frac{1}{x} dx$ olduğuna göre,

$\int_0^1 f(x)dx$ **neye eşittir?**

A) -1 B) $2e$ C) $e - 1$
D) $\frac{e-1}{e}$ E) $\frac{e+1}{e}$

ÇÖZÜM

$f^{-1}(x) = 1 + \ln x$ olduğundan $f(x) = e^{x-1}$ olur.

$$\int_0^1 e^{x-1}dx = e^{x-1}\Big]_0^1 = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$$

YANIT "D"

3. $y = f(x)$ eğrisinin yersel ekstremum noktalarından biri A(1,2) noktasıdır.
$f''(x) = 6x - 12$ olduğuna göre, **f(–1) nedir?**

A) –18 B) –12 C) 0 D) 12 E) 16

ÇÖZÜM

$$\int f''(x).dx = \int [f'(x)]'.dx = \int (6x - 12)dx$$

$$f'(x) = \frac{6x^2}{2} - 12x + C_1 \Rightarrow$$

$f'(1) = 3 - 12 + C_1 = 0$ olacağından

$C_1 = 9$ olur.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$\int f'(x)dx = \int (3x^2 - 12x + 9).dx$$

$$f(x) = \frac{3x^3}{3} - \frac{12x^2}{2} + 9x + C_2$$

$$= x^3 - 6x^2 + 9x + C_2$$

$f(1) = 1 - 6 + 9 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = -2$ olur.

$f(-1) = -1 - 6 - 9 - 2 = -18$ dir.

YANIT "A"

4. $f(x) = \int_1^{e^{3x}} \ln t \cdot dt$ ise $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ **değeri nedir?**

A) e B) 2e C) 3e D) 4e E) 5e

ÇÖZÜM

$f'(x) = \ln e^{3x}\left(e^{3x}\right)' - \ln 1.(1)' = 3x.3.e^{3x}$

$f'(x) = 9x.e^{3x}$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 3e$$

YANIT "C"

5. $\int \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot dx$ **integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + C$ B) $\frac{4}{9} \cdot x^{\frac{9}{4}} + C$ C) $\frac{9}{4} \cdot x^{\frac{9}{4}}$
D) $\frac{13}{4} \cdot x^{\frac{4}{13}}$ E) $\frac{5}{4} \cdot x^{\frac{4}{5}}$

ZAFER YAYINLARI

ÇÖZÜM

$$\int \sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x^3}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{3}{4}}dx = \int x^{\frac{5}{4}}.dx$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + C \Rightarrow$$

$$\frac{x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}} + C = \frac{4}{9}\cdot x^{\frac{9}{4}} + C \text{ dir.}$$

YANIT "B"

6. $\int \sqrt{x^3+x^2+1}\cdot(3x^2+2x)\cdot dx$ **integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{2}{3}\cdot(x^3+x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C$

B) $\frac{3}{2}\cdot(x^3+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

C) $(x^3+x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C$

D) $(x^2+x)^3+C$

E) x^3+x^2+C

ÇÖZÜM

$u=x^3+x^2+1$ ise $du=(3x^2+2x)\cdot dx$ dir.

$$\int \sqrt{u}\cdot du = \int u^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$$

$$\int \sqrt{x^3+x^2+1}\cdot(3x^2+2x)\cdot dx = \frac{2}{3}(x^3+x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C$$

olur.

YANIT "A"

7. $\int x\cdot\tan(x^2)\cdot dx$ **integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{1}{2}\ln|\sin x^2|+C$ B) $-\frac{1}{2}\ln|\cos x^2|+C$

C) $\frac{1}{2}\ln|\sin^2 x|+C$ D) $\frac{1}{2}\ln|\cos^2 x|+C$

E) $\frac{1}{2}\ln|\sin x|+C$

ÇÖZÜM

$u=x^2$ ise $du=2x.dx$ dir.

$$\int x\tan(x^2).dx = \frac{1}{2}\int \tan(x^2).2x.dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \tan u.du \quad \text{olur.}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{\sin u}{\cos u}\cdot du = -\frac{1}{2}\int \frac{(\cos u)'}{\cos u}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|\cos u|+C$$

$$\int x.\tan(x^2).dx = -\frac{1}{2}\ln|\cos(x^2)|+C \text{ dir.}$$

YANIT "B"

8. $\int \frac{2x^2+x-1}{x}\cdot dx$ **integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $-x^2+x+\ln|x|+C$

B) $x^2-x+\ln|x|+C$

C) $x^2+x-\ln|x|+C$

D) $-x^2-x-\ln|x|+C$

E) $-x^2-x+\ln|x|+C$

ÇÖZÜM

$$\int \frac{2x^2+x-1}{x}\cdot dx = \int\left(\frac{2x^2}{x}+\frac{x}{x}-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \int\left(2x+1-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \int 2x.dx + \int 1.dx - \int \frac{1}{x}\cdot dx$$

$$= \frac{2x^2}{2}+x-\ln|x|+C$$

$$= x^2+x-\ln|x|+C \quad \text{dir.}$$

YANIT "C"

9. $\int \frac{1}{\sin x}\cdot dx$ integralinde $x=2u$ ve $t=\sin u$ alınırsa **aşağıdakilerden hangisi elde edilir?**

A) $\int \frac{dt}{t^2-1}$ B) $\int \frac{dt}{t^3-1}$ C) $\int \frac{dt}{t^2+1}$

D) $\int \frac{dt}{t(1-t^2)}$ E) $\int \frac{dt}{t^2+1}$

ÇÖZÜM

$x = 2u$ ise $dx = 2\,du$

$$\int \frac{1}{\sin x} \cdot dx = 2\int \frac{1}{\sin 2u} du$$

$$= 2\int \frac{1}{2\sin u.\cos u} du$$

$$= \int \frac{\cos u.du}{\sin u.\cos^2 u}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\cos u.du}{\sin u.(1-\sin^2 u)} \qquad \begin{array}{l} t = \sin u \\ dt = \cos u.du \end{array}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dt}{t.(1-t^2)} \text{ olur.}$$

YANIT "D"

10. $\int_2^3 f(x+m).dx = \int_5^6 f(x).dx$ ve $m \in R$ ise **m değeri kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

$u = x + m$ alınırsa $du = dx$ olur.

$x = 3$ ise $u = 3 + m$

$x = 2$ ise $u = 2 + m$ dir.

$\int_{2+m}^{3+m} f(u)du = \int_5^6 f(x).dx$ olacağından

$3 + m = 6$ ve $2 + m = 5$ olmalı buradan

$m = 3$ olur.

YANIT "C"

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.\sin(\sin x).dx$ **integralinin sonucu neye eşittir?**

A) $1-\cos 1$ B) 1 C) $1+\cos 1$

D) $1+\sin 1$ E) $1-\sin 1$

ÇÖZÜM

$u = \sin x$ ise $du = \cos x.dx$

$x = 0$ ise $u = \sin 0 = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ ise $u = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$$\int_0^1 \sin u\, du = -\cos u\Big]_0^1 = -(\cos 1 - \cos 0)$$

$$= 1 - \cos 1 \text{ olur.}$$

YANIT "A"

ZAFER YAYINLARI

12. $\int_0^1 x^2 t dt - \int_0^1 x^2.t.dx$ **neye eşittir?**

A) 0 B) $x^2 - t$ C) $x^2 - t^2$

D) $\frac{x^2}{2} - t$ E) $\frac{3x^2 - 2t}{6}$

ÇÖZÜM

$$\int_0^1 x^2.t.dt = x^2\left(\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = x^2\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{x^2}{2}$$

$$\int_0^1 x^2.t.dx = t.\left(\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = t\left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{t}{3}$$

$$\int_0^1 x^2.t.dt - \int_0^1 x^2.t.dx = \frac{x^2}{2} - \frac{t}{3} = \frac{3x^2 - 2t}{6} \text{ olur.}$$

YANIT "E"

13. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot dx = p.\cos\sqrt{x}$ ise **p nin değeri kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 1 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \left(p.\cos\sqrt{x}\right)' = p\left(-\sin\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = -p \cdot \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \text{ olacağından}$$

$$\Rightarrow 1 = -\frac{2}{p}$$

$$\Rightarrow p = -2 \text{ olur.}$$

YANIT "A"

14. $\int_0^3 (-1)^{[\![x]\!]}.[\![x]\!].dx$ **integralinin sonucu nedir?**

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM

$0 \le x < 1$ ise $[\![x]\!] = 0$

$1 \le x < 2$ ise $[\![x]\!] = 1$

$2 \le x < 3$ ise $[\![x]\!] = 2$ dir.

$$\int_0^3 (-1)^{[\![x]\!]}.[\![x]\!].dx = \int_0^1 (-1)^0.0.dx + \int_1^2 (-1)^1.dx + \int_2^3 (-1)^2.2dx$$

$$= 0 + (-x]_1^2 + (2x]_2^3$$

$$= -(2-1) + 2(3-2)$$

$$= -1 + 2 = 1$$

YANIT "C"

15. p, q, ∈ Z^+ ise $\int_0^1 \left(x^{\frac{p}{q}} + x^{\frac{q}{p}} \right).dx$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) –1 B) 1 C) 0 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM

$$\int_0^1 \left(x^{\frac{p}{q}} + x^{\frac{q}{p}} \right).dx = \int_0^1 x^{\frac{p}{q}} + \int_0^1 x^{\frac{q}{p}}.dx$$

$$= \left(\frac{x^{\frac{p}{q}+1}}{\frac{p}{q}+1} \right]_0^1 + \left(\frac{x^{\frac{q}{p}+1}}{\frac{q}{p}+1} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\frac{p+q}{q}} \cdot (1-0) + \frac{1}{\frac{q+p}{p}} (1-0)$$

$$= \frac{q}{p+q} + \frac{p}{p+q} = \frac{q+p}{p+q} = 1$$

YANIT "B"

16. $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} [\![\frac{3x+1}{2}]\!] dx$ **integralinin sonucu neye eşittir?**

A) $\frac{2}{3}$ B) 1 C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{5}{3}$ E) 2

ÇÖZÜM

Adım aralığı $= \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$ dir.

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} [\![\frac{3x+1}{2}]\!] dx = \int_{\frac{1}{3}}^{1} [\![\frac{3x+1}{2}]\!] dx + \int_{1}^{\frac{4}{3}} [\![\frac{3x+1}{2}]\!] dx$$

$$= 1.\left(1 - \frac{1}{3}\right) + 2.\left(\frac{4}{3} - 1\right)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

YANIT "C"

17. $\int_0^2 x.|1-x|.dx$ **integralinin sonucu neye eşittir?**

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{7}{2}$

ÇÖZÜM

$x > 1$ iken $0 > 1–x$
$x < 1$ iken $0 < 1–x$ olacağından

$$\int_0^2 x|1-x|.dx = \int_0^1 x(1-x).dx + \int_1^2 (x^2 - x).dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^2).dx + \int_1^2 (x^2 - x).dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big]_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{0}{3}\right)\right] + \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

YANIT "B"

18. $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin|x| dx$ **integralinin sonucu nedir?**

A) –1 B) 0 C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

ÇÖZÜM

$$\int_{-\pi}^{2\pi} \sin|x| dx = \int_{-\pi}^{0} \sin|x|.dx + \int_0^{2\pi} \sin|x|.dx$$

$$= \int_{-\pi}^{0} \sin(-x).dx + \int_0^{2\pi} \sin x.dx$$

$$= \cos x\Big]_{-\pi}^{0} - \cos x\Big]_0^{2\pi} = 2 \text{ olur.}$$

YANIT "C"

19. $\int_0^{\pi} |\cos x|.dx$ **integralinin sonucu nedir?**

A) $\frac{1}{2}$ B) 0 C) 1 D) 2 E) $\frac{5}{2}$

ÇÖZÜM

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ ise $\cos \ge 0 \Rightarrow |\cos x| = \cos x$

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ise $\cos < 0 \Rightarrow |\cos x| = -\cos x$

$$\int_0^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x.dx$$

$$= \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) - \left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= (1-0) - (0-1) = 1 + 1 = 2$$

YANIT "D"

20. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} |\cos x - \operatorname{sgn}(\sin x)|.dx$ **integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\pi-\sqrt{3}+1}{2}$ C) $\frac{\pi-\sqrt{3}-1}{2}$

D) $\frac{\pi+\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\pi+1}{2}$

ÇÖZÜM

$\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$ iken $\sin x > 0$ ve $\operatorname{sgn}(\sin x) = 1$ olur.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} |\cos x - 1| dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} (1-\cos x)dx$$

($\forall x \in R$ için $\cos x \leq 1$ dir.)

$$x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} - \sin x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) - \left(\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi - \sqrt{3} + 1}{2}$$

YANIT "B"

21. $\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x.|\ln x|}$ **integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $-\ln 2$ B) $1-\ln 2$ C) $\ln 2$

D) $\ln 2+1$ E) $2\ln 2$

ÇÖZÜM

$\frac{1}{e^2} < x < \frac{1}{e}$ ise $\ln x < 0 \Rightarrow |\ln x| = -\ln x$ dir.

$$-\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x.\ln x} = -\int_{-2}^{-1} \frac{1}{u}\cdot du = -\ln|u|\Big]_{-2}^{-1}$$

$$= -(\ln|-1| - \ln|-2|)$$

$$= -(\ln 1 - \ln 2) = \ln 2$$

YANIT "C"

22. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ise $\int_{\sin x}^{\cos x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot dt$ **integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{2}-x$ C) $\frac{\pi}{2}+x$

D) $\frac{\pi-x}{2}$ E) $\frac{\pi}{2}-2x$

ÇÖZÜM

$$\int_{\sin x}^{\cos x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot dt = \operatorname{Arc\,sin} t\Big]_{\sin x}^{\cos x}$$

$$= \underbrace{\operatorname{Arc\,sin}(\cos x)}_{a} - \underbrace{\operatorname{Arc\,sin}(\sin x)}_{b}$$

$a = \operatorname{Arcsin}(\cos x)$ ise $\cos x = \sin a \Rightarrow x + a = \frac{\pi}{2}$

$b = \operatorname{Arcsin}(\sin x)$ ise $\sin x = \sin b \Rightarrow x = b$

$a - b = \frac{\pi}{2} - x - x = \frac{\pi}{2} - 2x$ olur.

YANIT "E"

23. $\int \frac{2}{x^2-2x+2}\cdot dx$ **integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) Arccot(x–1) + C B) Arcsin(x–1) + C

C) Arctanx + C D) Arctan(x–1) + C

E) $\operatorname{Arc\,tan}\frac{x}{2} + C$

ÇÖZÜM

$$x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1$$

$$\int \frac{1}{x^2-2x+2} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+1}\cdot dx \qquad \begin{matrix} u = x-1 \\ du = dx \end{matrix}$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\cdot dx = \int \frac{1}{1+u^2} du = \operatorname{Arc\,tan} u + C$$

$$= \operatorname{Arc\,tan}(x-1) + C$$

YANIT "D"

24. $\int e^x \cdot \cos x \cdot dx$ **değeri nedir?**

A) $e^x.\cos x.\sin x + C$ B) $e^x.(\sin x+\cos x)+C$

C) $\frac{e^x}{2}\cdot(\cos x-\sin x)+C$ D) $\frac{e^x}{2}\cdot(\cos x+\sin x)+C$

E) $\frac{e^x}{2}\cdot \sin x + C$

ÇÖZÜM

$\int f(x).g'(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)$ dir.

$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x.dx$

$g'(x) = \cos x.dx \Rightarrow g(x) = \sin x$

$$\int e^x.\cos x.dx = e^x.\sin x - \int e^x.\sin x.dx$$

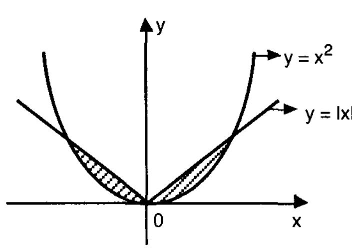
$$= e^x.\sin x - \left(e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x).dx\right)$$

$$\int e^x.\cos x.dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x.\cos x.dx$$

$$\int e^x.\cos x.dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) \text{ olur.}$$

YANIT "D"

25.



$f(x) = |x|$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonlarının grafikleri ile sınırlı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

ÇÖZÜM

$f(x) = g(x) \Rightarrow |x| = x^2$

$x > 0 \Rightarrow x^2 = x, \quad x(x-1) = 0$

$x = 0, \ x = 1$

$x < 0$ ise $x^2 + x = 0, \ x(x+1) = 0$

$x = 0, \ x = -1$

$$\int_{-1}^{1}(|x| - x^2).dx = 2\cdot\int_0^1(|x| - x^2)dx = 2\int_0^1(x - x^2)$$

$$\Rightarrow 2\cdot\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = 2\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

YANIT "B"

26. $f(x) = 3x^2$ eğrisi, $x = m$, $x = n$ doğruları ve x ekseni ile sınırlı bölgenin alanı $m^2 + m.n + n^2$ ve $0 < m < n$ olduğuna göre, **n – m kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM

$$\int_m^n 3x^2.dx = 3\frac{x^3}{3}\Big]_m^n = m^2 + m.n + n^2$$

$$= n^3 - m^3 = m^2 + m.n + n^2$$

$$\Rightarrow (n-m).(n^2 + m.n + m^2) = m^2 + m.n + n^2$$

$$\Rightarrow n - m = 1$$

YANIT "C"

27. $x^2.y + xy = 1$ eğrisi $x = 1$ ve $x = 2$ doğruları ile sınırlandırılan alan **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) ln2 B) ln3 C) 2ln2

D) $\ln\frac{5}{2}$ E) $\ln\frac{4}{3}$

ÇÖZÜM

$x^2.y + xy = 1 \Rightarrow y(x^2 + x) = 1, \ y = \frac{1}{x^2+x}$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2+x}\cdot dx = \int_1^2 \frac{1}{x.(x+1)}\cdot dx = \int_1^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\cdot dx$$

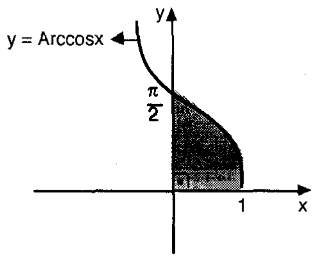
$$\Rightarrow \ln|x|\Big]_1^2 - \ln|x+1|\Big]_1^2$$

$$\Rightarrow (\ln 2 - \ln 1) - (\ln 3 - \ln 2)$$

$$\Rightarrow \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 = 2\ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}$$

YANIT "E"

28.



Şekilde y = Arccosx fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **Taralı bölgenin değeri neye eşittir?**

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{\pi}{4}$

ÇÖZÜM

$$\int_0^1 \text{Arc}\cos x.dx = \text{Taralı alan}$$

$y = \text{Arccos}x \Leftrightarrow x = \cos y$

$$\int_0^1 \text{Arc}\cos x.dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y.dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos ydy = \sin y\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

YANIT "A"

29. m, n ∈ Z olmak üzere,

$\int_m^n [\![x]\!]dx = \int_m^n mdx$ ise $\int_m^n dx$ **değeri nedir?**

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM

$\int_m^n [\![x]\!]dx = \int_m^n mdx$ ise m ile n ardışık sayılardır.

Yani; n = m + 1 dir.

($[\![x]\!]$ in artımı 1br. olduğundan)

O halde,

$$\int_m^n dx = \int_m^{m+1} dx = x\Big]_m^{m+1}$$

$$= (m+1) - (m) = 1 \text{ bulunur.}$$

YANIT "C"

30. y . $x^2(y+1)^2 = 1$ eğrisinin y = 1 ve y = 4 doğrularının sınırladığı alanın **y ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi nedir?**

A) $\pi\left(\ln\frac{8}{5} - \frac{3}{10}\right)$ B) $\pi\left(\ln 2 - \frac{1}{10}\right)$

C) π D) $\frac{5}{\pi}\cdot\ln 2$

E) $\frac{\pi}{5}\cdot\ln 2$

ÇÖZÜM

$$V = \pi\int_1^4 x^2\cdot dy$$

$x^2 = \dfrac{1}{y(y+1)^2}$ olduğundan

$$V = \pi\int_1^4 \frac{1}{y.(y+1)^2}\cdot dy = \pi\left(\int_1^4\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} - \frac{1}{(y+1)^2}\right)\cdot dy\right)$$

$$V = \pi\left(\ln|y|\Big]_1^4 - \ln|y+1|\Big]_1^4 + (y+1)^{-1}\Big]_1^4\right)$$

$$V = \pi\left((\ln 4 - \ln 1) - (\ln 5 - \ln 2) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$V = \pi\left(\ln 4 + \ln 2 - \ln 5 - \frac{3}{10}\right) = \pi\left(\ln\frac{8}{5} - \frac{3}{10}\right)$$

YANIT "A"

İNTEGRAL

TEST 1

1. $f'(x) = 3x^2 - 4x$ ve $f(-1) = 5$ ise **f(1) kaçtır?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

2. $\int_1^m \frac{1}{x^2}dx = \int_m^2 \frac{1}{x^2}dx$ ise **m neye eşittir?**

A) $\frac{4}{3}$ B) 1 C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

3. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ olduğuna göre, $\int_0^2 d\left(f^{-1}(x)\right)$ **kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) 3

4. $\int_{-2}^{2} \frac{(x^2-1)dx}{x - sgn(x-1)}$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) –4 B) –2 C) 0 D) 2 E) 4

5. $f(x) = \int_0^{\tan x} \sqrt{1+3t^2}\,dt$ **fonksiyonunun apsisi** $x = \frac{\pi}{4}$ **olan noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

6. $\int_1^3 x[\![x+2]\!]dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) 13 B) 13,5 C) 14
D) 14,5 E) 15

7. $\int_0^3 \left(|x-1| + |x-2|\right)dx$ **neye eşittir?**

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

8. $\int \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{1}{4}(x - \sin x) + C$ B) $\frac{1}{4}(x - \cos x) + C$
C) $\frac{1}{2}(x - \sin x) + C$ D) $\frac{1}{2}(x - \cos x) + C$
E) $\frac{1}{4}(x - \tan x) + C$

9. $\int \sin(\sin^2 x)\sin 2x\,dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $-\cos(\cos^2x) + C$ B) $-\sin(\cos^2x) + C$
C) $-\cos(\sin^2x) + C$ D) $\cos(\cos^2x) + C$
E) $\cos(\sin 2x) + C$

10. $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ **integralin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{7}{3}$

11. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{2}\sin x\sqrt{1+\cos 2x}\,dx$ **integralin değeri kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

12. $\int\left(\frac{3(\ln x)^2+1}{x}\right)dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $(\ln x)^3+\ln x+C$ B) $(\ln x)^2+x+C$

C) $(\ln x)^4+\ln x+C$ D) $(\ln x)^3+x+C$

E) $\frac{(\ln x)^2}{x}+C$

13. $\int\left(e^{ax}+e\right)^2 e^{ax}dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{1}{2a}\left(e^{ax}+e\right)^3+C$

B) $3a\left(e^{ax}+e\right)^3+C$

C) $\frac{1}{3a}\left(e^{ax}+e\right)^3+C$

D) $3a\left(e^{ax}+e\right)+C$

E) $3a\left(e^{ax}+e\right)^2+C$

14. $\int\frac{\sin 2x}{\sin^2 x+2}dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\ln(\sin^2 x+2)+C$ B) $\ln\sin x+C$

C) $\ln(\sin^3 x+2)+C$ D) $\ln(\sin x+2)+C$

E) $2\ln x+\sin x+C$

15. $\int\frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $-\sqrt{1-x}+C$

B) $\sqrt{1-x^2}+x+C$

C) $-\sqrt{1-x^2}-\arcsin x+C$

D) $\sqrt{1-x^2}+\sin x+C$

E) $\arcsin x+x+C$

16. $\int\frac{dx}{\sin^2(2-x)}$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\sin(2-x)+C$ B) $\cos(2-x)+C$

C) $\sec(2-x)+C$ D) $\tan(2-x)+C$

E) $\cot(2-x)+C$

17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos x+\sin x}{1+\cos x}\right)dx$ **integalinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{2}-\ln 2$ B) $\frac{\pi}{2}+\ln 2$ C) $\ln 2$

D) $\frac{\pi}{2}$ E) $2+\ln\frac{\pi}{2}$

18. $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$ **integalinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

19. $\int x\cos 3x\,dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{1}{3}(\sin 3x + \cos 3x) + C$

B) $\frac{1}{3}(x\sin 3x + \cos 3x) + C$

C) $\frac{1}{3}\left(x\sin 3x + \frac{\cos 3x}{3}\right) + C$

D) $\frac{1}{9}(x\sin 3x + \cos 3x) + C$

E) $\frac{1}{6}(x\sin 3x + \cos 3x) + C$

20. $\int_3^4 \frac{x}{x^2 - 3x + 2}dx$ **değeri kaçtır?**

A) $\ln\frac{2}{3}$ B) $\ln\frac{3}{4}$ C) $\ln\frac{5}{3}$

D) $\ln 2$ E) $\ln\frac{8}{3}$

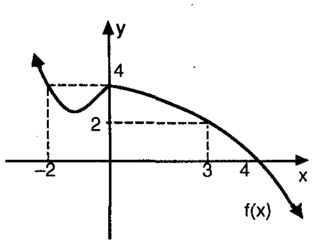
21. $\int_0^{\ln 2}(e^{2x} - e^x)dx$ integralinde $e^x = u$ dönüşümü yapılırsa **aşağıdakilerden hangisi elde edilir?**

A) $\int_1^2 (u^2 - u)du$ B) $\int_1^2 (u - 1)du$

C) $\int_0^2 (u^2 - u)du$ D) $\int_0^2 (u - 1)du$

E) $\int_1^2 (u^3 - u)du$

22.

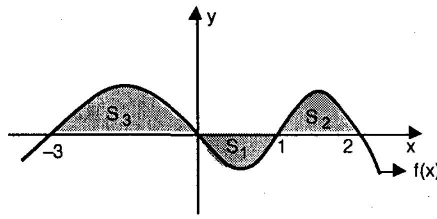


Şekilde R → R ye sürekli ve türevli f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre,

$\int_{-2}^{3} f(x)f'(x)dx$ **integralinin değeri nedir?**

A) –8 B) –6 C) –4 D) –2 E) 1

23.



$S_1 = 2S_2$, $S_3 = 6$ br^2 ve

$\int_{-3}^{2} f(x)dx = 2$ ise $\int_1^2 f(x)dx$ **kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

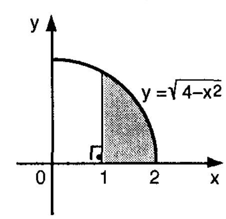
24. $y^2 = 4x$ eğrisi ile $y = \frac{x^2}{4}$ eğrisi arasında kalan bölgenin **alanı kaç br^2 dir?**

A) $\frac{16}{3}$ B) $\frac{19}{3}$ C) $\frac{29}{3}$ D) $\frac{32}{3}$ E) $\frac{64}{3}$

25. Denklemleri $y = x^3$ eğrisi ve $x = 2$, $y = 0$ doğruları ile sınırlanan bölgenin Ox ekseni etrafında 360° döndürülmesi ile oluşan **cismin hacmi kaç π br^3 tür?**

A) $\frac{128}{7}$ B) $\frac{35}{7}$ C) $\frac{64}{17}$ D) $\frac{32}{7}$ E) $\frac{17}{3}$

26. $y = \sqrt{4 - x^2}$, $x = 1$ ve $y = 0$ arasında kalan taralı alanın Ox etrafında 360° döndürülmesiyle elde edilen **cismin hacmi kaç π birim küptür?**



A) $\frac{5}{3}$ B) 2 C) $\frac{8}{3}$ D) 3 E) $\frac{10}{3}$

İNTEGRAL

TEST 2

1. $\int [f(x).g'(x)+f'(x).g(x)]dx$ ifadesi **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $f(x)+g(x)+C$
B) $f(g(x))+C$
C) $g(f(x))+C$
D) $f(x).g(x)+C$
E) $\frac{f(x)}{g(x)}+C$

2. $\int (3x-1)\cdot f(x)dx = x^3+x^2-x+C$ ise **f(x) aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x-1$
B) $x+1$
C) x^2+x-1
D) $3x^2+2x-1$
E) $x^2+\frac{2x}{3}-\frac{1}{3}$

3. $f(x)=\frac{1}{1-x}$ ise $\int f^{-1}(x)dx$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $1-\ln|x|+C$
B) $x-\ln|x|+C$
C) $x+\ln|x|+C$
D) $\ln|x-1|+C$
E) $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$

4. $\int (x-1)\cdot f'(x)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x+C$ eşitliği veriliyor.

$f(-2)=-7$ ise **f(2) değeri kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5. $\int \frac{x\cdot(x^2-1)}{(x^2-1)^2-1}dx$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1}{2}\ln|x-2|+C$
B) $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x|+C$
C) $\frac{1}{4}\ln|x-2|+C$
D) $\ln|x^2-2x|+C$
E) $\frac{1}{4}\ln|x^4-2x^2|+C$

6. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x}}dx$ ifadesinin değeri **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $2\sqrt{x}-x+C$
B) $2x.(\sqrt{x}-1)+C$
C) $2\sqrt{x}.(x-1)+C$
D) $3\sqrt{x}.(x-1)+C$
E) $3x.(\sqrt{x}-1)+C$

7. $\int \frac{\cos 2x-1}{\sin x}dx$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-2\sin x+C$
B) $-2\cos x+C$
C) $2\sin x+C$
D) $2\cos x+C$
E) $2\operatorname{cosec} x+C$

8. $\int \frac{e^{2x}-4x^2}{e^x+2x}dx$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) e^x-x+C
B) e^x-2x+C
C) e^x-x^2+C
D) e^x+x^2+C
E) $e^{2x}-2x^2+C$

9. $\int \frac{2x-1}{x^2+1}dx$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\ln(x^2+1) - \arctan x + C$

B) $\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \arctan x + C$

C) $\ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \arctan x + C$

D) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \arctan x + C$

E) $\ln\left(x-\sqrt{x^2+1}\right) - \arctan x + C$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{x}{2}-1}}$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\sqrt{\frac{x}{2}-1}+C$ B) $2\sqrt{\frac{x}{2}-1}+C$

C) $\sqrt{x-1}+C$ D) $2\sqrt{x-1}+C$

E) $4\sqrt{\frac{x}{2}-1}+C$

11. $\int_{-\ln 2}^{0} e^{-x}\cdot\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$ integralinde $e^x = \cos t$ dönüşümü yapılırsa **aşağıdakilerden hangisi elde edilir?**

A) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{0} dt$ B) $-\int_{\frac{\pi}{3}}^{0} \sin^2 t\,dt$

C) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{0} \cos^2 t\,dt$ D) $-\int_{\frac{\pi}{3}}^{0} \tan^2 t\,dt$

E) $-\int_{\frac{\pi}{3}}^{0} \cot^2 dt$

12. $f(x) = \int_{x}^{e^x} (\ln t)^2 dt$ ise **f′(1) değeri kaçtır?**

A) $e-1$ B) e C) [redacted] 1

D) e^2-1 E) $2e^2-1$

13. $\int_b^a (3x^2+1)dx = 6$ ve $a^2 + b^2 + a.b = 2$ ise **(a – b) kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) 3 E) $\frac{7}{2}$

14. $\int_0^1 \frac{2.dx}{\sqrt{x}.(1+x)}$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{2\pi}{3}$ E) π

15. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-\cos 2x}.\cos x\,dx$ ifadesinin değeri **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

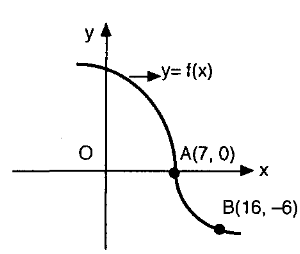
16. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-2x+2}$ ifadesinin değeri **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) arctan1 B) arctan2

C) arctan3 D) $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$

E) $\arctan 2 - \frac{\pi}{4}$

17. Yanda f(x) eğrisinin grafiği verilmiştir.



$\int_2^5 f'(3x+1)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) –6 B) –5 C) –4 D) –3 E) –2

18. $\int_1^3 [\![x+1]\!]|x-2|dx$ ifadesinin değeri **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{5}{2}$ B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) 1 E) $\frac{1}{2}$

19. $\int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-x^2} - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)dx$ ifadesinin değeri **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{2\pi}{3}$ D) π E) $\frac{4\pi}{3}$

20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$ integralinde $\tan\frac{x}{2}=t$ dönüşümü yapılırsa, **aşağıdakilerden hangisi elde edilir?**

A) $\int_0^1 \frac{2dt}{t^2-3}$ B) $\int_0^1 \frac{2dt}{t^2+3}$

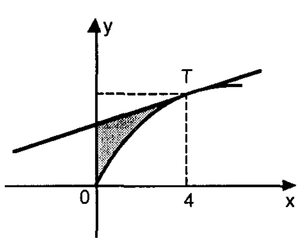
C) $\int_0^1 \frac{2tdt}{t^2+3}$ D) $\int_0^1 \frac{2tdt}{t^2-3}$

E) $\int_0^1 \frac{2t^2dt}{t^2-3}$

21. $y=x^2-3x$ ve $x+y=3$ fonksiyonları arasında kalan bölgenin **alanı kaç br^2 dir?**

A) 9 B) $\frac{29}{3}$ C) 10 D) $\frac{32}{3}$ E) 12

22.



Şekilde $y=\sqrt{x}$ eğrisine üzerindeki x = 4 apsisli T noktasından çizilen teğetin grafiği verilmiştir. **Taralı bölgenin alanı kaç br^2 dir?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

23. $y=e^{2x}$, $x=a(a>1)$ ve eksenlerle sınırlı bölgenin alanı 8 br^2 ise **a değeri kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) ln2

D) ln4 E) $\ln\sqrt{17}$

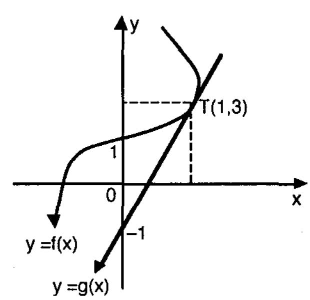
24. $\int_0^a \cos 2xdx = \left(\int_0^a \cos xdx\right)^2$ ise **a aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) arcsin4 B) arccos1

C) tan4 D) arctan1

E) arccot4

25.



Şekilde verilen f(x) ve g(x) fonksiyonları T(1,3) de teğettirler.

$\int_0^1 f'(x).g(x)dx - \int_1^0 f(x).g'(x)dx$ ifadesinin **değeri kaçtır?**

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

26. $\int_1^e \left[\frac{d}{dx}\int_1^x \ln t^2dt\right]dx$ **in değeri kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) e E) e^2

İNTEGRAL

TEST 3

1. $\dfrac{5}{6}\displaystyle\int_{2^6}^{2^{12}} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$ **integralinin değeri nedir?**

A) $2^{12}-2^{6}$ B) $2^{10}-2^{5}$ C) $2^{6}-2^{3}$
D) $2^{4}-2^{2}$ E) 0

2. $\displaystyle\int \dfrac{dx}{\tan x} - \int (\cot x - 1)dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\ln|\tan x| - \ln|1-\cot x| + C$
B) $\ln|\tan x| - \ln|\cot x - 1| + C$
C) $x + c$
D) $c \ (c \in \mathbb{R})$
E) $x\tan x + (x+1)\cot x + C$

3. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,(3-5x)dx$ integralinin **değeri kaçtır?**

A) 7 B) 3 C) 0 D) –3 E) –7

4. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \dfrac{7}{2}$ ve $\displaystyle\int_a^b [2f(x)-3]dx = 1$ ise

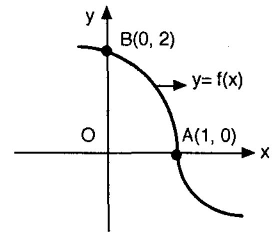
$a^2 - 2ab + b^2$ ifadesi **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) –4 B) –2 C) 0 D) 2 E) 4

5. $\displaystyle\int \dfrac{f(x)dx}{x-1} = x^4 + C$ ise **f(x) aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x^5 - x^4$ B) $x^3 - x^4$ C) $x^2 - x^3$
D) $4x^2 - x^3$ E) $4x^4 - 4x^3$

6.



Yukarıda y= f(x) eğrisinin grafiği verilmiştir.

$\displaystyle\int_0^1 \left[\dfrac{(x^3+1).f'(x) - 3x^2.f(x)}{x^6+2x^3+1}\right]dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

7. $f(x) = \displaystyle\int_{e^x}^{e^{x^2}} \dfrac{du}{u}$ ise **f′(2) kaçtır?**

A) 9 B) 6 C) 3 D) 0 E) –3

8. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin 2x \sin x dx$ **integralinin değeri nedir?**

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 0 D) $-\frac{2}{3}$ E) $-\frac{4}{3}$

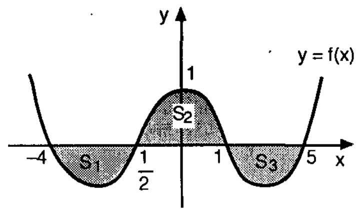
9. $\displaystyle\int_7^{22} f(x)dx = 36$ ise $\displaystyle\int_2^7 f(3x+1)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) 108 B) 36 C) 24 D) 12 E) 6

10. $\displaystyle\int_1^9 \dfrac{x^{\frac{1}{6}}+1}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{2}}}dx$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 8 B) 6 C) 4 D) 2 E) 0

11.

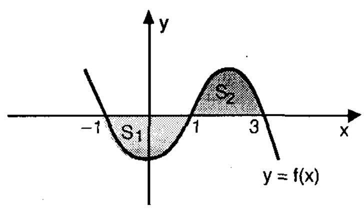


$S_2 = 3$ br^2 ve $\int_{-4}^{5} f(x)dx = -18$ olduğuna göre,

$S_1 + S_3$ kaç br^2 dir?

A) 21 B) 18 C) 15 D) 12 E) 19

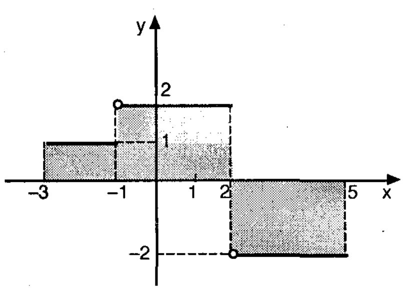
12.



$\int_{-1}^{3} |f(x)| = 19$ ve $\int_{-1}^{3} f(x)dx = 7$ ise **S_1 kaç br^2 dir?**

A) 26 B) 13 C) 12 D) 9 E) 6

13.

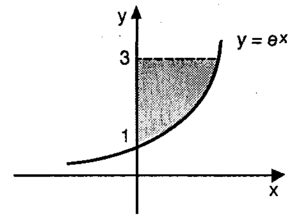


Şekilde y = f(x) grafiği veriliyor.

$\int_{-3}^{5} |f(x)|dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) 2 B) 4 C) 6 D) 10 E) 14

14.



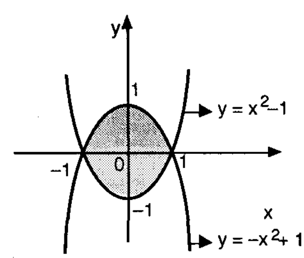
Taralı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

A) 3ln3 – 2 B) ln3 – 1 C) ln3
D) e^3 E) $3e^3 - 1$

15. $y = x^2 + 1$ parabolü ile (1, 2) noktasındaki teğeti ve y ekseni ile sınırlı bölgenin x ekseni etrafında 360 ° döndürülmesiyle **oluşan cismin hacmi kaç π br^3 tür?**

A) $\frac{15}{8}$ B) 1 C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{8}{15}$ E) $\frac{4}{15}$

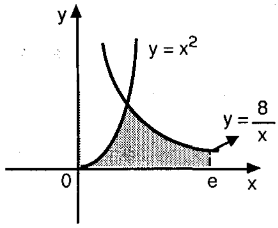
16.



Şekle göre taralı alan kaç br^2 dir?

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{7}{3}$ C) $\frac{8}{3}$ D) $\frac{11}{3}$ E) $\frac{13}{3}$

17.



Şekle göre taralı alan kaç br^2 dir?

A) $\frac{24\ln 2 - 16}{3}$ B) $\frac{32 - 24\ln 2}{3}$

C) $\frac{8}{3} - \ln 2$ D) $\ln 2 - \frac{8}{3}$

E) $\ln 256$

18. $\int_a^b f(x-a-b)dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\int_a^b f(t)dt$ B) $\int_b^a f(t)dt$

C) $-\int_{-a}^{-b} f(y)dy$ D) $-\int_{b-a}^{b} f(y)dy$

E) $\int_a^b f(-x)dx$

19. $f(x) = ax^2 + 3x + 4$ ve $\int_1^2 \left[\frac{d}{dx}\left(f'(x)\right)\right]dx = 12$

ise **a kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

20. $\int \frac{7}{6x^2+x-2}dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\ln\left|\frac{2x-1}{3x+2}\right| + C$

B) $2\ln|2x-1| - 3\ln|3x+2| + C$

C) $\frac{x+1}{6x^2+x-2} + C$

D) $\frac{2}{3}\ln\left|\frac{2x-1}{3x+2}\right| + C$

E) $\frac{x-1}{6x^2+x-2} + C$

21. $f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = 3x + 1$

$\int_0^2 f'(x)g(x)dx - \int_2^0 f(x)g'(x)dx$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 14 B) 24 C) 34 D) 36 E) 46

22. $\int_0^1 2^{x+1}.8^{x-1}dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{15}{16\ln 2}$ B) $\frac{7}{16\ln 2}$ C) $\frac{1}{\ln 2}$

D) 1 E) 3

23. $\int_0^3 \left| |x-2| + [\![x]\!] \right| dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{3}{2}$ B) 4 C) $\frac{1}{2}$ D) 5 E) $\frac{11}{2}$

24. $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}} \cdot dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) e B) $\frac{3}{2}(e-1)$ C) $e^{\frac{3}{2}}$

D) $\frac{2}{3}(e-1)$ E) $2e - \frac{1}{3}$

25. $\int_0^1 \arcsin x dx$ **integralinin sonucu nedir?**

A) $\frac{\pi}{2} - 1$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{3\pi}{2} + 1$

D) $\frac{\pi}{3}$ E) $2\pi - 1$

İNTEGRAL

TEST 4

1. $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \ln(\sin x)dx + \int_{x}^{2x}\left(t^2+t\right)dt\right)$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $3x^2-7x$ B) x^2+7x C) $7x^2+3x$

D) x^2+5x E) $-x^2$

2. $\displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{\sin(\tan x)}{\cos^2 x}\cdot dx$ integralinde $u = \tan x$ dönüşümü yapılırsa **aşağıdakilerden hangisi elde edilir?**

A) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{-\frac{\sqrt{3}}{3}} \sin u.du$ B) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \sin u.du$

C) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}} \cos u.du$ D) $\displaystyle -\int_{\sqrt{3}}^{-\frac{\sqrt{3}}{3}} \sin u.du$

E) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{-\frac{\sqrt{3}}{3}} \sin(-u)du$

3. $\displaystyle\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{e^2}{m}} \frac{\ln(mx)}{x}\cdot dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) 0 B) ln2 C) 4 D) 2 E) 2ln2

4. $p^a = \sqrt{e\sqrt[3]{e}}$ ise $\displaystyle\int_{1}^{p} \frac{a}{x}\cdot dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) 2

5. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\, d(\cos x)$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $-\frac{5}{24}$ D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{11}{24}$

6. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x+1}{3x^2+6x+4}dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{12}\ln\frac{13}{2}$ B) $\frac{1}{6}\ln\frac{13}{4}$

C) $\ln13-\ln2$ D) $\ln13$

E) $\frac{1}{6}\ln\frac{2}{13}$

7. Denklemi $y = f(x)$ olan eğrinin her noktasındaki teğetinin eğimi $4x-3$ dür. Bu eğri x eksenini $x = 1$ de kestiğine göre **y eksenini hangi değerde keser?**

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

8. $f'(x) = \sin2x + \cos x$ ve $f(0) = 1$ ise $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 3 E) $\frac{5}{2}$

9. $f(x) = \displaystyle\int (2x+3).dx$ veriliyor.

$(f\circ f)(0) = 5$ ise **f(x) aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) $-x^2-3x+1$ B) x^2-3x+5

C) x^2-3x-1 D) $-x^2-3x-7$

E) x^2+3x-5

10. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\cos 2x}\,dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{3}$

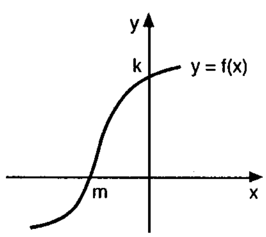
11. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{3}}$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

12. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x.\sin x^2.dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

13.



$\int_m^0 f(x).f'(x).dx = 2$ ise **k nın eşiti nedir?**

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

14. $f(x) = \int_0^x \left(t^3 - 3t + 2\right)dt$ olduğuna göre, **fonksiyonun minumum değeri kaçtır?**

A) –6 B) –3 C) –2 D) –1 E) 0

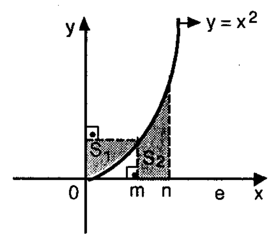
15. $\int_p^m 3.dx = 15$ ve $\int_p^m (2x-3)dx = 35$ ise **m + p nin değeri kaçtır?**

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

16. $\int_0^4 \left(|x-2| + \operatorname{sgn}(x-2) + [\![\frac{x}{2}]\!]\right)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

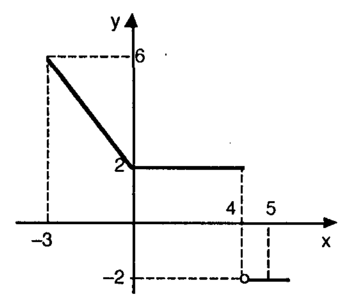
17.



Şekilde $S_1 = S_2$ ise $\left(\frac{n}{m}\right)^3$ **değeri kaçtır?**

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) 3 E) 4

18.



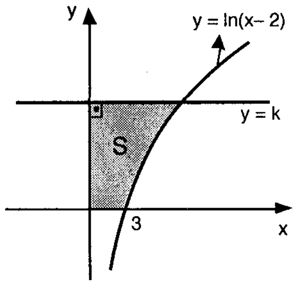
$f : R \to R$,

y = f(x) fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir.

$\int_{-3}^{5} f(x)dx$ **değeri kaçtır?**

A) 16 B) 18 C) 20 D) 21 E) 22

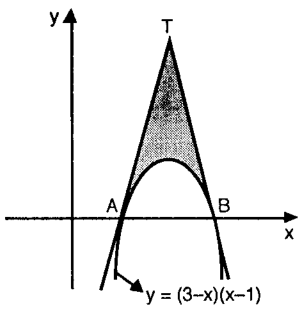
19.



y = ln(x – 2) eğrisi ve y = k doğrusu verilmiştir. Taralı bölgenin alanı $S = e^3 + 5$ br^2 ise **k neye eşittir?**

A) ln2 B) 2ln2 C) 3ln3
D) 2 E) 3

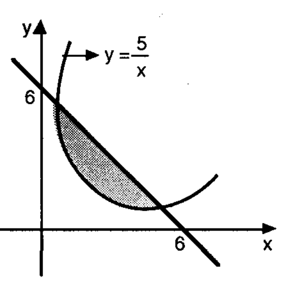
20.



f(x) = (3 – x)(x – 1) eğrisinin Ox eksenini kestiği A ve B noktalarından çizilen teğetlerin kesim noktası T dir. **Taralı alan kaç br^2 dir?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 1 E) $\frac{4}{3}$

21.



Verilenlere göre taralı alanın değeri nedir?

A) 13 – 5ln5 B) 6 + 5ln5
C) 10 – ln5 D) 3 + 2ln5
E) 12 – 5ln5

22. a + b – 2c = 5 ve b – c = 2 olduğuna göre,

$\int_a^b (x-c)^2.dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) –7 B) $-\frac{19}{3}$ C) 0
D) $\frac{19}{3}$ E) 7

23. $\int x.(x^2+3)^3 dx = m(x^2+3)^4 + C$ olduğuna göre, **m değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

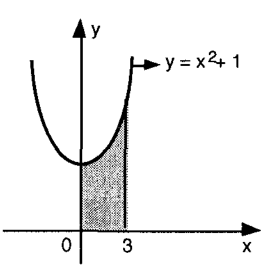
24. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{3\pi}{2}$ C) $\frac{5\pi}{6}$ D) π E) $\frac{3\pi}{4}$

25. $\int_1^{\sqrt{2}} x.\ln\left(x^2.e^{x^2}\right)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $2\ln2+\frac{1}{2}$ B) $\ln2+\frac{1}{4}$ C) ln2
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

26. $y = x^2 + 1$, y = 0, x = 0 ve x = 3 ile **sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?**



A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

İNTEGRAL

TEST 5

1. $\int_p^q x^2dx = 8$ ve $\int_p^q dx = 6$ ise $\mathbf{p^2 + p.q + q^2}$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 4 B) –4 C) $\frac{9}{4}$ D) $\frac{5}{2}$ E) 6

2. $\int f(x).dx = x^2 + 2x - 1$ ise **f(x) aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $2 + x$ B) $2x - 1$ C) $2x + 2$
D) $2 - 2x$ E) $-2 + x$

3. $\int (4 + x^2)^7 x \cdot dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{1}{16}(4 + x^2)^7 + C$ B) $\frac{1}{16}(4 + x^2)^8 + C$
C) $\frac{1}{16}(4 + x^2)^9 + C$ D) $\frac{1}{8}(4 + x^2)^8 + C$
E) $\frac{1}{4}(4 + x^2)^8 + C$

4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$ integralinde $\sqrt{x} = \sin t$ dönüşümü yapılırsa, **aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?**

A) $\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^2 t\,dt$ B) $2\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^2 t\,dt$
C) $2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t\,dt$ D) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t\,dt$
E) $2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t\,dt$

5. $\int_0^1 6x^2(x^2 + 1)dx$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{16}{5}$ B) 3 C) 2 D) $\frac{3}{2}$ E) 6

6. $\int \frac{x^2 - x + 3}{x + 1}dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{1}{2}x^2 + 5\ln|x + 1| + C$
B) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + C$
C) $x^2 - 2x + 5\ln|x + 1| + C$
D) $\ln|x + 1| + C$
E) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 5\ln|x + 1| + C$

7. $\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $2 - \ln 2$ B) $1 - \ln 2$ C) $\ln 2$
D) $\frac{1}{3}\ln 2$ E) $\frac{1}{2}\ln 2$

8. $\int \left(2e^x - \frac{3}{x^2 + 1}\right)dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{1}{2}e^x - 3\arctan x + C$
B) $2e^x - 3\tan(x^2 + 1) + C$
C) $2e^x - 3\arctan x + C$
D) $\frac{1}{2}e^x - 2\arctan 3x + C$
E) $2e^x - \frac{1}{2}\arctan 2x + C$

9. $\int 2.(\sin x)^{\frac{3}{2}}.\cos x\,dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{2}{5}(\sin x)^{\frac{3}{2}} + C$ B) $\frac{4}{5}(\sin x)^{\frac{5}{2}} + C$
C) $2(\sin x)^{\frac{3}{2}} + C$ D) $\frac{2}{5}\cos x + C$
E) $\frac{4}{5}\sin x + C$

10. $\int_1^{e^2} \frac{\ln^3 x}{x} dx$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11. $\int_{-1}^{3} \mathrm{sgn}\left(x^2-4\right)dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 2 B) –2 C) 3 D) –3 E) 1

12. $\int_1^{3} \frac{dx}{x.\sqrt{x+1}}$ integralinde $u=\sqrt{x+1}$ dönüşümü yapılırsa, **aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?**

A) $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{2du}{u^2-1}$ B) $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{du}{u^2-1}$

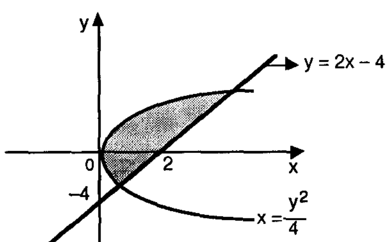
C) $\int_1^{3} \frac{2du}{u^2-1}$ D) $\int_1^{3} \frac{udu}{u^2-1}$

E) $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{udu}{u^2-1}$

13. $\int_0^3 |2x|dx$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 15 B) 13 C) 11 D) $\frac{11}{2}$ E) 9

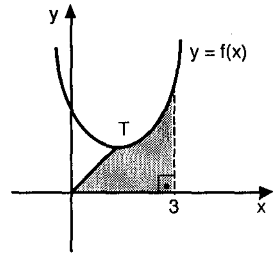
14.



Şekilde $y^2 = 4x$ eğrisi $2x - y = 4$ doğrusu ve y ekseni ile sınırlanan **taralı alan kaç br² dir?**

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

15. $f(x) = x^2 - 2x + 5$ eğrisinin tepe noktası T ise **taralı alan kaç br² dir?**



A) $\frac{58}{3}$ B) 48 C) $\frac{38}{3}$ D) $\frac{19}{3}$ E) $\frac{19}{2}$

16. $f : R \to R$, $f''(x) = 4$ dür. f(x) in (1,5) noktasındaki teğeti x ekseni ile 45° lik açı yapıyorsa **f(x) nedir?**

A) $2x^2 - 3x$ B) $2x^2 - 3x + 6$

C) $x^2 - 3x$ D) $2x^2 - x + 1$

E) $x^2 - 5x + 1$

17. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\tan x + C$ B) $\tan\frac{x}{2} + C$

C) $\tan 2x + C$ D) $\tan 3x + C$

E) $\tan\frac{3x}{2} + C$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sqrt{\tan x}.\sec^2 x\right)dx$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

19. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)dx$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) –1

20. $f : R \to R$; $f(x) = x^2 + x - 6$ eğrisi $x = -2$, $x = 1$ doğruları ve x ekseni ile sınırlanan **bölgenin alanı kaçtır?**

A) $\frac{33}{2}$ br² B) $\frac{23}{2}$ br² C) $\frac{21}{2}$ br²

D) $\frac{19}{2}$ br² E) $\frac{17}{2}$ br²

İNTEGRAL

TEST 6

1. $\int_{-1}^{1}(2x^2 - x^3)dx$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) 1 B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) 2 E) $\frac{7}{3}$

2. $\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{8}{9}$ C) $\frac{9}{10}$ D) $\frac{9}{8}$ E) $\frac{10}{9}$

3. $\int_{1}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4. $\int_{1}^{8}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)dx$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) 18 B) $\frac{73}{4}$ C) $\frac{97}{4}$ D) 19 E) 29

5. $\int_{2}^{3}\frac{d(x^2)}{x^2 - x}$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) ln2 C) ln3 D) ln4 E) ln6

6. $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4}$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{5}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{3}$

7. $\int_{1}^{6}\frac{x\,dx}{\sqrt{x+3}}$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) $\frac{10}{3}$ D) $\frac{20}{3}$ E) 6

8. $\int_{0}^{1}4^x\,dx$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{3}{\ln 4}$ B) ln4 C) $\frac{\ln 4}{3}$

D) 4 E) 3ln4

9. $\int_{0}^{1}\left(e^x + e^{-x}\right)^2dx$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) $e^2 - e^{-2} + 2$ B) $\frac{1}{2}(e^2 - e^{-2}) + 2$

C) 4 D) $2(e^2 - e^{-2})$

E) e^6

10. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sec x.\tan x\,dx$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{\pi}{4}$

11. $\int_{0}^{1}\cos\frac{\pi x}{2}dx$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{1}{\pi}$ B) $\frac{2}{\pi}$ C) π D) 2π E) π^2

12. $\int_{0}^{2}\left(\sin \pi x - \cos\frac{\pi x}{2}\right)dx$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) −2 B) −1 C) 0 D) $\frac{\pi}{12}$ E) $\frac{\pi}{6}$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x dx$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{4}{3}$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 15\cos^5 x dx$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 15

15. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) $\ln\sqrt{a}$ B) 1+lna C) $\ln(1+\sqrt{2})$
D) $\sqrt{a}\ln a$ E) $\ln(a\sqrt{2})$

16. $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

17. $\int_1^2 e^{\ln 3x} dx$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) 1 B) e C) $\frac{e^2}{2}$ D) e^2 E) $\frac{9}{2}$

18. $\int_0^{\ln 3} e^{3x} dx$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) ln2 B) 2 C) ln4 D) $\frac{26}{3}$ E) 9

19. $\int_1^4 \frac{\ln\left(x^2 e^{x^2}\right)}{x} dx$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) $\ln^2 4$ B) ln15 C) ln15
D) $\ln^2 4 + \frac{15}{2}$ E) ln17

20. $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{\pi^4}{324}$ B) $\frac{\pi}{324}$ C) $\frac{\pi}{24}$
D) $\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{\pi}{4}$

21. $\int_0^1 \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2} dx$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{192}$ B) $\frac{\pi^2}{192}$ C) $\frac{\pi^3}{192}$ D) π^3 E) 192

22. $\int_{\tan x}^{\cot x} \frac{dt}{1+t^2}$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{2} - 2x$ B) $2x - \frac{\pi}{2}$ C) 2x
D) $\frac{\pi}{2}$ E) 0

23. $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{1+x^4}\right) dx = A$ ise $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} \left(\frac{5\cos x}{2+2x^4}\right) dx$

integralinin A türünden değeri nedir?

A) $\frac{2A}{5}$ B) $\frac{A}{5}$ C) $\frac{-A}{5}$
D) $\frac{-A}{2}$ E) $\frac{-5A}{2}$

24. $\int_0^x \arcsin\left(\sin t^2\right) dt$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{x}{3}$ B) x C) 3x D) $\frac{x^3}{3}$ E) $3x^2$

25. $\int_1^{a^n} \frac{1}{x} dx$ **integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $n\int_1^a \frac{1}{x} dx$ B) $-a\int_1^n \frac{1}{x} dx$
C) $a^n \int_1^a x^2 dx$ D) $a\int_1^n \frac{1}{x} dx$
E) $n\int_1^a x^2 dx$

İNTEGRAL

TEST 7

1. $\int x \,.\, f'(x)\,dx = x^3 - 3x^2 + C$ ve $f(2) = -5$ ise, **f(0) kaçtır?**

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

2. $\int_1^4 \sqrt{x}\,.\,(5x-3)dx$ integralinin **değeri kaçtır?**

A) 16 B) 24 C) 36 D) 48 E) 52

3. f in tanımlı olduğu değerler için $\int_{a-1}^{b} f(2x-1)\,dx$ **ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\int_a^b f(x)\,dx$ B) $\frac{1}{2}\int_{2a-3}^{2b-1} f(x)\,dx$

C) $2\int_{2a}^{2b} f(x)\,dx$ D) $2\int_{2a-3}^{2b+1} f(x)\,dx$

E) $\frac{1}{2}\int_{2a-1}^{2b+1} f(x)\,dx$

4. $\int_a^b u\,du = \frac{15}{2}$ ve $\int_a^b (2u-1)\,du = 10$ ise,

a kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 3 E) 4

5. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\sqrt{3}$ B) 1 C) $\sqrt{3}-\frac{1}{3}$

D) $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. $\int_1^2 e^{\ln x + x^2}dx$ integralinin **değeri nedir?**

A) $\frac{e^4-e}{2}$ B) e^2-1 C) $\frac{e+1}{2}$

D) e^2-e E) $\frac{e^2-e}{2}$

7. $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{x^2+x^4}\,dx$ integralinin **değeri kaçtır?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{7}{2}$ E) $\frac{19}{3}$

8. $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ integralinin **değeri kaçtır?**

A) $\frac{\pi^2}{16}$ B) $\frac{\pi^2}{32}$ C) $\frac{\pi}{16}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{4}$

9. $\int \frac{x^3+2}{x^2-1}dx$ **ağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}\cdot \ln|x-1| - \frac{1}{2}\cdot \ln|x+1| + C$

B) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\cdot \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

C) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\cdot \ln|x-1| + \frac{3}{2}\cdot \ln|x+1| + C$

D) $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$

E) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

10. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 3x \cos x \, dx$ integralinin **değeri kaçtır?**

A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

11. $\int_{\frac{9}{2}}^{6} \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}}$ integralinin **değeri kaçtır?**

A) 0 B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$

12. $f(x) = \int_{\ln(x^2+1)}^{\ln(x^3+2)} e^u \, du$ olduğuna göre, **f′(2) kaçtır?**

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

13. $\int_{1}^{16} \frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}} \, dx$ integralinin **değeri kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

14. $\int_{-2}^{1} \left([\![x-1]\!] + \operatorname{sgn}(x+1) - 2 \cdot |x| \right) dx$ integralinin **değeri kaçtır?**

A) –10 B) –8 C) 0 D) 6 E) 12

15. $\int_{0}^{1} x \cdot (x-1)^4 \, dx$ integralinin **değeri kaçtır?**

A) $-\frac{11}{30}$ B) $-\frac{1}{10}$ C) $\frac{1}{30}$

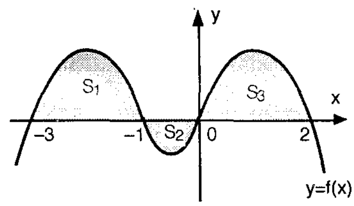
D) $\frac{1}{15}$ E) $\frac{11}{15}$

16. $\int_{0}^{1} e^x \cdot x^2 \cdot dx$ integralinin **değeri kaçtır?**

A) e–2 B) e–1 C) e

D) e+1 E) e+2

17.



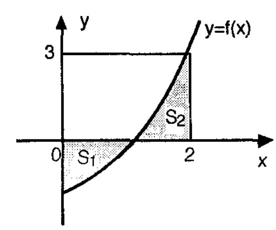
Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$S_1 = 5$ birimkare, $S_2 = 6$ birimkare ve

$\int_{-3}^{2} f(x) \, dx = 9$ ise, **S_3 kaç birimkaredir?**

A) 2 B) 8 C) 10 D) 16 E) 20

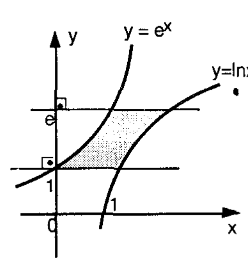
18. Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $S_1 = 4$ birimkare, $S_2 = 1$ birimkare ise,



$\int_{0}^{2} x \cdot f'(x) \, dx$ integralinin **değeri kaçtır?**

A) 2 B) 4 C) 6 D) 9 E) 10

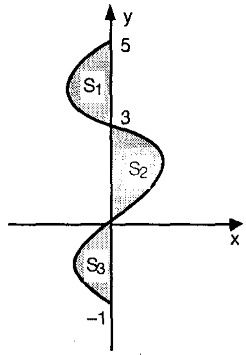
19. **Şekilde verilenlere göre taralı bölgenin alanı kaç birimkaredir?**



A) $e^e - e - 1$ B) $e + 1$ C) $e^2 - e + 1$

D) $e^e - 2e - 1$ E) $e - 1$

20. x = f(y) eşitliği ile tanımlı bağıntının grafiği ile y ekseninin oluşturduğu, şekildeki S_1,S_2 ve S_3 bölgelerinin alanları sıra ile 5, 4 ve 3 birimkare ise $\int_{-1}^{5} f(y)\,dy$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

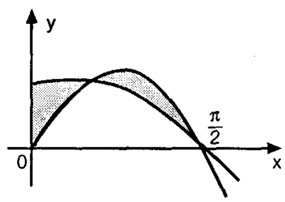


A) –12 B) –6 C) –4 D) 4 E) 12

21. Denklemleri

y = sin2x ve

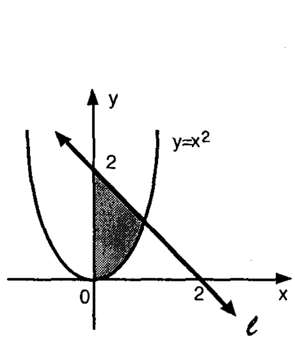
y = cosx olan eğriler ile sınırlanan **şekildeki taralı bölgelerin alanları toplamı kaç birimkaredir?**



A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

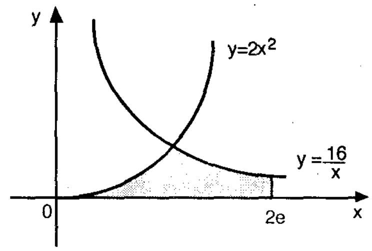
D) $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

22. Şekilde denklemi $y = x^2$ olan parabol ile ℓ doğrusu verilmiştir. **Taralı bölgenin alanı kaç birimkaredir?**



A) $\frac{9}{4}$ B) $\frac{6}{5}$ C) $\frac{7}{6}$ D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

23.

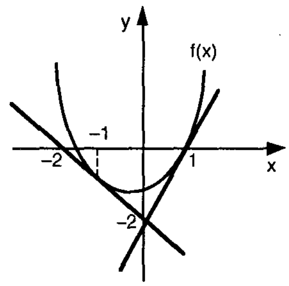


Şekilde verilenlere göre, **taralı bölgenin alanı kaç birimkaredir?**

A) $\frac{64}{3}$ B) $\frac{16}{3}+\ln 2$ C) $\frac{8}{3}+2.\ln 2$

D) $18-\ln 2$ E) $\frac{56}{3}$

24.



Grafiği yukarıda verilen f(x) fonksiyonu için

$\int_{-1}^{1} f''(x)\cdot\left(f'(x)+2\right)dx$ **işleminin sonucu kaçtır?**

A) $-\frac{13}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 2

D) $\frac{17}{2}$ E) $\frac{15}{2}$

25. $\int_{0}^{\ln 3}\left(e^{3x}-e^{x}\right)dx$ integralinde $e^x = t$ dönüşümü yapılırsa **aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?**

A) $\int_1^3 \left(t^3-t\right)dt$ B) $\int_1^3 \left(t^2-1\right)dt$

C) $\int_1^3 \left(t^{3t}-e^{t}\right)dt$ D) $\int_0^1 \left(t^3-t\right)dt$

E) $\int_0^3 \left(\ln 3t-\ln t\right)dt$

İNTEGRAL

TEST 8

1. $\int \cos^2 x\,dx + \int (\sin^2 x - 2)\,dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $2\cos^2 x - 2x + C$ B) $-2x + C$
C) $-x + C$ D) $2\sin^2 x - 2x + C$
E) $x^2 + C$

2. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x+1}\,dx = f(x) + \frac{x^3}{3} - \ln|x+1| + c$ olduğuna göre, **f′(–5) aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

3. $\int (x+2)\sqrt{x^2+4x}\,dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{2}{3}\sqrt{x^2+4x} + C$ B) $\frac{1}{2}(x^2+4x)^2 + C$
C) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{(x^2+4x)^2} + C$ D) $\frac{1}{2}\sqrt{(x^2+4x)^3} + C$
E) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+4x)^3} + C$

4. Denklemi $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\sin^2 x} \sqrt{1+2t^2}\,dt$ olan eğrinin **[0,2π] aralığında kaç tane yerel ekstremum noktası vardır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5. $\displaystyle\int_{-1}^{2} |x^2 - x|\,dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{11}{6}$ B) $\frac{7}{3}$ C) $\frac{8}{3}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{2}{7}$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi} \left[\operatorname{sgn}(\cos x) - [\![\tfrac{x}{\pi}]\!]\right] dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) –2 B) π–1 C) 0 D) π E) 2π

7. $\displaystyle\int_0^1 [\![3x+1]\!]\,dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 1 B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) 3 E) $\frac{7}{2}$

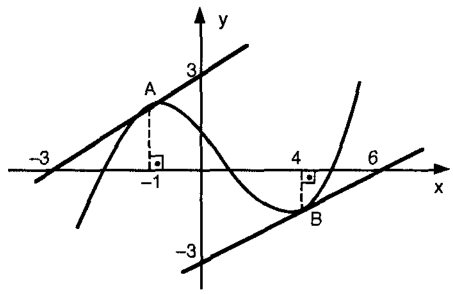
8. $\displaystyle\int_{-1}^{0} 3^{x+1}\,6^{1-x}\,dx = \frac{k}{\ln 4}$ olduğuna göre, **k aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 36 B) 18 C) –6 D) –12 E) –24

9. $\displaystyle\int_0^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $e^2 - 1$ B) $1 - e^2$ C) $2(e^2 - 1)$
D) $2(1 - e^2)$ E) $\frac{2}{e^2 - 1}$

10.



f fonksiyonunun şekildeki eğrisine –1 ve 4 apsisli A ve B noktalarından teğetler çizilmiştir. $\int_{-1}^{4} 2.f'(x).f''(x)dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $-\frac{3}{4}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) $-\frac{3}{8}$ E) $-\frac{2}{5}$

11. $\int_{1}^{e^{\pi}} \frac{1}{x}\sin(3\ln x)\,dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{2}{3}$ B) 0 C) $\frac{1}{3}+\pi$

D) $2\pi-\frac{1}{3}$ E) $e+\pi$

12. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(3x)\,.\,\sin 6x\,dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $-\frac{1}{12}$ B) $-\frac{1}{24}$ C) $\frac{1}{24}$

D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{6}$

13. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin(3x)\,.\,\cos(5x)\,dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 1 B) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$ E) $\frac{1}{4}$

14. $\int_{0}^{1}\left(\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n(n+1)}\right)dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) ln4 B) 1–ln2 C) –ln2

D) 2–ln2 E) 1+ln2

15. $\int_{0}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 2–2ln3 B) 4–2ln3 C) ln9

D) $\frac{\ln 3}{2}$ E) 16

16. $\int \frac{10}{2x^2-x-3}dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $2\ln\left|\frac{2x-3}{x+1}\right|+c$ B) $\ln\left|\frac{4x-6}{2x+2}\right|+c$

C) $\ln\left|\frac{2x-3}{x+1}\right|+c$ D) $2\ln\left|\frac{x+1}{2x-3}\right|+c$

E) $4\ln|2x-3|-2\ln|x+1|+c$

17. $\int \frac{x^2-2x+4}{x^2-2x+5}dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{x^2-x+1}{x-1}+c$

B) $x+\frac{1}{2}\ln|x-1|+c$

C) $x-\frac{1}{2}\ln|x-1|+c$

D) $x+\frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2}+c$

E) $x-\frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2}+c$

18. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin x)}{\cos^3 x}$ **integralinin değeri kaçtır?**

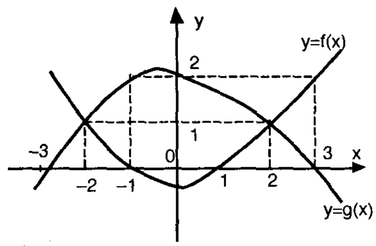
A) –1 B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) $\sqrt{3}$

19. $\displaystyle\int_0^1 \arctan x\,dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{\pi}{2}+1$ B) $\frac{\pi}{4}+\ln 2$ C) $\frac{3\pi}{4}-\ln 2$

D) $\frac{\pi}{2}-\ln\sqrt{2}$ E) $\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}$

20.



Şekilde f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre,

$\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,g'(x)\,dx - \int_{3}^{-2} f'(x)\,.\,g(x)\,dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

21. $f(x) = ax + 3$ ve

$\displaystyle\int_4^6 \left[\frac{d}{dx}\left(f^{-1}(x)\right)\right]dx = \frac{1}{4}$ ise, **a kaçtır?**

A) 16 B) 12 C) 8 D) 6 E) 4

22. $\displaystyle\int_a^b f(2a+b-x)\,dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\displaystyle\int_{2a}^{a+b} f(t)\,dt$ B) $\displaystyle -\int_{b-a}^{2a} f(t)\,dt$

C) $\displaystyle\int_{a}^{2a-b} f(x)\,dx$ D) $\displaystyle -\int_{a-b}^{a} f(y)dy$

E) $\displaystyle\int_{2a}^{a-b} f(-x)dx$

23. $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \sqrt{9-x^2}\,dx$ **hangisine eşittir?**

A) $\frac{9}{4}$ B) $\frac{9\pi}{2}$ C) $\frac{9(\pi+1)}{4}$

D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{9\pi}{8}+\frac{9}{4}$

24. $y = ax^2$ parabolü, bu parabolun 1 apsisli noktasındaki teğeti ve x ekseninin sınırladığı alanının $\frac{1}{4}$ birimkare olması için, **pozitif a gerçel sayısı ne olmalıdır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

25. $f(x) = |ax|$ ve $g(x) = ax^2$ fonksiyonlarının grafiklerinin sınırladığı düzlemsel bölgenin alanı $\frac{1}{3}$br^2 olduğuna göre **a nın pozitif değeri aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

İNTEGRAL

TEST 9

1. $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int \cos x dx\right]$ **integralinin değeri nedir?**

A) cosx B) –cosx + c C) sinx + c
D) –sinx E) sinx

2. $\displaystyle\int d(2x^3 - \sin x)$ **integralinin değeri nedir?**

A) $2x^3 - \sin x$ B) $2x^3 - \sin x + c$
C) $\dfrac{x^4}{2} - \cos x + c$ D) $\dfrac{x^4}{2} - \cos x$
E) $\dfrac{x^4}{2} + \cos x$

3. f fonksiyonu içih $\displaystyle\int \frac{f(x)}{x}dx = x^2 + 3x + C$ ise **f(x) hangisine eşittir?**

A) $x^2 + 3x$ B) $x + 3$ C) $x^2 + 2x$
D) $x^2 + 2x + 1$ E) $2x^2 + 3x$

4. $x.f'(x) - 2x = 1$ ve $f(1) = 2$ ise **f(e) aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 0 B) 2e C) 2e – 1
D) 3e E) 2e + 1

5. f fonksiyonunun belirttiği eğrinin apsisi x olan noktasındaki teğetin eğimi 2x – 3 dür. f(1) = –2 ise **f(3) aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) –1 B) 0 C) 3 D) 4 E) 5

6. $\displaystyle\int_0^1 (3x+5)^3 dx$ **integralinin eşiti kaçtır?**

A) $\dfrac{625}{4}$ B) $\dfrac{1157}{4}$ C) $\dfrac{103}{4}$
D) 25 E) 5

7. $\displaystyle\int_0^1 f(x+2)dx = \int_a^b f(x)dx$ olduğun göre, **(a + b) toplamı kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

8. $f(x) = \displaystyle\int_{\cos x}^{0} \frac{dt}{2+t}$ ise **f′(x) in eşiti nedir?**

A) $\dfrac{1}{2+\cos x}$ B) $\dfrac{1}{2-\cos x}$
C) $\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$ D) $\dfrac{-\sin x}{2+\cos x}$
E) $\dfrac{-\cos x}{2+\sin x}$

9. $f(t) = \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{-t}^{t^2} x dx$ olduğuna göre, **f(3) kaçtır?**

A) 51 B) 35 C) 23 D) 17 E) 7

10. f: R→R ye sürekli bir fonksiyon olsun.
f(1) = 0 ve her x ∈ (1, + ∞) için f(x) < 0 olduğuna göre, $\displaystyle\int_{-1}^{3} 2x.\operatorname{sgn} f(x) dx$ **hangisine eşittir?**

A) 1 B) –2 C) –5 D) –8 E) –9

11. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12. $\displaystyle\int_0^{\pi} |\cos x| dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir.**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

13. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sgn}(\tan x) dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 0 B) $\dfrac{\pi}{3}$ C) $\dfrac{\pi}{6}$ D) $\dfrac{\pi}{12}$ E) $\dfrac{2\pi}{3}$

14. $\displaystyle\int_2^1 [\![\frac{x}{2}]\!] \operatorname{sgn} x \cdot dx$ **ifadesinin değeri nedir?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

15. f(x) = sinx olduğuna göre, $\int_0^1 d\left[f^{-1}(x)\right]$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{2}$

16. $\int_0^1 5^x dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\log_5 e^2$ B) $4\log_5 e$ C) $\ln 5$
D) $\log_5 e$ E) $\log_5 e^3$

17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) 1

18. $\int_1^e x\ln x dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $-e^2$ B) e^2+1 C) $\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$
D) e^3+3 E) e^3+9

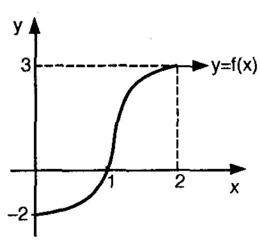
19. $\int \frac{x+1}{x^2+4x-5}$ **integralinin eşiti nedir?**

A) $\frac{1}{3}\ln|x-1|+C$
B) $\frac{2}{3}\ln[(x-1)(5x+5)]+C$
C) $\ln[(x-1)5x+5^2]+C$
D) $\ln[(x-1)(x+5)]+C$
E) $\frac{1}{3}\ln\left[(x+5)^2\cdot(x-1)\right]+C$

20. $\int_0^{\pi} x\cos x dx$ **integralinin eşiti kaçtır?**

A) –2 B) 0 C) π D) 2π E) 1

21. f fonksiyonunun şekildeki grafiği (0,–2), (1,0) ve (2,3) noktalarından geçtiğine göre,



$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f'(\sin x)dx$
aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) –2 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

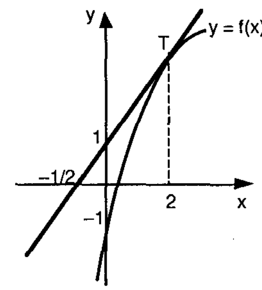
22. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\pi}{x^2}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir.**

A) –3 B) –2 C) 0 D) 1 E) 2

23. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2-\tan^2 x\right)dx$ **integralinin değeri nedir?**

A) 0 B) π C) 2π–1
D) $\frac{3\pi}{4}-1$ E) $4\pi-2$

24. Şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği ile T noktasındaki teğeti verilmiştir.



$\int_0^2 x\cdot f''(x)dx$ **integralinin değeri nedir?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

25. $y^2 = x$ **eğrisi ile** $y=\frac{x}{2}$ **doğrusu arasındaki kalan bölgenin alanı kaç br² dir?**

A) $\frac{2}{3}$ B) 1 C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{8}{3}$

26. $y = x^3$, $x = 0$ ve $y = 2$ doğruları ile sınırlı alan $y = m$ doğrusu ile eşit iki parçaya bölündüğüne göre, **m nedir?**

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt[3]{2}$
D) $\sqrt[4]{2}$ E) $\sqrt[4]{8}$

27. $f(x)=\left|3x^2-12\right|$ olduğuna göre, **f fonksiyonunun eğrisi ile x ekseninin sınırladığı bölgenin alanı kaç birim karedir?**

A) 12 B) 18 C) 24 D) 30 E) 32

İNTEGRAL

TEST 10

1. $f(x) = 4x^3 - 2x$ olduğuna göre,

$\int_0^2 d(f(x))$ **integralinin eşiti kaçtır?**

A) –28 B) 0 C) 1 D) 16 E) 28

2. $\int \frac{1}{2}\sin 2x.\cos x dx$ **integralinin değeri nedir?**

A) $\frac{\cos^2 x}{3} + C$ B) $-\frac{\cos^3 x}{3} + C$

C) $\frac{\sin^3 x}{3} + C$ D) $-\frac{\sin^3 x}{3} + C$

E) $\cos^3 x + \sin^3 x + C$

3. $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{1+\sin 2x}\,dx$ **değeri nedir?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

4. $\int_x^{x^2+1} (3t^2 + 4)dt$ ise **f′(1) kaçtır?**

A) 16 B) 18 C) 25 D) 27 E) 30

5. $\int_{-1}^{4} 4x(x+1)^3 dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 1875 B) 1925 C) 1955

D) 1985 E)1991

6. $\int_0^4 (|x-2| + |x-3|)dx$ **integralinin eşiti kaçtır?**

A) 12 B) 9 C) 8 D) 5 E) 4

7. $\int_0^8 [\![x]\!]dx$ **integralinin eşiti kaçtır?**

A) 16 B) 18 C) 21 D) 28 E) 36

8. $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \text{sgn}(\log x)dx$ **integralinin eşiti kaçtır?**

A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

9. $\int_2^3 x\cdot(x-1)^5\cdot dx$ integralinde, $t = x - 1$ dönüşümü yapılırsa **aşağıdaki integralerden hangisi elde edilir?**

A) $\int_1^2 t^5\cdot dt$ B) $\int_1^2 (t^6 + t)\cdot dt$

C) $\int_1^2 (t^6 + t^5)\cdot dt$ D) $\int_3^4 (t^6 + t)\cdot dt$

E) $\int_3^4 (t^6 - t)\cdot dt$

10. $\int_1^8 \frac{1-x}{1+x}dx$ integralinde, $t = \sqrt[3]{x}$ dönüşümü yapılırsa **aşağıdaki integrallerden hangisi elde edilir?**

A) $\int_1^2 \frac{t^2 - t^5}{1+t^3}\cdot dt$ B) $\int_1^2 \frac{1-t^3}{1+t^3}\cdot dt$

C) $3\int_1^2 \frac{t^2 - t^5}{1+t^3}\cdot dt$ D) $2\int_1^2 \frac{1+t^3}{1-t^3}\cdot dx$

E) $\int_1^2 \frac{t^5 - t^2}{t^3+1}\cdot dt$

11. $\int_{-1}^{1} 2^{[\![x]\!]}dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) –1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) 1 E) $\frac{3}{2}$

12. $\int_{-1}^{1} \frac{\cos x}{x^3 + 4x}dx$ **değeri nedir?**

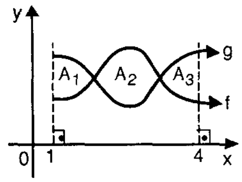
A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

13. $\int_0^{\pi} x \cdot \sin\frac{x}{2}dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 0 B) 4 C) 2π

D) $4+2\pi$ E) $4-2\pi$

14. Şekilde f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



$A_1 = 1$ br^2,

$A_2 = 4$ br^2 ve

$A_3 = 2$ br^2 ise

$\int_1^4 [f(x)-g(x)]dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

15. $f(x)=\int_2^5 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$ ise **f′(1) aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) -1 C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

16. $\int \frac{4}{x^2-1}dx$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\ln\frac{|x^2-1|}{x^2+1}+C$ B) $2\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C$

C) $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+C$ D) $\ln(x^2-1)^2+C$

E) $\ln\frac{2}{|x^2-1|}+C$

17. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^t dt}{e^{2t}+3e^t+2}$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

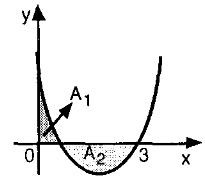
A) $\ln\frac{9}{8}$ B) 1 C) $\ln\frac{4}{5}$ D) ln2 E) ln3

18. f(x)= e^x eğrisi, y-ekseni ve y= e doğrusu ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin **hacmi kaç π br^3 tür?**

A) e–2 B) 3e–4 C) e+2

D) 4e–3 E) 2e+3

19. Şekildeki parabolün denklemi,



$y = x^2 + 2ax + p$ dir.

Parabol (3,0) noktasından geçtiğine göre, A_1 ve A_2 ile gösterilen alanlar eşit ise **p + a nedir?**

A) –1 B) 2 C) 0 D) 1 E) 2

20. $y = [\![\frac{x}{4}]\!]$ fonksiyonunun grafiği, x ekseni, $x = 76$ ve $x = 80$ doğruları ile **sınırlı bölgenin alanı kaç br^2 dir?**

A) 70 B) 76 C) 80 D) 84 E) 92

21. $\int_0^{3\sqrt{2}} \left(\sqrt{36-x^2}-x\right)dx$ **değeri nedir?**

A) $\frac{5\pi}{2}$ B) 3π C) $\frac{7\pi}{2}$ D) 4π E) $\frac{9\pi}{2}$

22. $|y| = -x^2+2x$ **eğrisinin x ekseni ile sınırladığı bölgenin alanı kaç birim karedir?**

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) 2 D) $\frac{8}{3}$ E) $\frac{16}{3}$

23. $x^2 + 2y^2 = 2$ eğrisinin Ox ekseni, $x = 0$ ve $x = 1$ doğruları arasında kalan bölgesinin Ox ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{5\pi}{6}$ D) $\frac{4\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{3}$

İNTEGRAL

TEST 11

1. $\int_a^b f(x).dx \neq 0$ ise $\dfrac{\int_a^b f(x)dx - \int_b^a f(x)dx}{\int_{a-2}^{b-2} f(x+2)dx - \int_b^a 2f(x)dx}$

oranı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) –3 B) –2 C) 0 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

2. $\int x\,(x^2+1)^4\,.\,dx = a(x^2+1)^5 + c$ ise "a"**nın değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{20}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{5}{2}$

3. Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun $(-1, 4)$ noktasındaki teğetinin eğimi 2 dir. $f''(x) = 12x - 4$ olduğuna göre **f(0) ın değeri kaçtır?**

A) –4 B) –2 C) 0 D) 2 E) 4

4. $\int_0^4 (1-x)\sqrt{x}\,dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{-112}{15}$ B) $\frac{-64}{5}$ C) $\frac{-16}{3}$

D) $\frac{16}{3}$ E) $\frac{64}{5}$

5. $\int \dfrac{x^2 \ln(2x^3+1)}{2x^3+1}\,dx$ nin **integralinin sonucu nedir?**

A) $\dfrac{[\ln(2x^3+1)]^2}{6} + c$

B) $\dfrac{[\ln(2x^3+1)]^2}{12} + c$

C) $\ln(2x^3+1)^2 + c$

D) $\frac{1}{3}\ln(2x^3+1) + c$

E) $\frac{1}{18}\ln(2x^3+1)$

6. $\int_1^e \left(e^x.\ln x + \frac{1}{x}e^x\right)dx$

integralinin değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) e^e

D) $e^e - 1$ E) $e - 1$

7. $\int_0^{\ln 8} \left[\dfrac{d}{dy}\int_1^{2y} e^{2x}.dx\right]dy$

integralinin sonucu kaçtır?

A) 2^6 B) $\dfrac{2^{12}-1}{2}$ C) 2^{11}

D) 2^{12} E) $2^{12}+1$

8. $\int_{4}^{10} \frac{x+4}{x-2}\,dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $6(1+\ln 4)$ B) $6(1+\ln 2)$

C) $12(1+\ln 4)$ D) $12(1+\ln 2)$

E) $8(1+\ln 2)$

9. $\int_{0}^{1} \frac{ax^2dx}{\sqrt{1-x^6}} = \frac{5\pi}{6}$ ise "a" **nın değeri kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10. $C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ olmak üzere $\int \frac{C(n-1,2)}{C(n-1,3)}\,dn$

aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\ln|n| - 3 + c$ B) $\ln|n-3| + c$

C) $3\ln|n-3| + c$ D) $2\ln|n-3| + c$

E) $\ln|n^3| + c$

11. $\int_{0}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\text{Sin}2x.dx}{\sqrt{1-\text{Sin}^4x}}$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{3}$

12. $f(x) = \begin{cases} \text{Sgn}(x-3), & x < 4 \\ \left[\left|\frac{1}{3}.x\right|\right], & x \geq 4 \end{cases}$ ise $\int_{1}^{9} f(x)\,dx$ **nedir?**

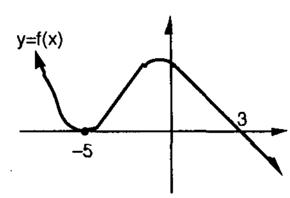
A) −2 B) 1 C) 2 D) 6 E) 7

13. $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} \text{Sin}8x\,(2\cos^2 2x-1)\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

A) $\frac{-1}{48}$ B) $\frac{-1}{8}$ C) $\frac{-1}{6}$ D) $\frac{1}{48}$ E) $\frac{1}{6}$

14. y = f(x) fonksiyonunun grafiği şekildeki gibidir.



Buna göre

$\int_{-2}^{3} |x - \text{Sgn}\,f(x)|.dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{9}{2}$ B) 5 C) $\frac{11}{2}$ D) $\frac{13}{2}$ E) $\frac{15}{2}$

15. $\int_{8}^{64} \cos\left(\frac{\pi\left[\left|\sqrt[3]{x}\right|\right]}{2}\right) dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) −35 B) −27 C) −19 D) 19 E) 35

16. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1-\sin x+\cos x}{\cos x+1}\right).dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

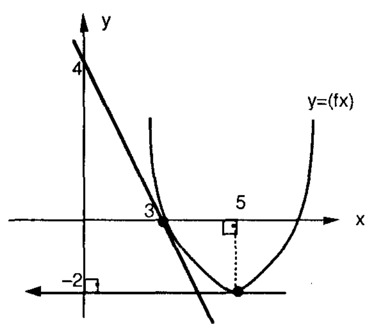
A) 0 B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\ln\frac{3}{2}$

D) $\frac{\pi}{3}.\ln\frac{3}{2}$ E) $\frac{\pi}{3}+\ln\frac{3}{4}$

17. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,.\,dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{15}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{8}{15}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

18.



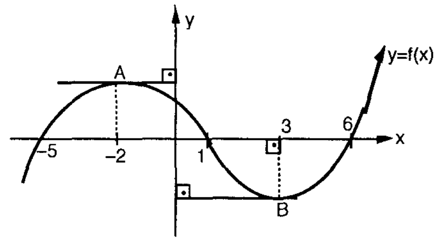
Yandaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile $x = 3$ ve $x = 5$ noktalarındaki teğetleri verilmiştir. Buna göre $\int_{3}^{5} f''(x)\,.\,dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{-4}{3}$ B) $\frac{-3}{5}$ C) $\frac{-3}{4}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{3}$

19. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin}5x\,.\,\cos 3x\,dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{-1}{16}$ B) $\frac{-1}{8}$ C) $\frac{-3}{8}$ D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{1}{4}$

20.

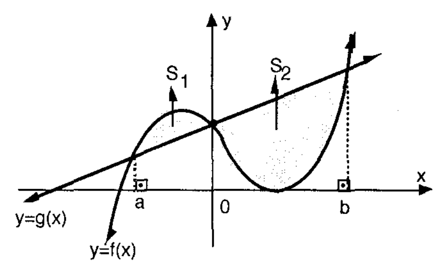


A ve B noktaları şekilde grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun yerel extremum noktalarıdır.

$\int_{-5}^{6} \text{Sgn}\,(f'(x))\,dx = a + 2$ ise **a nın değeri kaçtır?**

A) −3 B) −1 C) 3 D) 7 E) 9

21.

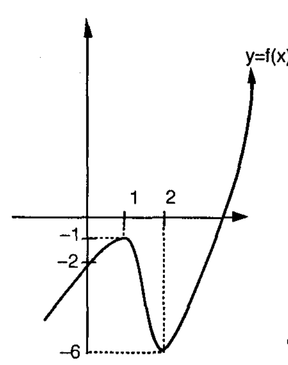


$y = f(x)$ ve $y = g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri şekildeki gibi verilmiştir. **S_1 ve S_2 taralı bölgelerin alanları olup $S_1 = 5$ br^2**

$\int_{a}^{b} [f(x)-g(x)] = -13$ ise **S_2 alanı kaç br^2 dir?**

A) 8 B) 15 C) 18 D) 26 E) 65

22. Şekilde grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için $\int_{1}^{e} f'(\ln x^2)\,.\,\frac{dx}{x}$ **integralinin değeri kaçtır?**



A) −8 B) −6 C) −4 D) −2 E) −1

LİNEER CEBİR

BÖLÜM 5

MATRİSLER VE DETERMİNANTLAR

MATRİS KAVRAMI

Bir fabrikada üretilen beş farklı ürün, dört farklı biçimde üretilebiliyorsa, ürünlerin miktarlarını;

$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 & k_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 & k_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 & k_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 & k_4 \end{bmatrix}$ tablosu ile fiyatlarını da $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix}$ tablosu ile gösterirsek, bu gösterimler sadelik ve kullanışlılık yönünden oldukça kolaylık sağlar.

Bu şekilde sayısal değerlerden oluşan dikdörtgen biçimindeki tablolara **matris** adı verilir.

Lineer denklem sistemlerinde katsayılar aynı sırada ve alt alta yazıldığında yukarıdaki tablolar elde edilir. Lineer denklem sisteminin kökleri bu katsayılarla ilişkilidir. Lineer denklem sistemlerini, matrisler yardımıyla oluşturabilir ve de çözebiliriz. Ayrıca matrisler bilgisayar programlarında kullanılmakta ve lineer denklem sistemlerinin çözümleri, kısa sürede bilgisayarlarda alınabilmektedir.

Şimdi matris kavramını daha ayrıntılı inceleyelim.

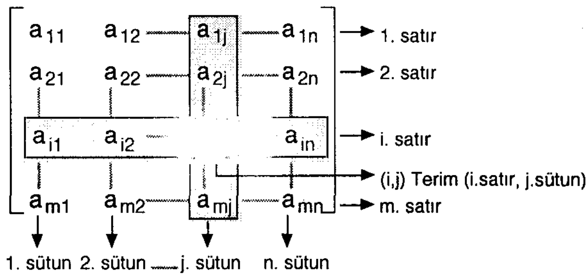
TANIM: i, j sayma sayıları $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ a_{ij} reel sayı olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

biçimindeki tabloya reel sayı matrisi denir. Burada m sayısına matrisin satır sayısı, n sayısına da matrisin sütun (kolon) sayısı denir. m tane satır ve n tane sütundan oluşan bir matrise mxn türünden bir matris adı verilir.

Matrisler genellikle **[ ]**, **( )** veya **‖ ‖** sembolleri arasına elemanları yazılarak A, B, C, ... gibi büyük harflerle gösterilir. (i, j) inci terimi a_{ij} olan mxn türündeki A reel sayı matrisi $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{mxn}$ şeklinde gösterilir.

Bir matriste i. satırla j. sütunun kesiştiği yerdeki a_{ij} sayısına matrisin **(i,j). terimi** adı verilir.



UYARI: $A = \left[a_{ij}\right]_{mxn}$ biçimindeki bir matrisin 1xn türündeki

$$A_1 = \left[a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n}\right],\ A_2 = \left[a_{21}\ a_{22} \cdots a_{2n}\right], \cdots, A_m = \left[a_{m1}\ a_{m2} \cdots a_{mn}\right]$$

matrislerine A matrisinin **satır matrisleri** ya da **satır vektörleri,**

mx1 türündeki

$$B_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots\ldots, B_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrislerine de **sütun matrisleri** ya da **sütun vektörleri** denir.

ÖRNEK

$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ **A matrisinin elemanlarını tanımlayınız.**

ÇÖZÜM

A matrisi 2 x 3 türünden bir matristir. Bu matris 2 satır, 3 sütun ve 2.3 = 6 tane elemandan oluşmuştur. Bu matriste

1. satır, 1. sütundaki yani (1,1). terim ; $a_{11} = -1$
1. satır, 2. sütundaki yani (1,2). terim ; $a_{12} = 1$
1. satır, 3. sütundaki yani (1,3). terim ; $a_{13} = 3$
2. satır, 1. sütundaki yani (2,1). terim ; $a_{21} = 4$
2. satır, 2. sütundaki yani (2,2). terim ; $a_{22} = 2$
2. satır, 3. sütundaki yani (2,3). terim ; $a_{23} = 5$

ÖRNEK

$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin **türünü belirtiniz ve a_{21}, a_{32}, a_{33}, a_{31} ve a_{12} elemanlarını bulunuz.**

ÇÖZÜM

A matrisi 3 satır ve 3 sütundan oluşmuş bir matris olduğundan $A = \left[a_{ij}\right]_{3x3}$ yani 3 x 3 türünden bir matristir.

a_{21} elemanı 2. satır 1. sütundaki eleman $a_{21} = 3$
a_{32} elemanı 3. satır 2. sütundaki eleman $a_{32} = -1$
a_{33} elemanı 3. satır 3. sütundaki eleman $a_{33} = 3$
a_{31} elemanı 3. satır 1. sütundaki eleman $a_{31} = -2$
a_{12} elemanı 1. satır 2. sütundaki eleman $a_{12} = -2$

olarak bulunur.

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}3 & 5 & 6 & -1\\ -4 & 3 & 4 & 2\\ 2 & 1 & -3 & 1\end{bmatrix}$ **A matrisinin türünü belirtiniz. Satır ve sütun matrislerini bulunuz.**

ÇÖZÜM A matrisi 3 satır ve 4 sütundan oluştuğundan $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 4}$ yani 3 x 4 türünden bir matristir.

Satır matrisleri; $A_1=\begin{bmatrix}3 & 5 & 6 & -1\end{bmatrix}$ $A_2=\begin{bmatrix}-4 & 3 & 4 & 2\end{bmatrix}$ $A_3=\begin{bmatrix}2 & 1 & -3 & 1\end{bmatrix}$

Sütun matrisleri; $B_1=\begin{bmatrix}3\\ -4\\ 2\end{bmatrix}$ $B_2=\begin{bmatrix}5\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$ $B_3=\begin{bmatrix}6\\ 4\\ -3\end{bmatrix}$ $B_4=\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$ olarak bulunur.

ÖRNEK $A=[3]$ $B=[3\ \ 5]$ $C=[3\ \ 5\ \ 2]$ **matrislerinin türünü belirtiniz.**

ÇÖZÜM

$A=[3]$ 1x1 türünden bir matristir

$B=[3\ \ 5]$ 1x2 türünden bir matristir

$C=[3\ \ 5\ \ 2]$ 1x3 türünden bir matristir.

Ayrıca A, B ve C matrisleri satır matrisleridir.

İKİ MATRİSİN EŞİTLİĞİ

İki matrisin eşit olabilmesi için aynı türden olmaları zorunludur. Aynı türden iki matrisin eşit olabilmesi için gerek ve yeter koşul karşılıklı elemanlarının eşit olmasıdır. Matrislerin eşitliği matematiksel olarak aşağıdaki biçimde tanımlanabilir.

TANIM: m x n türünden $A=\left[a_{ij}\right]_{mxn}$ ve $B=\left[b_{ij}\right]_{mxn}$ matrisleri verilmiş olsun. Her i, j∈R için $a_{ij}=b_{ij}$ ise A matrisi B matrisine eşittir denir ve A = B ya da $\left[a_{ij}\right]_{mxn}=\left[b_{ij}\right]_{mxn}$ ile gösterilir.

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ **matrisleri eşitmidir?**

ÇÖZÜM A ve B matrisleri için $a_{22}\neq b_{22}$ $(3\neq 1)$ olduğundan A ve B matrisleri birbirine eşit değildir.

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ **matrisleri eşitmidir?**

ÇÖZÜM A ve B matrisleri aynı türden olmadığından eşit değildir.

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}4 & 3 & -1\\ 2 & a & -3\\ 4 & 5 & 2\\ b & -5 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}c & 3 & -1\\ 2 & 1 & -3\\ 4 & d & 2\\ -3 & -5 & -2\end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. A = B olduğuna göre **a + b + c + d toplamını bulunuz.**

ÇÖZÜM $\begin{bmatrix}4 & 3 & -1\\ 2 & a & -3\\ 4 & 5 & 2\\ b & -5 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c & 3 & -1\\ 2 & 1 & -3\\ 4 & d & 2\\ -3 & -5 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow a=1,\ b=-3,\ c=4,\ d=5$ olduğundan;

$a+b+c+d=7$ bulunur.

ÖRNEK

$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -x+2y & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3x-y \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. A = B ise **x.y çarpımı kaçtır?**

ÇÖZÜM

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -x+2y & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3x-y \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} -x+2y=4 \\ 3x-y=8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} -x+2y=4 \\ +\ 6x-2y=16 \\ \hline 5x=20 \end{array} \Rightarrow x=4$$

$y = 4$ bulunur.

$x \,.\, y = 4 \,.\, 4 = 16$ olur.

ÖRNEK

$A = \begin{bmatrix} -4 & \dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_0^1 x^2dx\right] \\ \log_{\frac{1}{2}} 2^x & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & x^2-1 \\ y & \text{sgn}x \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

A = B ise **x + y toplamı kaçtır?**

ÇÖZÜM

$\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_0^1 x^2dx\right] = x^2-1 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x = \pm 1$

$\text{sgn}x = -1 \Rightarrow x < 0$ olduğundan $x = -1$ olur.

$\log_{\frac{1}{2}} 2^x = y \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 2^{-1} = y$

$\Rightarrow y = 1$

$x + y = -1 + 1 = 0$ bulunur.

ÖRNEK

$A = \begin{bmatrix} [\![\log_3(x-1)]\!] & 4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

A = B olduğuna göre, **eşitliği sağlayan x değerlerinin kümesi nedir?**

ÇÖZÜM

$[\![\log_3(x-1)]\!] = 2 \Rightarrow 2 \le \log_3(x-1) < 3$

$\log_3 3^2 \le \log_3(x-1) < \log_3 3^3$

$9 \le x-1 < 27$

$10 \le x < 28 \Rightarrow x \in [10, 28)$ bulunur.

ÖRNEK

$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ \text{sgn}(x^2-4) & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ \text{sgn}(x^2) & -1 \end{bmatrix}$ ise **$x \in \mathbb{R}$ lerin kümesi nedir?**

ÇÖZÜM

$\text{sgn}(x^2-4) = \text{sgn}(x^2) \Rightarrow \text{sgn}(x^2-4) = 1$

$\Rightarrow x^2-4 > 0$

$\Rightarrow x^2 > 4$

$|x| > 2 \Rightarrow x > 2$ veya $x < -2$

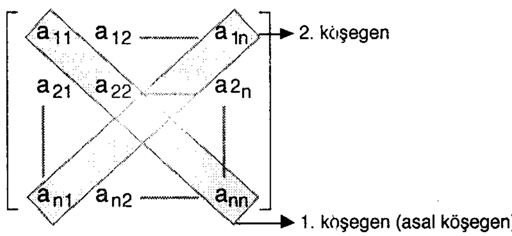
$Ç = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ bulunur.

MATRİS ÇEŞİTLERİ

KARE MATRİS

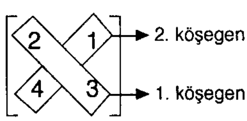
Satır sayısı sütun sayısına eşit olan matrislerdir. n x n türündeki $\left[a_{ij}\right]_{nxn}$ matrisine **n inci sıradan (mertebeden) kare matris** denir.

$\left[a_{ij}\right]_{nxn}$ kare matrisindeki a_{11}, a_{22}, a_{33} ... a_{nn} terimlerinin oluşturduğu köşegene **1. köşegen** (asal köşegen), a_{n1}, $a_{(n-1)2}$, ... a_{1n} terimlerinin oluşturduğu köşegene **2. köşegen** denir.



Örneğin;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$ matrisi 2. mertebeden bir kare matristir.



ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **matrisinin türünü belirtiniz ve 1. köşegen üzerindeki elemanların toplamını bulunuz**

ÇÖZÜM A matrisi 3 satır ve 3 sütundan oluştuğu için 3. mertebeden kare matristir.

1. köşegen üzerindeki elemanlar –1, 3, 1 dir.

Bunların toplamı: $-1 + 3 + 1 = 3$ bulunur.

SIFIR MATRİSİ

Bütün elemanları sıfır olan matrise **sıfır matrisi** denir. m x n türünden sıfır matrisi $\mathbf{0}_{mxn} = [\mathbf{0}]_{mxn}$ ile gösterilir.

Örneğin:

$$0_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 2x3 türünden sıfır matrisi

$$0_{3x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 3x3 türünden sıfır matrisi

$$0_{1x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 1x3 türünden sıfır matrisi

SİMETRİK MATRİS

Bir kare matriste, tüm elemanlar asal köşegene göre simetrik ise matrise **simetrik matris** denir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Örneğin: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi 3. mertebeden simetrik matristir.

$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ -5 & -6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi 4. mertebeden simetrik matristir.

TERS SİMETRİK MATRİS (ANTİ SİMETRİK MATRİS)

Bir kare matrisin 1. köşegen üzerindeki elemanları sıfır, ve 1. köşegene göre simetrik elemanların toplamı sıfır ise matrise **ters simetrik matris** denir.

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} a_{12} &= -a_{21} \\ a_{13} &= -a_{31} \\ a_{23} &= -a_{32} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{1n} &= -a_{n1} \end{aligned}$$ dir.

Örneğin: $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ 2. mertebeden ters simetrik matristir.

$B = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 3. mertebeden ters simetrik matristir.

KÖŞEGEN MATRİS (DİAGONAL MATRİS)

Bir kare matriste, 1. köşegen dışında kalan tüm ögeler sıfır ise bu matrise **köşegen matris** denir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Örneğin: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ 2. mertebeden köşegen matris

$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 3. mertebeden köşegen matrisdir.

SKALER MATRİS

Bir köşegen matriste 1. köşegen üzerindeki tüm elemanlar aynı ise matrise **skaler matris** denir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & a_{11} \end{bmatrix}$$

Örneğin: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ 2. mertebeden skaler matris.

$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 3. mertebeden skaler matrisdir.

ÜÇGEN MATRİS

Bir kare matriste 1. köşegenin üstünde ya da altında kalan tüm elemanlar sıfır ise matrise **üçgen matris** denir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ veya } \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0\cdots\cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0\cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Örneğin: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ matrisleri 3. mertebeden üçgen matrislerdir.

MATRİSLERDE TOPLAMA İŞLEMİ

m x n türünden iki matris $A = \left[a_{ij}\right]_{mxn}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{mxn}$ olsun. Bu iki matrisin aynı numaralı elemanlarını toplayarak oluşturulan matrise **A ve B matrislerinin toplamı** denir ve $\mathbf{A + B} = \left[\mathbf{a_{ij}}\right] + \left[\mathbf{b_{ij}}\right] = \left[\mathbf{a_{ij} + b_{ij}}\right]$ ile gösterilir.

UYARI: İki matrisin toplanabilmesi için matrislerin aynı türden olması gerekir.

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ ise **A + B nedir?**

ÇÖZÜM $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 3-3 \\ 4-4 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ bulunur.

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ise **A + B nedir?**

ÇÖZÜM $A + B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & -1+4 & 3+6 \\ 4+1 & -2+3 & 5+7 \\ 4-2 & 3+1 & 2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ bulunur.

TANIM: $A=\left[a_{ij}\right]_{mxn}$ **matrisi verilmiş olsun.** $-A=\left[-a_{ij}\right]_{mxn}$ **matrisine A matrisinin toplamaya göre tersi denir.**
$A+(-A)=(-A)+A=0_{mxn}$ **dir.**

$$-A=\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ise **–A matrisini bulunuz.**

ÇÖZÜM –A matrisi A matrisinin her elemanı –1 ile çarpılarak bulunur.

$-A=\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$ olur.

TEOREM: $A=\left[a_{ij}\right]_{mxn}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{mxn}$ $-A=\left[-a_{ij}\right]_{mxn}$ **ve** $C=\left[c_{ij}\right]_{mxn}$ **matrisleri verilmiş olsun.**

1. **Matrislerde toplama işlemi kapalılık özelliğine sahiptir.**
2. **A + (B + C) = (A + B) + C (Birleşme özelliği)**
3. **A + 0 = 0 + A = A (Toplamaya göre etkisiz birim matris sıfır matrisidir.)**
4. **A + (–A) = (–A) + A = 0 (–A, A matrisinin toplamaya göre tersidir.)**
5. **A + B = B + A (Değişme özelliği)**

dir.

İSPAT: 1. $A+B=\left[a_{ij}\right]_{mxn}+\left[b_{ij}\right]_{mxn}=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{mxn}$

olduğundan A ve B matrislerinin toplamından mxn türünden bir matris elde edilir. Aynı türden matrislerin oluşturduğu küme toplama işlemine göre kapalılık özelliğine sahiptir.

2. $A+(B+C)=\left[a_{ij}\right]_{mxn}+\left(\left[b_{ij}\right]_{mxn}+\left[c_{ij}\right]_{mxn}\right)=\left[a_{ij}\right]_{mxn}+\left(\left[b_{ij}+c_{ij}\right]_{mxn}\right)$

$=\left[a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}\right]_{mxn}=\left[\left(a_{ij}+b_{ij}\right)+c_{ij}\right]_{mxn}$

$=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{mxn}+\left[c_{ij}\right]_{mxn}=(A+B)+C$

bulunur. Toplama işlemine göre mxn türünden matrislerin oluşturduğu küme birleşme özelliğine sahiptir.

3. $A+0=\left[a_{ij}\right]_{mxn}+\left[0\right]_{mxn}$ $\qquad$ $0+A=\left[0\right]_{mxn}+\left[a_{ij}\right]_{mxn}$

$=\left[a_{ij}+0\right]_{mxn}=\left[a_{ij}\right]_{mxn}$ $\qquad$ $=\left[0+a_{ij}\right]_{mxn}=\left[a_{ij}\right]_{mxn}$

$A+0=A$ $\qquad$ $0+A=A$

bulunur. Toplama işleminin etkisiz elemanı sıfır matrisidir.

4. $A+(-A)=\left[a_{ij}\right]_{mxn}+\left[-a_{ij}\right]_{mxn}$

$=\left[a_{ij}-a_{ij}\right]_{mxn}=\left[0\right]_{mxn}$

$A+(-A)=0$

$(-A)+A=\left[-a_{ij}\right]_{mxn}+\left[a_{ij}\right]_{mxn}$

$=\left[-a_{ij}+a_{ij}\right]_{mxn}=\left[0\right]_{mxn}$

$(-A)+A=0$

bulunur. Toplama işlemine göre mxn türünden matrislerin oluşturduğu kümede her matrisin tersi vardır.

5. $A+B=\left[a_{ij}\right]_{mxn}+\left[b_{ij}\right]_{mxn}=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{mxn}=\left[b_{ij}+a_{ij}\right]_{mxn}=\left[b_{ij}\right]_{mxn}+\left[a_{ij}\right]_{mxn}$

$A+B=B+A$

bulunur. Toplama işlemine göre mxn türünden matrislerin oluşturduğu küme değişme özelliğine sahiptir.

Sonuç: Aynı türden matrislerin oluşturduğu küme toplama işlemine göre değişmeli gruptur. (Abel grubudur.)

ÖRNEK

$\begin{bmatrix} 2x+1 \\ -x \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3y \\ 4y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$ ise **x + y toplamı kaçtır?**

ÇÖZÜM

$\begin{bmatrix} 2x+1 \\ -x \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3y \\ 4y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x+1-3y \\ -x+4y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$ matrislerin eşitliğinden

$2x+1-3y=9$ ve $-x+4y=6$

Denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse $x=10$, $y=4$ bulunur.

$x+y=10+4=14$ bulunur.

ÖRNEK

$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri için **A + B ve A – B matrislerini hasaplayınız.**

ÇÖZÜM

A matrisi 3x3 türünden, B matrisi 2x3 türündendir. A ve B ayrı türden matrisler olduğundan A + B ve A – B hesaplanamaz.

ÖRNEK

$A=\begin{bmatrix} \sqrt{75} & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -\sqrt{12} & 2 \\ 0 & \log_2 y \end{bmatrix}$ ve $C=\begin{bmatrix} 3^x & 3 \\ 5 & -\log_{\frac{1}{2}} 8 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

A + B = C ise x.y nedir?

ÇÖZÜM

$A+B=\begin{bmatrix} \sqrt{75}-\sqrt{12} & 3 \\ 5 & 2+\log_2 y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3^x & 3 \\ 5 & -\log_{\frac{1}{2}} 8 \end{bmatrix}$ matrislerin eşitliğinden

$\sqrt{75}-\sqrt{12}=3^x \Rightarrow 5\sqrt{3}-2\sqrt{3}=3^x$

$$\left.\begin{array}{lll} 3\sqrt{3}=3^x & \Rightarrow & 3^{\frac{3}{2}}=3^x \\ & \Rightarrow & x=\frac{3}{2} \\ 2+\log_2 y=-\log_{\frac{1}{2}} 8 & \Rightarrow & \log_2 4y=\log_2 8 \\ & \Rightarrow & 4y=8 \\ & \Rightarrow & y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x\cdot y=\frac{3}{2}\cdot 2 \\ x\cdot y=3 \quad \text{bulunur.} \end{array}$$

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}\log_z x & z\\ z & x\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}-\log_z y & y\\ x & y\end{bmatrix}$ matrısleri için $A+B=\begin{bmatrix}k & 24\\ 48 & 40\end{bmatrix}$ ise

k nın değeri kaçtır?

ÇÖZÜM $A+B=\begin{bmatrix}\log_z x-\log_z y & z+y\\ z+x & x+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k & 24\\ 48 & 40\end{bmatrix}$ matrislerin eşitliğinden;

$\log_z \dfrac{x}{y}=k,\quad z+y=24,\quad z+x=48,\quad x+y=40$ denklemleri çözülürse,

$x=32\ ,\quad y=8$ ve $z=16$ olur.

$\log_z \dfrac{x}{y}=k \Rightarrow \log_{16}\dfrac{32}{8}=k$

$\log_{4^2} 4=k \Rightarrow k=\dfrac{1}{2}$ bulunur.

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}x+y+z & x\\ y & 1\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}t & \operatorname{sgn}(x^2+3)\\ [\![-e]\!] & \log_3 z\end{bmatrix}$ matrisleri için $A+B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ ise **t nin değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM $A+B=\begin{bmatrix}x+y+z+x+t & x+\operatorname{sgn}(x^2+3)\\ y+[\![-e]\!] & 1+\log_3 z\end{bmatrix}$ ve $A+B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ matrislerinin eşitliğinden;

$x+y+z+t=1\ ,\quad x+\operatorname{sgn}(x^2+3)=0\ ,\quad y+[\![-e]\!]=0\quad 1+\log_3 z=3$ denklemleri bulunur.

$x+\operatorname{sgn}(x^2+3)=0 \Rightarrow x+1=0\ ;\quad y+[\![-e]\!]=0 \Rightarrow y-3=0$

$x=-1 \qquad y=3$

$1+\log_3 z=3 \Rightarrow z=9$

$x+y+z+t=1 \Rightarrow -1+3+9+t=1$

$\Rightarrow t=-10$ bulunur.

MATRİSİN BİR SKALERLE ÇARPIMI

$k\in R$ ve $A=\left[a_{ij}\right]_{mxn}$ matrisi verilmiş olsun.

$k.A=k\left[a_{ij}\right]_{mxn}=\left[ka_{ij}\right]_{mxn}$ matrisine **k reel sayısı ile A matrisinin çarpımı** denir.

Bir matrisi skalerle çarpmak, matrisin her elemanını bu skalerle çarpmak demektir.

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -2\\ 4 & -1 & 5\end{bmatrix}$ ise **2A, –3A, 0.A matrislerini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$2A=2\begin{bmatrix}2 & 3 & -2\\ 4 & -1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.2 & 3.2 & -2.2\\ 4.2 & -1.2 & 5.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 6 & -4\\ 8 & -2 & 10\end{bmatrix}$$

$$-3A=-3\begin{bmatrix}2 & 3 & -2\\ 4 & -1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.(-3) & 3(-3) & -2(-3)\\ 4(-3) & -1(-3) & 5(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & -9 & 6\\ -12 & 3 & -15\end{bmatrix}$$

$$0\cdot A=0\begin{bmatrix}2 & 3 & -2\\ 4 & -1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.0 & 3.0 & -2.0\\ 4.0 & -1.0 & 5.0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ bulunur.

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ ise **3A + 2B matrisini bulunuz.**

ÇÖZÜM $3A+2B=3\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 9 & -12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 6\\ -2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 12\\ 7 & -12\end{bmatrix}$ bulunur.

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}2x & 4\\ 3 & -y\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}y & 2\\ 1 & x\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}5 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. $A-3B=2C$ ise **x + y nin değeri nedir?**

ÇÖZÜM $A-3B=\begin{bmatrix}2x & 4\\ 3 & -y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3y & -6\\ -3 & -3x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-3y & -2\\ 0 & -y-3x\end{bmatrix}$

$2C=\begin{bmatrix}10 & -2\\ 0 & -4\end{bmatrix}$

$A-3B=2C \Rightarrow \begin{bmatrix}2x-3y & -2\\ 0 & -y-3x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & -2\\ 0 & -4\end{bmatrix}$

$2x-3y=10$ ve $-y-3x=-4$

Denklemleri çözülürse $x=2$ $y=-2$ bulunur.

$x+y=0$ olur.

TEOREM: $\forall c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ **ve** $A=[a_{ij}]_{mxn}$ $B=[b_{ij}]_{mxn}$ $C=[c_{ij}]_{mxn}$ **matrisleri için;**

1) $c(A+B)=cA+cB$

2) $(c_1+c_2).A=c_1A+c_2A$

3) $c_1.(c_2A)=(c_1c_2)A$

4) $1.A=A$ ve $0.A=[0]_{mxn}$ **dir.**

İSPAT:

1) $c(A+B)=c.[a_{ij}+b_{ij}]_{mxn}=[c(a_{ij}+b_{ij})]_{mxn}=[ca_{ij}+cb_{ij}]_{mxn}=[ca_{ij}]_{mxn}+[cb_{ij}]_{mxn}$

$=c[a_{ij}]_{mxn}+c[b_{ij}]_{mxn}=cA+cB$

2) $(c_1+c_2).A=[(c_1+c_2)a_{ij}]_{mxn}=[c_1a_{ij}+c_2a_{ij}]_{mxn}=[c_1a_{ij}]_{mxn}+[c_2a_{ij}]_{mxn}$

$=c_1[a_{ij}]_{mxn}+c_2[a_{ij}]_{mxn}=c_1A+c_2A$

3) $c_1(c_2.A)=c_1[c_2.a_{ij}]_{mxn}=[c_1 \cdot c_2 \cdot a_{ij}]_{mxn}=(c_1 \cdot c_2)[a_{ij}]_{mxn}=(c_1 \cdot c_2)A$

4) $1.A=1.[a_{ij}]_{mxn}=[1a_{ij}]_{mxn}=[a_{ij}]_{mxn}=A$ $\quad 0.A=0[a_{ij}]_{mxn}=[0a_{ij}]_{mxn}=[0]_{mxn}$

MATRİSLERDE ÇARPMA İŞLEMİ

m x n türünden $A=\left[a_{ij}\right]_{mxn}$ matrisi ile $B=\left[b_{jk}\right]_{nxp}$ matrisi verilmiş olsun.

$A \cdot B=\left[a_{ij}\right]_{mxn} \cdot \left[b_{jk}\right]_{nxp}=\left[c_{ik}\right]_{mxp}$ dir. Öyleki

$$c_{ik}=\left[a_{i1} \cdot a_{i2} \cdots a_{in}\right] \cdot \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}=a_{i1} b_{1k}+a_{i2} b_{2k}+\cdots+a_{in} b_{nk}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \text{ olarak tanımlanır.}$$

UYARI: A ve B matrisleri için A.B çarpımının tanımlı olması için A matrisinin sütun sayısının B matrisinin satır sayısına eşit olması gerekir. A matrisinin sütun sayısı B matrisinin satır sayısına eşit değilse A.B çarpımı tanımlı değildir.

A matrisinin i. satırı ile B matrisinin k. sütunundaki elemanlar karşılıklı olarak çarpılır, çarpımlar toplanırsa A.B çarpım matrisinin c_{ik} elemanı elde edilir.

$$A \cdot B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \cdots & \boxed{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \boxed{b_{1k}} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \boxed{b_{2k}} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & \boxed{b_{nk}} & & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \boxed{c_{ik}} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

çarpımında $c_{ik}=a_{i1} b_{1k}+a_{i2} b_{2k}+\cdots+a_{in} b_{nk}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ dir.

$A.B=\left[a_{ij}\right]_{mxn} \cdot \left[b_{jk}\right]_{nxp}=\left[c_{ik}\right]_{mxp}$ olduğuna dikkat ediniz.

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ise **A.B matrisini bulunuz.**

ÇÖZÜM $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ dir.

x, y, z, t nin bulunuşuna dikkat ediniz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$x = 1.2 + 2.(-3)$
$\quad = 2 - 6 = -4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$y = 1.1 + 2.2$
$\quad = 1 + 4 = 5$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$z = 3.2 + 4(-3)$
$\quad = 6 - 12 = -6$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$t = 3.1 + 4.2$
$\quad = 3 + 8 = 11$

Buradan; $A \cdot B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -6 & 11 \end{bmatrix}$ bulunur.

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. **A.B çarpım matrisini bulunuz.**

ÇÖZÜM $A.B = [a_{ij}]_{2x3} \cdot [b_{jk}]_{3x2} = [c_{ik}]_{2x2}$ olur. Yani A.B matrisi 2x2 türünden bir matris olur.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$x = 2.5 + (-1).3 + 1.1$
$\quad = 8$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$y = 2.2 + (-1)\,(-4) + 1.2$
$\quad = 10$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$Z = (-3).5 + 1.3 + 4.1$
$\quad = -8$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$t = (-3).2 + 1.(-4) + 4.2$
$\quad = -2$ elde edilir.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ -8 & -2 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}2 & 6 & 3\\ 5 & 1 & 7\end{bmatrix}$ ise **A.B ve B.A çarpımlarını bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 6 & 3\\ 5 & 1 & 7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2.2+0.5 & 2.6+0.1 & 2.3+0.7\\ 1.2+3.5 & 1.6+3.1 & 1.3+3.7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 12 & 6\\ 17 & 9 & 24\end{bmatrix}$$

$$B.A=\left[b_{ij}\right]_{2x3}\cdot\left[a_{jk}\right]_{2x2}$$

$$3\neq 2$$

olduğundan B.A tanımlı değildir. Yani B matrisinin sütun sayısı A matrisinin satır sayısına eşit olmadığından B.A çarpımı tanımlı değildir.

ÖRNEK

$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}4 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ ise **A.B** ve **B.A** **çarpımlarını bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.4+1.(-1) & 2.3+1.1\\ 3.4+2(-1) & 3.3+2.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 7\\ 10 & 11\end{bmatrix}$$

$$B.A=\left[b_{ij}\right]_{2x2}\cdot\left[a_{jk}\right]_{2x2}$$

B matrisinin sütun sayısı A matrisinin satır sayısına eşit olduğundan B.A tanımlıdır.

$$B.A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\cdot 2+3\cdot 3 & 4\cdot 1+3\cdot 2\\ -1\cdot 2+1\cdot 3 & -1\cdot 1+1\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & 10\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

Buna göre $A.B\neq B.A$ dır.

UYARI: Matrislerde, çarpma işleminin değişme özelliği yoktur.

ÖRNEK

$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 4 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 2 & 4\\ 1 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ise **A.B nedir?**

ÇÖZÜM

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 4 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 2 & 4\\ 1 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\cdot 2+2\cdot 3+(-1)\cdot 1 & 1(-1)+2\cdot 0+(-1)(-2) & 1\cdot 0+2\cdot 2+(-1)\cdot 0 & 1\cdot 1+2\cdot 4+(-1)\cdot 1\\ 4\cdot 2+0\cdot 3+3\cdot 1 & 4(-1)+0\cdot 0+3(-2) & 4\cdot 0+0\cdot 2+3\cdot 0 & 4\cdot 1+0\cdot 4+3\cdot 1\\ 1\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 1 & 1(-1)+2\cdot 0+2(-2) & 1\cdot 0+2\cdot 2+2\cdot 0 & 1\cdot 1+2\cdot 4+2\cdot 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7 & 1 & 4 & 8\\ 11 & -10 & 0 & 7\\ 10 & -5 & 4 & 11\end{bmatrix}$$ bulunur.

ÖRNEK $A = \left[a_{ij}\right]_{4xn}$ $B = \left[b_{ij}\right]_{6xm}$ ise **A.B nin tanımlı olması için n + m nın en küçük değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM $A.B = \left[a_{ij}\right]_{4xn} \cdot \left[b_{jk}\right]_{6xm}$

Tanımlı olması için A matrisinin sütun sayısı, B matrisinin satır sayısına eşit olması gerekir. Buna göre n = 6 dır.

n + m toplamının en küçük olması için B matrisinin sütun sayısı m = 1 olması gerekir. O halde,

n + m = 6 + 1 = 7 bulunur.

ÇARPMA İŞLEMİNDE BİRİM MATRİS

TANIM: n inci sıradan bir kare matrisin 1. köşegen üzerindeki elemanları 1, diğer elemanları sıfır ise bu matrise çarpma işleminde n inci sıradan birim matris denir ve I_n ile gösterilir.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{nxn}$$

Örneğin:

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2. sıradan birim matris

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 3 . sıradan birim matris $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 4. sıradan birim matrisdir.

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ve $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. **A.I ve I.A matrislerini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$A \cdot I = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & -3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 0(-3) + 1 \cdot 4 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

A.I = I .A = A olur.

UYARI:	n x n türünden matrisler kümesinde I_n birim matrisi çarpma işlemine göre birim(etkisiz) elemandır.

TEOREM: $k \in R$ ve A, B, C matrisleri verilmiş olsun.

1. **Eğer A, mxn türünde B, nxp türünde ve C, pxk türünde matrisler ise**

   (A.B).C = A.(B.C) (Birleşme özelliği)

2. **Eğer A, mxn türünde, B ve C nxp türünde matrisler ise**

   A.(B+C) = A.B + A.C (Soldan dağılma özelliği)

3. **Eğer A, pxq türünde B ve C, nxp türünde matrisler ise**

   (B + C).A = B.A + C.A (Sağdan dağılma özelliği)

4. **Eğer A, mxn türünde B, nxp türünde matrisler ise**

   k(A.B) = (k.A).B = A(k.B)

5. **A bir kare matris olmak üzere I bir birim matris ise**

   A.I = I.A = A

6. **$(I)^n = I$ dir.**

İSPAT: 1. (A.B).C = A.(B.C) olduğunu gösterelim.

$A = [a_{ij}]$ $B = [b_{jk}]$ ve $C = [c_{kr}]$ olsun

$A.B = T = [t_{ik}]$ ve $BC = S = [s_{jr}]$ dir.

$$t_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{im} b_{mk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}$$

$$s_{jr} = b_{j1} c_{1r} + b_{j2} c_{2r} + \cdots + b_{jn} c_{nr} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} c_{kr} \quad \text{dir}$$

Şimdi (A.B) ve C çarpılırsa A.B = T olduğundan

$$t_{i1} c_{1r} + t_{i2} c_{2r} + \cdots + t_{in} c_{nr} = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} c_{kr} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (a_{ij} b_{jk}) c_{kr}$$

Diğer taraftan A, (BC) ile çarpılırsa BC = S olduğundan

$$a_{i1} s_{1r} + a_{i2} s_{2r} + \cdots + a_{im} s_{mr} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_{jr} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ij} (b_{jk} c_{kr})$$

Yukarıdaki iki toplam eşit olduğundan;

(A.B).C = A.(B.C) bulunur.

Diğer özelliklerin ispatı benzer yolla yapılabilir.

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\\3&1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\-2&1&1&3\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}4&3&2\\1&4&1\\0&0&2\\1&0&-1\end{bmatrix}$ olduğuna göre, **(A.B).C ve A.(B.C) matrislerini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\\3&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&0&1\\-2&1&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1&-1&-2\\-4&2&2&6\\1&7&1&6\end{bmatrix}$$

$$(A.B).C=\begin{bmatrix}3&1&-1&-2\\-4&2&2&6\\1&7&1&6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&3&2\\1&4&1\\0&0&2\\1&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&13&7\\-8&-4&-8\\17&31&5\end{bmatrix}$$

$$B\cdot C=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\-2&1&1&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&3&2\\1&4&1\\0&0&2\\1&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&11&3\\-4&-2&-4\end{bmatrix}$$

$$A\cdot(B\cdot C)=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\\3&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7&11&3\\-4&-2&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&13&7\\-8&-4&-8\\17&31&5\end{bmatrix}$$

$(A.B).C=A.(B.C)$ bulunur.

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}1&3\\0&0\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}3&0\\-1&0\end{bmatrix}$ matrisleri için **A.B matrisini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1&3\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&0\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot3+3\cdot(-1)&1\cdot0+3\cdot0\\0\cdot3+0\cdot(-1)&0\cdot0+0\cdot0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\text{ bulunur.}$$

$A\neq0$ $B\neq0$ olduğu halde $A.B=0$ olabilir.

ÖRNEK $x-\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&-2&-3\\4&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&0&1\\-1&0&2\\4&1&-1\end{bmatrix}-2I=0$ **denklemini sağlayan x matrisini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$x-\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&-2&-3\\4&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&0&1\\-1&0&2\\4&1&-1\end{bmatrix}-2I=0\Rightarrow x=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&-2&-3\\4&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&0&1\\-1&0&2\\4&1&-1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$x=\begin{bmatrix}12&3&2\\-12&-3&-2\\7&0&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

$$x=\begin{bmatrix}14&3&2\\-12&-1&-2\\7&0&8\end{bmatrix}\text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}x & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ ve A.B = B.A **ise x nedir?**

ÇÖZÜM

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot x+0\cdot 4 & 2\cdot 0+0\cdot 2\\ -3x+4\cdot 4 & -3\cdot 0+4\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x & 0\\ -3x+16 & 8\end{bmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}x & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ -3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\cdot 2+0\cdot(-3) & x\cdot 0+0\cdot 4\\ 4\cdot 2+2\cdot(-3) & 4\cdot 0+2\cdot 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x & 0\\ 2 & 8\end{bmatrix}$$

$$A\cdot B=B\cdot A\Rightarrow\begin{bmatrix}2x & 0\\ -3x+16 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x & 0\\ 2 & 8\end{bmatrix}$$ matrislerin eşitliğinden

$$\Rightarrow -3x+16=2$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{14}{3}$$ bulunur.

KARE MATRİSİN KUVVETLERİ

A matrisi n inci sıradan bir kare matris ve $k\in Z^+$ ise A nın çarpma işlemine göre kuvvetleri:

Birim matrisin tüm doğal sayı kuvvetleri kendisidir.

$A^0=I_n$

$A^1=A$

$A^2=A.A$

$A^3=A.A^2$

$\vdots$

$A^k=A.A^{k-1}$ dır.

ÖRNEK $x=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$ ise **$x^2+4x+2I_2$ matrisini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$x^2=x\cdot x=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 1+2\cdot 4 & 1\cdot 2+2\cdot(-3)\\ 4\cdot 1+(-3)\cdot 4 & 4\cdot 2+(-3)\cdot(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & -4\\ -8 & 17\end{bmatrix}$$

$$4x=4\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 8\\ 16 & -12\end{bmatrix}$$

$$2I_2=2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$x^2+4x+2I_2=\begin{bmatrix}9 & -4\\ -8 & 17\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 8\\ 16 & -12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 4\\ 8 & 7\end{bmatrix}$$ bulunur.

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ ise $\mathbf{A^{42}}$ **matrisini bulunuz.**

ÇÖZÜM $A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot1+3\cdot0 & 1\cdot3+3\cdot(-1)\\ 0\cdot1+(-1)\cdot0 & 0\cdot3+(-1)\cdot(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$

$A^{42}=\left(A^2\right)^{21}=(I_2)^{21}=I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ bulunur.

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ ise $\mathbf{(A)^{1996}}$ **matrisini bulunuz.**

ÇÖZÜM $A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot2+3\cdot1 & 2\cdot3+3\cdot(-2)\\ 1\cdot2+(-2)\cdot1 & 1\cdot3+(-2)\cdot(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{bmatrix}=7\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=7I_2$

$n\in N$ için $(I_2)^n=I_2$ olduğundan

$$(A)^{1996}=\left(A^2\right)^{998}=\left(7\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)^{998}=7^{998}I_2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -3 & -1\end{bmatrix}$ ise $\mathbf{A^{28}}$ **matrisini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM $A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -3 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 6 & -2\end{bmatrix}$

$A^3=A\cdot A^2=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -3 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 6 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}=8\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=8I_2$

$(A)^{28}=\left(A^3\right)^9\cdot A=(8I_2)^9\cdot A=8^9I_2\cdot A=8^9\cdot A$

$=8^9\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -3 & -1\end{bmatrix}$ bulunur.

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ ise $\mathbf{A^{12}}$ ***matrisini hesaplayınız.***

ÇÖZÜM $A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 4 & 2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^2 & 0\\ 2\cdot2 & 2^2\end{bmatrix}$

$A^3=A\cdot A^2=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2^2 & 0\\ 2\cdot2 & 2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^3 & 0\\ 3\cdot2^2 & 2^3\end{bmatrix}$

$A^4=A\cdot A^3=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2^3 & 0\\ 3\cdot2^2 & 2^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^4 & 0\\ 4\cdot2^3 & 2^4\end{bmatrix}$

$\vdots$

$A^{12}=A\cdot A^{11}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2^{11} & 0\\ 11\cdot2^{10} & 2^{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^{12} & 0\\ 12\cdot2^{11} & 2^{12}\end{bmatrix}$ bulunur.

ÖRNEK

$A=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{bmatrix}$ olduğuna göre, $\forall x\in N^+$ için $(\mathbf{A})^n=\begin{bmatrix}\mathbf{cosnx} & \mathbf{-sinnx}\\ \mathbf{sinnx} & \mathbf{cosnx}\end{bmatrix}$ **olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM

Tümevarım ispat yöntemi kullanılırsa

i) $n=1$ için $(A)^1=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{bmatrix}$ olduğundan ifade doğrudur.

ii) $n=k$ için $(A)^k=\begin{bmatrix}\cos kx & -\sin kx\\ \sin kx & \cos kx\end{bmatrix}$ ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim.

Şimdi;

$n=k+1$ için $(A)^{k+1}=\begin{bmatrix}\cos(k+1)x & -\sin(k+1)x\\ \sin(k+1)x & \cos(k+1)x\end{bmatrix}$ ifadesinin doğru olduğunu gösterelim.

$$(A)^k=\begin{bmatrix}\cos kx & -\sin kx\\ \sin kx & \cos kx\end{bmatrix}\Rightarrow (A)^{k+1}=A(A)^k=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos kx & -\sin kx\\ \sin kx & \cos kx\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos x\cdot\cos kx-\sin x\cdot\sin kx & -\cos x\cdot\sin kx-\sin x\cdot\cos kx\\ \sin x\cdot\cos kx+\cos x\cdot\sin kx & -\sin x\cdot\sin kx+\cos x\cdot\cos kx\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(k+1)x & -\sin(k+1)x\\ \sin(k+1)x & \cos(k+1)x\end{bmatrix}$$

olduğundan $\forall n\in N^+$ için $\left(A^n\right)=\begin{bmatrix}\cos nx & -\sin nx\\ \sin nx & \cos nx\end{bmatrix}$ ifadesi doğrudur.

ÖRNEK

$A=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{bmatrix}$ olduğuna göre, **$(A)^4$ matrisini bulunuz.**

ÇÖZÜM

Yukarıdaki örnekten

$$A=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{bmatrix}\Rightarrow A^n=\begin{bmatrix}\cos nx & -\sin nx\\ \sin nx & \cos nx\end{bmatrix}$$ olduğundan

$$A^4=\begin{bmatrix}\cos 4x & -\sin 4x\\ \sin 4x & \cos 4x\end{bmatrix}$$ bulunur.

ÖRNEK

$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{bmatrix}$ olduğuna göre $\forall n\in N^{+}$ için $(\mathbf{A})^{n}=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{na} & \mathbf{1}\end{bmatrix}$ **olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM

Tümevarım ispat yöntemi kullanılırsa

i) $n=1$ için $(A)^{1}=A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{bmatrix}$ olduğundan ifade doğrudur.

ii) $n=k$ için $(A)^{k}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ ka & 1\end{bmatrix}$ ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim.

Şimdi;

$n=k+1$ için $(A)^{k+1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ (k+1)a & 1\end{bmatrix}$ ifadesının doğru olduğunu gösterelim.

$$(A)^{k}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ ka & 1\end{bmatrix}\Rightarrow (A)^{k+1}=A\cdot(A)^{k}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ ka & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ a+ka & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ (k+1)a & 1\end{bmatrix} \text{ olduğundan}$$

$\forall n\in N^{+}$ için $(A)^{n}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ na & 1\end{bmatrix}$ *ifadesi doğrudur.*

ÖRNEK

$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ olduğuna göre, $\mathbf{(A)^{665}}$ **matrisini bulunuz.**

ÇÖZÜM

Yukarıdaki örnekten

$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{bmatrix}\Rightarrow (A)^{n}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ na & 1\end{bmatrix}$ olduğundan

$(A)^{665}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 665\cdot 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1995 & 1\end{bmatrix}$ bulunur.

ÖRNEK

$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ ve $f(x)=x^{2}-4x+2$ olduğuna göre, **f(A) matrisini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$f(A)=A^{2}-4.A+2.I_{2}$ elde edilir.

$$A^{2}=A\cdot A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$-4A=-4\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ -4 & -8\end{bmatrix}$$

$$2I_{2}=2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$f(A)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 0\\ -4 & -8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -2\end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

BİR MATRİSİN TRANSPOZU (TRANSPOZESİ, DEVRİĞİ)

TANIM: **$A=\left[a_{ij}\right]_{mxn}$ matrisinin aynı numaralı satırlarıyla sütunlarının yer değiştirmesiyle oluşturulan $\left[a_{ji}\right]_{nxm}$ matrisine A matrisinin transpozu (transpozesi, devriği) denir. A^T veya A^d ile gösterilir.**

A matrisi mxn türünde bir matris iken A matrisinin transpozu (transpozesi, devriği) olan A^T matrisi nxm türünde olur.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{nxm}$$

ÖRNEK

$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}_{3x2}$ ise **A^T matrisini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}_{3x2} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2x3}$ bulunur.

ÖRNEK

$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{2x2}$ $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2x3}$ $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{1x4}$ $D=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}_{3x1}$ **matrislerinin transpozlarını bulunuz.**

ÇÖZÜM

$A^T=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2x2}$ $B^T=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{3x2}$ $C^T=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{4x1}$ $D^T=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}_{1x3}$

UYARI: $A=\left[a_{ij}\right]_{mxn}$ matrisinin transpozu $A^T=\left[b_{ji}\right]_{nxm}$ denilirse $b_{ji}=a_{ij}$ olur. Buna göre A^T nin ji. elemanı a_{ij} olur.

Örneğin:

$A=\left[a_{ij}\right]_{3x2}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ ise $A^T=\left[b_{ji}\right]_{2x3}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$ denilirse

$b_{ji}=a_{ij}$ olduğundan

$A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}$ bulunur.

TEOREM: $k \in R$ ve A, B, C matrisleri verilmiş olsun

1. **A, mxn türünde bir matris ise $\left(A^T\right)^T = A$ dır.**
2. **A, mxn türünde bir matris ise $(k.A)^T = k.A^T$ dir.**
3. **A ve B, mxn türünde iki matris ise $(A+B)^T = A^T + B^T$ dir.**
4. **A, mxn türünde B, nxp türünde iki matris ise $(A{\cdot}B)^T = B^T{\cdot}A^T$ dir.**
5. **$B = A + A^T \Rightarrow B^T = B$ dir.**
6. **$C = A - A^T \Rightarrow C^T = -C$ dir.**

İSPAT:

1. $A = \left[a_{ij}\right]_{mxn}$ olsun. Matrisin transpozu tanımından

$$A^T = \left[a_{ji}\right]_{nxm} \text{ olur.}$$

A^T matrisin tekrar transpozu alınırsa

$$\left(A^T\right)^T = \left(\left[a_{ji}\right]_{nxm}\right)^T = \left[a_{ij}\right]_{mxn} = A \text{ olur.}$$

Buradan $\left(A^T\right)^T = A$ bulunur.

2. $A = \left[a_{ij}\right]_{mxn}$ olsun skaler ile çarpma işleminin tanımından

$$k{\cdot}A = \left[ka_{ij}\right]_{mxn} = \left[c_{ij}\right]_{mxn} \text{ olur.}$$

Transpoz alınırsa;

$$(kA)^T = \left[c_{ji}\right]_{nxm} = \left[ka_{ji}\right]_{nxm} = k\left[a_{ji}\right]_{nxm} = k{\cdot}A^T \text{ olur.}$$

Buradan $(kA)^T = kA^T$ bulunur.

3. $A = \left[a_{ij}\right]_{mxn}$ $B = \left[b_{ij}\right]_{mxn}$ olsun. Matrislerin toplamı tanımından

$$A + B = \left[a_{ij}\right]_{mxn} + \left[b_{ij}\right]_{mxn} = \left[c_{ij}\right]_{mxn} \text{ olur.}$$

Transpozu alınırsa

$$(A+B)^T = \left[c_{ji}\right]_{nxm} = \left[a_{ji}\right]_{nxm} + \left[b_{ji}\right]_{nxm} = A^T + B^T \text{ olur.}$$

Buradan $(A+B)^T = A^T + B^T$ bulunur.

4. $A = \left[a_{ij}\right]_{mxn}$ $B = \left[b_{jk}\right]_{nxp}$ olsun. Matrislerde çarpma tanımından

$$A{\cdot}B = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}\right] = \left[c_{ik}\right]_{mxp}; \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$$

Buradan transpoz işlemi uygulanırsa

$$(A\cdot B)^T = [c_{ik}]^T_{mxp} = [c_{ki}]_{pxm} \qquad c_{ki} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, b_{ji} \text{ elde edilir.}$$

$$(A\cdot B)^T = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, b_{ji}\right] = \left[\sum_{j=1}^{n} a^T_{jk}\, b^T_{ij}\right] = \left[\sum_{j=1}^{n} b^T_{ij}\, a^T_{jk}\right]$$

$$= B^T\cdot A^T \text{ olur.}$$

Buradan $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$ bulunur.

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ matrisi için $\left(A^T\right)^T$ **matrisini bulunuz.**

ÇÖZÜM $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ olur.

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(A^T\right)^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

$\Rightarrow \left(A^T\right)^T = A$ olduğuna dikkat ediniz.

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ olduğuna göre $\mathbf{A^T + B^T}$ **matrisini bulunuz.**

ÇÖZÜM $(A+B)^T = A^T + B^T$ olduğundan

$$A^T + B^T = (A+B)^T = \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\right)^T = \left(\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 5 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 9 \\ 6 & 5 & -5 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ise $\mathbf{B^T.A^T}$ **matrisini bulunuz.**

ÇÖZÜM $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$ olduğundan

$$B^T\cdot A^T = (A\cdot B)^T = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right)^T = \left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$A = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 25 & -7 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ matrisleri için $A \cdot A^T = B^T$ olduğuna göre, **a + b toplamı kaçtır?**

ÇÖZÜM

$$A \cdot A^T = B^T \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 4 \\ 1 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 1 \\ 4 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -7 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^2+16 & a+4b \\ a+4b & 1+b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -7 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrislerin eşitliğinden

$a^2 + 16 = 25$ $\quad$ $1 + b^2 = 2$ $\quad$ $a + 4b = -7$

$a^2 = 9$ $\quad$ $b^2 = 1$ $\quad$ $a = 3 \Rightarrow 3 + 4b = -7$

$a = \mp 3$ $\quad$ $b = \mp 1$ $\quad$ $4b = -10 \Rightarrow b = -\frac{5}{2}$ sağlamaz.

$a = -3 \Rightarrow -3 + 4b = -7$

$4b = -4$

$b = -1$

Yani; $a = -3$ ve $b = -1$ bulunurki, $a + b = -4$ olur.

TANIM: A karesel bir matris ise

1. $A^T = A$ ise A ya simetrik matris

2. $A^T = -A$ ise A ya antisimetrik matris denir.

ÖRNEK

Aşağıdaki matrislerin çeşitini belirtiniz.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ **b)** $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ **c)** $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ **d)** $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

a) $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} = A$ olduğundan simetrik matris

b) $B^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = -B$ olduğundan antisimetrik matris

c) $C^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = C$ olduğundan simetrik matris

d) $D^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -D$ olduğundan antisimetrik matris

DETERMİNANTLAR

TANIM: nxn türünden tüm kare matrislerin kümesi M olsun. M kümesinden R reel sayılar kümesine tanımlanan D: M → R fonksiyonuna determinant fonksiyonu denir. Bir A kare matrisi için D(A) ∈ R sayısına A matrisinin determinantı denir. A matrisinin determinantı detA, veya |A| ile gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

biçiminde gösterilir.

Bir kare matrisin determinantının bir reel sayı olduğuna dikkat ediniz. Sadece kare matrislerin determinantları hesaplanır. Şimdi kare matrislerin türlerine göre determinant hesaplamasını inceleyelim.

DETERMİNANT HESAPLANMASI

1. Birinci sıradan bir kare matrisin determinantı

$A = [a]$ ise $\det A = a$ dır.

Örneğin:

$A = [5]$ ise $\det A = 5$

$A = [-4]$ ise $\det A = -4$ olur.

2. İkinci sıradan bir kare matrisin determinantı, birinci köşegen üzerindeki elemanların çarpımından ikinci köşegen üzerindeki elemanların çarpımı çıkartılarak hesaplanır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ ise } \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{matrix} - \\ \\ + \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \text{ dir.}$$

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ ise **|A| kaçtır?**

ÇÖZÜM $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2) - (-2)\cdot 4 = -6 + 8 = 2$ bulunur.

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ise **|A| kaçtır?**

ÇÖZÜM $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot 2 = 8$ bulunur.

ÖRNEK $\begin{vmatrix} x & 4 \\ x-1 & 5 \end{vmatrix} = 0$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\begin{vmatrix} x & 4 \\ x-1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x - 4(x-1) = 0$

$$5x - 4x + 4 = 0$$

$$x = -4 \Rightarrow Ç = \{-4\} \text{ olur.}$$

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} 1996 & 1997 \\ 1994 & 1995 \end{bmatrix}$ **matrisinin determinantını bulunuz.**

ÇÖZÜM $x = 1994$ olsun.

$$|A| = \begin{vmatrix} x+2 & x+3 \\ x & x+1 \end{vmatrix} = (x+2)(x+1) - x(x+3) = x^2 + x + 2x + 2 - x^2 - 3x$$

$$= 2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ **matrisinin determinantını hesaplayınız.**

ÇÖZÜM $|A| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ olur.

ÖRNEK $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & [\![x+3]\!] \end{vmatrix} = 0$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & [\![x+3]\!] \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow [\![x+3]\!] - 8 = 0$

$$[\![x]\!] + 3 - 8 = 0$$

$$[\![x]\!] = 5 \Rightarrow 5 \le x < 6 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $\begin{vmatrix} \operatorname{sgn}(x^2-1) & 1 \\ 0 & \operatorname{sgn}(x-3) \end{vmatrix} = 0$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM $\begin{vmatrix} \operatorname{sgn}(x^2-1) & 1 \\ 0 & \operatorname{sgn}(x-3) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(x^2-1)\operatorname{sgn}(x-3) = 0$

$$\operatorname{sgn}(x^2-1) = 0 \quad \vee \quad \operatorname{sgn}(x-3) = 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \qquad x - 3 = 0$$

$$x = \mp 1 \qquad x = 3$$

$$Ç = \{-1, 1, 3\} \text{ bulunur.}$$

ALT DETERMİNANT (MİNÖR)

Determinantın herhangi bir elemanı için o elemanın bulunduğu satır ve sütun atıldıktan sonra, kalan elemanların oluşturduğu determinanta, o elemanın **alt determinantı** ya da **minörü** denir. D_{ij} şeklinde gösterilir.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ determinantında

$$D_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$ dir.

ÖRNEK

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ -4 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$ determinantında **4 sayısının minörünü bularak değerini hesaplayınız.**

ÇÖZÜM

$$a_{23} = 4 \Rightarrow D_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 12 = -6$$ olur.

EŞÇARPAN (KOFAKTÖR)

a_{ij} elemanına ait minörün $(-1)^{i+j}$ ile çarpımına denir. A_{ij} ile gösterilir.

$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}}$ dir.

ÖRNEK

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ -4 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$ determinantında **a_{23} elemanının eşçarpanını bulunuz.**

ÇÖZÜM

$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot D_{23}$ dir. D_{23} ü bir önceki örnekte –6 olarak bulmuştuk.

Öyleyse

$$A_{23} = -(-6) = 6$$ olur.

EK DETERMİNANT

IAI nın tüm elemanlarının eş çarpanlarından oluşan yeni determinanta **ek determinant** denir. IAekI yazımıyla gösterilir.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow |Aek| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$ dür.

3x3 TÜRÜNDEKİ MATRİSLERİN DETERMİNANTI

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} \text{ ise } \det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \text{ dir.}$$

Bir determinantın herhangi bir satırının (ya da sütununun) elemanları ile kofaktörlerinin çarpımının toplamına **o determinantın değeri** denir.

(1. satıra göre açalım.)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

ÖRNEK

$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix}$ matrisinin **tüm eşçarpanlarını bulunuz ve determinantını hesaplayınız.**

ÇÖZÜM

Eş çarpan $A_{ij}=(-1)^{i+j}|D_{ij}|$ ile bulunur.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1\end{vmatrix}=1\cdot(0\cdot1-(-3)\cdot2)=6$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1\cdot(4\cdot1-2\cdot2)=0$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -3\end{vmatrix}=1\cdot(4\cdot(-3)-2\cdot0)=-12$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1\end{vmatrix}=-1\cdot((-1)\cdot1-(-3)\cdot3)=-8$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1\end{vmatrix}=1\cdot(1-3\cdot2)=-5$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3\end{vmatrix}=-1\cdot(1(-3)-2(-1))=1$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2\end{vmatrix}=1\cdot((-1)\cdot2-3\cdot0)=-2$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2\end{vmatrix}=-1\cdot(1\cdot2-4\cdot3)=10$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0\end{vmatrix}=1\cdot(1\cdot0-(-1)\cdot4)=4$$

1. satıra göre A matrisinin determinantı

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$
$$= 1.6 + (-1).0 + 3.(-12) = -30$$

2. satıra göre A matrisinin determinantı

$$\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$
$$= 4(-8) + 0.(-5) + 2.1 = -30$$

3. satıra göre A matrisinin determinantı

$$\det A = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$
$$= 2.(-2) + (-3).10 + 1.4 = -30$$

Burada görüldüğü gibi bir determinantın her hangi bir satıra göre açılımı aynı sayıya eşittir.

Şimdi bu işlemi sütunlara uygulayalım.

1. sütuna göre A matrisinin determinantı

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$
$$= 1.6 + 4.(-8) + 2.(-2) = -30$$

2. sütuna göre A matrisinin determinantı

$$\det A = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$
$$= (-1).0 + 0.(-5) + (-3).10 = -30$$

3. sütuna göre A matrisinin determinantı

$$\det A = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$
$$= 3(-12) + 2.1 + 1.4 = -30$$

Bir determinantın her hangi bir sütuna göre açılımı aynı sayıya eşittir.

UYARI: Bir matrisin determinantı satır veya sütunlardan hangisine göre açılırsa açılsın sonuç değişmez. O halde bir matrisin determinantı satırlardan birine ya da sütunlardan birine göre açılımı yapılarak hesaplanabilir.

ÖRNEK

$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını **2. satıra göre açılım yaparak hesaplayınız.**

ÇÖZÜM

2. satıra göre determinantın açılımı

$\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$ şeklindedir.

A matrisinde $a_{23} = 0$ olduğundan A_{21}, A_{22} eşçarpanlarını hesaplamak yeterlidir.

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -1(3(-2) - 2\cdot 1) = 8$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1(4(-2) - (-1)\cdot 1) = -7$$

$$\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22}$$
$$= (-2)\cdot 8 + 1\cdot(-7) = -23 \text{ olur.}$$

UYARI: Determinant hesaplanırken satır veya sütunlardan hangisinde sıfır fazla ise o satıra veya sütuna göre açılım yapmak kolaylık sağlar.

ÖRNEK

$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin **determinantını hesaplayınız.**

ÇÖZÜM

3. sütuna göre determinantın açılımı yapılırsa

$\det A = a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23} + a_{33} \cdot A_{33}$

$a_{23} = 0$ ve $a_{33} = 0$ olduğundan $a_{23} A_{23}$ ve $a_{33} A_{33}$ terimleri sıfır olur.

$$\det A = a_{13} A_{13} = 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3(3 \cdot 2 - (-1) \cdot 1) = 21 \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **matrisinin determinantını bulunuz.**

ÇÖZÜM

1. satıra göre determinantın açılımı yapılırsa:

$\det A = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(2 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = 4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1(3 \cdot 3 \cdot - (-1) \cdot 1) = -10$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1(3 \cdot 2 - (-1) \cdot 2) = 8$$

$\det A = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$

$= 4.4 + 1.(-10) + 2.8 = 22$ bulunur.

ÖRNEK

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ a_{32} **elemanının eş çarpanını bulunuz.**

ÇÖZÜM

a_{32} elemanının eş çarpanı; $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ olur.

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ determinantının 1. satıra göre açılımı yapılırsa

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1(-6) = -12$$

$A_{32} = (-1)^{3+2}(-12) = 12$ bulunur.

SARRUS KURALI

3 x 3 türünden bir determinantın açılımı Sarrus kuralı ile kolaylıkla bulunabilir. Bu yönteme göre determinantın ilk iki satırı determinantın altına ya da ilk iki sütunu determinantın sağ yanına yazılarak aşağıdaki şekilde açılır.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \left(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{12}a_{33}\right)$$ veya

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \left(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}\right)$$ dir.

ÖRNEK

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ **matrisinin determinantını Sarrus kuralı ile bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 3.2.5 + 1.(-1).3 + (-2).4.2 - ((-2).2.3 + 3.(-1).2 + 1.4.5)$

$= 30 - 3 - 16 - (-12 - 6 + 20) = 11 - 2 = 9$ bulunur.

UYARI: Sarrus kuralı yalnız 3x3 türünden matrislerin hesaplanmasında kullanılır.

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ **matrisinin determinantını bulunuz.**

ÇÖZÜM $\det A = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

$= 6.0.4 + 3.3.5 + (-2).4.(-1) - (5.0.(-2) + (-1).3.6 + 4.4.3)$

$= 45 + 8 - (-18 + 48) = 23$ bulunur.

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ **matrisinin determinantını bulunuz.**

ÇÖZÜM $\det A = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= 4.2.4 + 1.(-2).2 + 3.(-3).(-1) - (3.2.2 + 4.(-2).(-1) + 1.(-3).4)$

$= 32 - 4 + 9 - (12 + 8 - 12) = 29$ bulunur.

DETERMİNANTIN ÖZELLİKLERİ

1) A, n inci sıradan bir karesel matris ise $|A| = |A^T|$ dir.

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ise $|A| = |A^T|$ **olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 6$

$|A^T| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 6$ olduğundan $|A| = |A^T|$ bulunur.

2) A matrisinin her hangi bir satır veya sütundaki tüm elemanlar sıfır ise determinantın değeri sıfırdır.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}12 & 4 & 8\\ 0 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 6\end{bmatrix}$ ise $|A|$ **nedir?**

ÇÖZÜM Determinant 2. satıra göre açılırsa

$$|A| = 0(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}4 & 8\\ 2 & 6\end{vmatrix} + 0(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}12 & 8\\ 3 & 6\end{vmatrix} + 0(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}12 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}$$

$= 0$ bulunur.

3) A matrisinin iki satırındaki veya sütunundaki terimler orantılı ise determinantın değeri sıfırdır.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = 0\ ,\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & ka_{12}\\ a_{21} & a_{22} & ka_{22}\\ a_{31} & a_{32} & ka_{32}\end{vmatrix} = 0 \quad (k \in R)$$

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 8 & 6\end{bmatrix}$ ise **A matrisinin determinantını bulunuz.**

ÇÖZÜM A matrisinde 1. satırın 2 katı 2. satırına eşit olduğundan $|A| = 0$ olur.

$$|A| = \begin{vmatrix}4 & 3\\ 8 & 6\end{vmatrix} = 4\cdot 6 - 8\cdot 3 = 0 \quad \text{bulunur.}$$

4) A matrisinin herhangi bir satır veya sütununun tüm elemanları $k \in R$ ile çarpılırsa determinantı k ile çarpılmış olur.

$$\begin{vmatrix}ka_{11} & ka_{12} & ka_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = k\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}a & b\\ kc & kd\end{bmatrix}$ ise **$|B| = k|A|$ olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM $|A| = \begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} = ad - bc$

$$|B| = \begin{vmatrix}a & b\\ kc & kd\end{vmatrix} = kad - kbc = k(\underbrace{ad - bc}_{|A|}) \Rightarrow |B| = k|A| \quad \text{bulunur.}$$

5) A matrisinin determinantının herhangi iki satırı veya sütunu yer değiştirirse determinant işaret değiştirir.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

ÖRNEK $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$ ve $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ **determinantlarını bulunuz.**

ÇÖZÜM $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 6 \cdot 3 = -10$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ bulunur.

$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 10$

6) A ve B matrisleri için $|A.B| = |A| . |B|$ dir.

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisleri için **$|A| . |B|$ ve $|A.B|$ determinantlarını bulunuz.**

ÇÖZÜM $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (-1) \cdot 4 = 10$

$\Rightarrow |A| \cdot |B| = 80$ olur.

$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-2) \cdot 3 = 8$

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow |AB| = \begin{vmatrix} 15 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 80$ olur.

Buradan $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ bulunur.

7) A matrisi nxn türünden ve $k \in R$ ise $|kA| = k^n |A|$ dır.

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ise **$|3A|$ ve $|A|$ determinantlarını bulunuz.**

ÇÖZÜM $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2$

$\Rightarrow |3A| = 3^2 \cdot |A|$ bulunur.

$|3A| = \begin{vmatrix} 9 & 15 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 9 \cdot 12 - 6 \cdot 15 = 18 = 3^2 \cdot 2$

8) A matrisi için $|A^n| = |A|^n$ dir.

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ise **$|A^2|$ ve $|A|$ determinantlarını bulunuz.**

ÇÖZÜM $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

$|A^2| = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 9$

$\Rightarrow |A^2| = |A|^2$ bulunur.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$

9) Bir A matrisinde herhangi bir satırdaki veya sütundaki her eleman iki elemanın toplamı biçiminde yazılabiliyorsa determinant aynı sıradan iki determinantın toplamı biçiminde yazılabilir.

$$\begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 & x_3+y_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ÖRNEK $\begin{vmatrix} 6 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ **determinantını iki determinantın toplamı biçiminde yazınız.**

ÇÖZÜM

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+2 & -5+3 & 4+1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

10) Bir A matrisinde bir satırdaki veya sütundaki tüm elemanları k∈R (k ≠ 0) ile çarpılır ve başka bir satıra veya sütuna karşılıklı olarak eklenirse determinantın değeri değişmez.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{31} & a_{12}+ka_{32} & a_{13}+ka_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ **matrisinin determinantını bulunuz.**

ÇÖZÜM

3. satırın 2 katı 1. satıra eklenirse

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+8 & 0+6 & 2-2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Bu ifade 3. sütuna göre açılırsa

$$|A| = \begin{vmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(9\cdot 3-6\cdot 2) = -15 \quad \text{bulunur.}$$

11. Bir determinantta herhangi bir satırın (ya da sütunun) elemanları ile başka bir satıra (ya da sütuna) ait elemanların kofaktörleri karşılıklı olarak çarpılır ve çarpımlar toplanırsa, toplam sıfıra eşittir.

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & m & 2 \\ 4 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ matrisi için $a_{21}\cdot A_{31} + a_{22}\cdot A_{32} = 10$ ise **m değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$\underbrace{a_{21}\cdot A_{31} + a_{22}\cdot A_{32}}_{10} + a_{23}\cdot A_{33} = 0$ dır. (Özellik - 11)

$a_{23}\cdot A_{33} = -10$

$$2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & m \end{vmatrix} = -10$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & m \end{vmatrix} = -5 \quad \Rightarrow -2m-3=-5$$

$$-2m = -2$$

$$m = 1 \quad \text{bulunur.}$$

12. Bir determinantın iki satırının (ya da sütunun) karşılıklı elemanları eşit ise bu determinantın değeri sıfırdır.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$$

13. nxn türünden $A = [a_{ij}]$ matrisinin determinantının i. satıra göre açılımı:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \text{ dır.}$$

ÖRNEK $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ **determinantını, determinant özelliklerini kullanarak bulunuz.**

ÇÖZÜM 1. sütuna 2. sütunu ekleyelim.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1+2 & 2 & 3 \\ 3+4 & 4 & 2 \\ 5+4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \\ 9 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Şimdi 1. sütunun 2 katını 2. sütundan çıkartalım.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2-2 & 3 \\ 7 & 4-14 & 2 \\ 9 & 4-18 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 7 & -10 & 2 \\ 9 & -14 & 3 \end{vmatrix}$$

1. sütunun 3. katını 3. sütundan çıkartalım.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3-3 \\ 7 & -10 & 2-21 \\ 9 & -14 & 3-27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -10 & -19 \\ 9 & -14 & -24 \end{vmatrix}$$

Elde edilen son determinant 1. satıra göre açılırsa

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -10 & -19 \\ 9 & -14 & -24 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -10 & -19 \\ -14 & -24 \end{vmatrix} = (-10)\cdot(-24) - (-14)\cdot(-19)$$

$$= 240 - 266$$

$$= -26 \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ **determinantını determinant özellikleri yardımıyla hesaplayınız.**

ÇÖZÜM 2. satırın 2 katını 1. satırdan çıkaralım.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4-6 & 3-4 & 2-2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

3. satırı 1. satıra ekleyelim.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2+2 & -1+1 & 0+3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Determinant 1. satıra göre açılırsa

$$|A| = 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot1(3\cdot1-2\cdot2) = -3 \quad \text{oulunur.}$$

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^4 & y^4 & z^4 \end{bmatrix}$ **matrisinin determinantını bulunuz.**

ÇÖZÜM 1. sütun 2. sütundan çıkartılırsa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-1 & 1 \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2 \\ x^4 & y^4-x^4 & z^4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2 \\ x^4 & y^4-x^4 & z^4 \end{vmatrix}$$

1. sütun 3. sütundan çıkartılırsa

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-1 \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \\ x^4 & y^4-x^4 & z^4-x^4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \\ x^4 & y^4-x^4 & z^4-x^4 \end{vmatrix}$$

1. satıra göre açılırsa,

$$|A| = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} y^2-x^2 & z^2-x^2 \\ y^4-x^4 & z^4-x^4 \end{vmatrix} = (y^2-x^2)\cdot(z^4-x^4)-(y^4-x^4)\cdot(z^2-x^2)$$

$$= (y^2-x^2)\cdot(z^2-x^2)\cdot(z^2+x^2)-(y^2+x^2)\cdot(y^2-x^2)\cdot(z^2-x^2)$$

$$= (y^2-x^2)\cdot(z^2-x^2)\cdot(z^2-y^2) \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK

$$A = \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantını bulunuz.**

ÇÖZÜM

1. sütunda a^2, 2. sütunda b^2, 3. sütunda c^2 çarpanı olduğundan

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix} = a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

Son determinantta 1 sütun 2. ve 3. sütundan çıkarılırsa ve 1. satıra göre açılırsa;

$$|A| = a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = a^2b^2c^2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= a^2b^2c^2\left[(b-a)(c^2-a^2)-(c-a)(b^2-a^2)\right]$$

$$= a^2b^2c^2(b-a)(c-a)(c-b) \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -30 \quad \text{ise} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3x^2 \\ 4 & 0 & 2x^2 \\ 2y & -3y & x^2y \end{vmatrix}$$ **determinantının değeri nedir?**

ÇÖZÜM

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3x^2 \\ 4 & 0 & 2x^2 \\ 2y & -3y & x^2y \end{vmatrix}$$ determinantının 3. satırında y çarpanı 3. sütununda x^2 çarpanı olduğundan

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3x^2 \\ 4 & 0 & 2x^2 \\ 2y & -3y & x^2y \end{vmatrix} = x^2y \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -30x^2y \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK

$$\begin{vmatrix} 2a & x & y+z \\ 2a & y & x+z \\ 2a & z & x+y \end{vmatrix}$$ **determinantını bulunuz.**

ÇÖZÜM

Determinantta 1. sütunda 2a çarpanı olduğundan

$$\begin{vmatrix} 2a & x & y+z \\ 2a & y & x+z \\ 2a & z & x+y \end{vmatrix} = 2a \begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & x+z \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix}$$

2. sütunu 3. sütuna eklenirse 3. sütunda x + y + z çarpanı bulunur.

$$2a \begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & x+z \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix} = 2a \begin{vmatrix} 1 & x & x+y+z \\ 1 & y & x+y+z \\ 1 & z & x+y+z \end{vmatrix} = 2a(x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & z & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{bulunur.}$$

son determinantta 1. sütun ile 3. sütun aynı olduğundan determinant değeri sıfır olur.

ÖRNEK

$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & a^2-b^2 \\ ab+b^2 & a^2-ab \end{vmatrix}$ **determinantını hesaplayınız.**

ÇÖZÜM

$$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & a^2-b^2 \\ b(a+b) & a(a-b) \end{vmatrix} = (a+b)\cdot(a-b)\cdot\begin{vmatrix} a+b & a+b \\ b & a \end{vmatrix} = (a+b)\cdot(a-b)\cdot(a+b)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)^2\cdot(a-b)\cdot(a-b) = (a+b)^2\cdot(a-b)^2$$ bulunur.

ÖRNEK

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ **matrisinin determinantını bulunuz.**

ÇÖZÜM

Determinantın 1. satırı ile 2. satırı toplanıp 1. satıra yazılırsa:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2+3 & 1-1 & -1+1 & 0+0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Determinant 1. satıra göre açılırsa:

$|A| = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}$

$$= 5(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -45$$ bulunur

ÖRNEK

$\begin{vmatrix} 6 & -6 & x+2 \\ 7 & x-5 & 1 \\ x+3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

Determinantın 2. sütunu 3. sütuna eklenirse

$$\begin{vmatrix} 6 & -6 & x+2 \\ 7 & x-5 & 1 \\ x+3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -6 & x-4 \\ 7 & x-5 & x-4 \\ x+3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Determinantın 1. satırı 2. satırdan çıkartılırsa

$$\begin{vmatrix} 6 & -6 & x-4 \\ 7 & x-5 & x-4 \\ x+3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -6 & x-4 \\ 1 & x+1 & 0 \\ x+3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Determinant 3. sütuna göre açılırsa

$$\begin{vmatrix} 6 & -6 & x-4 \\ 1 & x+1 & 0 \\ x+3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (x-4)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & x+1 \\ x+3 & -1 \end{vmatrix} = (x-4)\cdot(-1-(x+1)\cdot(x+3)) = 0$$

$$(x-4)\cdot(-1-x^2-3x-x-3) = 0$$

$$(x-4)\cdot(x+2)^2 = 0$$

$$x = 4, \quad x_1 = x_2 = -2$$

Denklemin çözüm kümesi $\{-2, 4\}$ bulunur.

ÖRNEK $\begin{vmatrix} 2995 & 2992 \\ 2996 & 2994 \end{vmatrix}$ **determinantının değerini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\begin{vmatrix} 2995 & 2992 \\ 2996 & 2994 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2995 & 2992 \\ 2995+1 & 2992+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2995 & 2992 \\ 2995 & 2992 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2995 & 2992 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + (2 \cdot 2995 - 2992) = 2998 \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK A matrisi 3 x 3 türünden bir kare matris ve $|A| = 4m^3n^2$ dir. $B = \frac{1}{2mn}A$ ise **B matrisinin determinantı nedir?**

ÇÖZÜM

$$|B| = \left|\frac{1}{2mn}A\right| = \left(\frac{1}{2mn}\right)^3 |A|$$

$$= \frac{1}{8m^3n^3} \cdot 4m^3n^2 = \frac{1}{2n} \quad \text{bulunur.}$$

A 3x3 türünde olduğu için sabit çarpan determinant dışına $\left(\frac{1}{2mn}\right)^3$ olarak çıkartılır.

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -c & d \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} a+4c & b-4d \\ -c & d \end{bmatrix}$ matrisleri için $|A| = k$ ise **|B| nedir?**

ÇÖZÜM A matrisinde 2. satırın –4 katı 1. satırdan çıkarılarak B matrisi elde edilmiştir. Determinantın değeri değişmez $|A| = |B| = k$ bulunur.

EK MATRİS (ADJOİNT)

n inci sıradan $A = [a_{ij}]_{nxn}$ kare matrisi verilmiş olsun. A matrisinin a_{ij} terimlerinin yerine A_{ij} eşçarpanlarının (kofaktör) yazılmasıyla oluşan $[A_{ij}]$ matrisinin transpozuna (devriğine) A matrisinin ek (adjoint) matrisi denir ve $EkA = Adj(A)$ ile gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow EkA = [A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ **matrisinin ek matrisini bulunuz**

ÇÖZÜM

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -8 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 7 \qquad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -18 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 9$$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -8 \\ 7 & -18 & -5 \\ -3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow EkA = [A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} -8 & 7 & -3 \\ 0 & -18 & -6 \\ -8 & -5 & 9 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 5 & 2\end{bmatrix}$ **matrisinin ek matrisini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$A_{11}=(-1)^{1+1}[2]=2 \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}[3]=-3$

$A_{12}=(-1)^{1+2}[5]=-5 \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}[4]=4 \qquad \Rightarrow [A_{ij}]=\begin{bmatrix}2 & -5\\ -3 & 4\end{bmatrix}$

$\text{EkA}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -5 & 4\end{bmatrix}$ bulunur.

BİR MATRİSİN ÇARPMA İŞLEMİNE GÖRE TERSİ

n x n türünden A kare matrisi verilmiş olsun. $A.B = B.A = I_n$ koşulunu sağlayan nxn türünde B matrisi varsa, B matrisine A matrisinin çarpma işlemine göre tersi denir. $B = A^{-1}$ ile gösterilir.

ÖZELLİKLER:

A ve B n x n türünde kare matrisler ve $k \in R$ olmak üzere

1) $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$

2) $(A^{-1})^{-1} = A$

3) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

4) $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

5) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

6) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

7) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

UYARI:
1) Bir A kare matrisinin çarpmaya göre tersinin olması için $|A| \neq 0$ olmalıdır.
2) Bir A kare matrisinde $|A| = 0$ ise A matrisine **tekil (singüler) matris** denir. Eğer $|A| \neq 0$ ise A matrisine **tekil olmayan (regüler) matris** denir.
3) Bir A kare matrisinin çarpmaya göre tersi varsa tersi bir tanedir.

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{bmatrix}$ **matrisinin çarpmaya göre tersini bulunuz.**

ÇÖZÜM A matrisinin çarpmaya göre tersi $A^{-1}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ matrisi olsun.

$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_2$ olduğundan

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}a+3c & b+3d\\ -2a+4c & -2b+4d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Matrislerin eşitliğinden

$a+3c=1 \qquad b+3d=0$

$-2a+4c=0 \qquad -2b+4d=1$

denklem sistemleri çözülürse

$a=\frac{2}{5} \qquad b=-\frac{3}{10} \qquad c=\frac{1}{5} \qquad d=\frac{1}{10}$ bulunur.

Buna göre A matrisinin çarpma işlemine göre tersi

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{3}{10}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10}\end{bmatrix}$$ bulunur.

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$ **matrisinin çarpma işlemine göre tersini bulunuz.**

ÇÖZÜM A matrisinin çarpma işlemine göre tersi $A^{-1}=\begin{bmatrix}x&y&z\\t&k&\ell\\m&n&p\end{bmatrix}$ olsun.

$A\cdot A^{-1}=A^{-1}.A=I_3$ olduğundan

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x&y&z\\t&k&\ell\\m&n&p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x+2t+3m&y+2k+3n&z+2\ell+3p\\t+4m&k+4n&\ell+4p\\m&n&p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Matrislerin eşitliğinden

$$\begin{aligned}x+2t+3m&=1 & y+2k+3n&=0 & z+2\ell+3p&=0\\ t+4m&=0 & k+4n&=1 & \ell+4p&=0\\ m&=0 & n&=0 & p&=1\end{aligned}$$

Denklem sistemleri çözülürse;

$m=0,\ n=0,\ p=1,\ t=0,\ k=1,\ \ell=-4,\ x=1,\ y=-2,\ z=5$ olur.

Buna göre A matrisinin çarpma işlemine göre tersi,

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}x&y&z\\t&k&\ell\\m&n&p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&5\\0&1&-4\\0&0&1\end{bmatrix}$$ bulunur.

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&-6\\2&4&6\end{bmatrix}$ **matrisinin tersini bulunuz.**

ÇÖZÜM A matrisinde 3. satır 1. satırın 2 katı olduğundan $|A|=0$ olur. Bir matrisin tersinin olması için determinantının sıfırdan farklı olması gerekir. Bundan dolayı A matrisinin tersi yoktur.

BİR MATRİSİN ÇARPMA İŞLEMİNE GÖRE TERSİNİN EK MATRİS YARDIMIYLA BULUNMASI

TEOREM: **A matrisi n x n türünden bir kare matris ve $|A| \neq 0$ ise**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{EkA} \quad \text{dır.}$$

İSPAT: $|A|I = A\,\text{EkA}$ olduğundan bu eşitliğin iki tarafı A^{-1} ile çarpılırsa

$$A^{-1}(|A| \cdot I) = A^{-1}(A\,\text{EkA})$$

$$|A|(A^{-1} \cdot I) = (A^{-1}A) \cdot \text{EkA}$$

$$|A|A^{-1} = I \cdot \text{EkA} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{EkA} \quad \text{bulunur.}$$

UYARI: 2. sıradan bir kare matris $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ve $|A| = ad - bc \neq 0$ ise

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{EkA}$ olduğundan $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ dir.

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ **matrisinin çarpma işlemine göre tersini bulunuz.**

ÇÖZÜM $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 6 \cdot 3 = 2$ olduğundan A matrisinin tersi vardır.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{EkA} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$ **matrisinin çarpmaya göre tersini bulunuz.**

ÇÖZÜM $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - (-3) \cdot 2 = 13$ olduğundan, A matrisinin tersi vardır.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{EkA} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix} \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ **matrisinin çarpma işlemine göre tersini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 48 - 5 - (9 + 40 + 0) = -6$$ olduğundan, A matrisinin çarpma işlemine göre tersi vardır.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -20 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 12 \qquad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -14$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 13 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -9 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 10$$

$$\Rightarrow \text{EkA} = \begin{bmatrix} -20 & 12 & -14 \\ 5 & -3 & 2 \\ 13 & -9 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{EkA} = \frac{1}{-6}\begin{bmatrix} -20 & 12 & -14 \\ 5 & -3 & 2 \\ 13 & -9 & 10 \end{bmatrix}$$ bulunur.

ÖRNEK

$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. **A.C = B eşitliğini sağlayan C matrisini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 7 \cdot 1 = 1 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{EkA} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$ olur.

A.C = B eşitliğinin her iki yanını soldan A^{-1} ile çapılırsa

$$A^{-1}.(AC) = A^{-1}.B \Rightarrow (A^{-1}.A).C = A^{-1}.B$$

$$\Rightarrow I.C = A^{-1}.B$$

$$\Rightarrow C = A^{-1}.B$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} -25 & -19 \\ 14 & 11 \end{bmatrix}$$ bulunur.

ÖRNEK

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

$A^{-1}.X.B = I_2$ eşitliğini sağlayan X matrisini bulunuz.

ÇÖZÜM $A^{-1}XB = I_2$ eşitliğinde her iki yanının soldan A ile çarpalım,

$$A^{-1}XB = I_2 \Rightarrow A(A^{-1}XB) = A.I_2$$
$$\Rightarrow (A.A^{-1}XB) = A.I_2$$
$$\Rightarrow I_2(XB) = A.I_2$$
$$XB = A \text{ olur.}$$

Şimdi $X B = A$ eşitliğini sağdan B^{-1} ile çarpalım

$$X B = A \Rightarrow (X B).B^{-1} = A.B^{-1}$$
$$\Rightarrow X (B.B^{-1}) = A.B^{-1}$$
$$\Rightarrow X = A.B^{-1} \text{ olur.}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}EkB \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$X = A\cdot B^{-1} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

$C\cdot\left(B^T\right)^{-1} = A$ eşitliğini sağlayan B matrisi için **IBI nedir?**

ÇÖZÜM $C\cdot\left(B^T\right)^{-1} = A$ eşitliğinin her iki yanını soldan C^{-1} ile çarpalım.

$$C\cdot\left(B^T\right)^{-1} = A \Rightarrow C^{-1}\cdot\left(C\left(B^T\right)^{-1}\right) = C^{-1}\cdot A$$
$$\Rightarrow (\underbrace{C^{-1}\cdot C}_{I_2})\cdot(B^T)^{-1} = C^{-1}\cdot A$$
$$\Rightarrow \left(B^T\right)^{-1} = C^{-1}\cdot A \text{ (Her iki yanın tersini alalım.)}$$
$$\Rightarrow \left[\left(B^T\right)^{-1}\right]^{-1} = \left[C^{-1}\cdot A\right]^{-1}$$
$$\Rightarrow B^T = A^{-1}.C \text{ (Her iki yanın transpozesi alınırsa)}$$
$$\Rightarrow \left(B^T\right)^T = \left(A^{-1}C\right)^T$$
$$\Rightarrow B = C^T\cdot\left(A^{-1}\right)^T \text{ bulunur.}$$

$$B = C^T\cdot\left(A^{-1}\right)^T \Rightarrow |B| = \left|C^T\cdot\left(A^{-1}\right)^T\right| = \left|C^T\right|\cdot\left|A^{-1}\right|^T = \left|C^T\right|\frac{1}{|A|} = |C|\frac{1}{|A|}$$
$$= (5\cdot4-2)\cdot\frac{1}{(-3)\cdot3-(-2)\cdot4}$$
$$= -18 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$A=\begin{bmatrix}-3 & 9\\ 4 & -3\end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. $kI_2 + A$ matrisinin singüler olması için **k değerlerinin toplamı kaçtır?**

ÇÖZÜM

$$kI_2 + A = k\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 9\\ 4 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k-3 & 9\\ 4 & k-3\end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$kI_2 + A$ matrisinin singüler olması için $|kI_2 + A| = 0$ olması gerekir.

$$|kI_2 + A| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix}k-3 & 9\\ 4 & k-3\end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (k-3)\cdot(k-3)-36=0$$

$$\Rightarrow \quad (k-3)^2 = 36$$

Denklemi çözülürse;

$k = 9$, $k = -3$ bulunur. k değerlerinin toplamı $9 - 3 = 6$ bulunur.

ÖRNEK

A bir kare matris $A^3 = A^T$ ve $B = A^2\cdot\left(A^{-1}\cdot A^T\right)^T\cdot A^2$ ise **A.B matrisini bulunuz.**

ÇÖZÜM–1

$$B = A^2\cdot\left(A^{-1}\cdot A^T\right)^T\cdot A^2 = A^2\cdot\left(A^T\right)^T\cdot\left(A^{-1}\right)^T\cdot A^2 = A^2\cdot A\cdot\left(A^T\right)^{-1}\cdot A^2$$

$$= A\cdot A\cdot A\,(A\cdot A\cdot A)^{-1}\cdot A\cdot A \quad (A^T = A^3 \text{ verilmişti})$$

$$= \underbrace{A\cdot A^{-1}}_{I}\cdot\underbrace{A\cdot A^{-1}}_{I}\cdot\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}\cdot A\cdot A$$

$$= A\cdot A$$

$$= A^2 \quad \text{olur.}$$

Bundan dolayı; $A.B = A.A^2 = A^3$

$= A^T$ bulunur.

ÇÖZÜM–2

$$B = A^2\left(A^{-1}\cdot A^T\right)^T\cdot A^2 = A^2\left(A^T\right)^T\left(A^{-1}\right)^T\cdot A^2$$

$$= \underbrace{A^2\cdot A}_{A^T}\cdot\left(A^{-1}\right)^T\cdot A^2 = \underbrace{A^T\cdot\left(A^T\right)^{-1}}_{I}\cdot A^2$$

$$= I\cdot A^2$$

$$B = A^2 \quad \text{olur.}$$

Buradan;

$$A\cdot B = A\cdot A^2 = A^3 = A^T \quad \text{bulunur.}$$

ALT MATRİS

TANIM: A, mxn türünde bir matris olsun. A matrisinin kendisine veya A matrisinin bazı satır ya da sütunlarının atılmasıyla elde edilen matrise A matrisinin alt matrisi denir.

Örneğin:

$$A=\begin{bmatrix}4 & 5 & 3 & 2 & 1\\ 3 & 0 & -1 & -2 & 1\\ 4 & 3 & 2 & -5 & 4\\ 4 & -1 & -1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

matrisinde 2. sütununun atılmasıyla elde edilen

$$B=\begin{bmatrix}4 & 3 & 2 & 1\\ 3 & -1 & -2 & 1\\ 4 & 2 & -5 & 4\\ 4 & -1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

matrisi ve A matrisinin 4. ve 5. sütununun atılmasıyla elde edilen

$$C=\begin{bmatrix}4 & 5 & 3\\ 3 & 0 & -1\\ 4 & 3 & 2\\ 4 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

matrisleri A matrisinin alt matrisleridir.

BİR MATRİSİN RANKI

Bir A matrisinin kare alt matrislerinden determinantı sıfırdan fa'klı olan ve türü en büyük olan matrisin türüne **A matrisinin rankı** denir ve **rankA** ile gösterilir.

UYARI: **1)** A, nxn türünde bir kare matris ve $|A| \neq 0$ ise rankA = n dir.

2) A, mxn türünde bir matris ise rankA ≤ min(m,n) dir.

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & 0 & 5\end{bmatrix}$ **matrisinin rankını bulunuz.**

ÇÖZÜM A matrisi 3x3 türünde rank A ≤ 3 olur.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & 0 & 5\end{vmatrix}=4\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 5\end{vmatrix}$$

$$=4(5-3)=8$$

$|A| \neq 0$ olduğundan rankA = 3 bulunur.

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}-12 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ **matrisinin rankını bulunuz.**

ÇÖZÜM A, 2x2 türünde $\text{rank}A \le 2$ olur.

$|A|=\begin{vmatrix}-12 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-36\neq 0$ olduğundan $\text{rank}A=2$ bulunur.

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 6 & 14\end{bmatrix}$ **matrisinin rankını bulunuz.**

ÇÖZÜM A, 2x2 türünde olduğundan $\text{rank}A \le 2$ olur.

$|A|=0$ olduğundan A matrisinin alt matrisleri 1x1 türünde ve bunlardan en az birinin determinantı sıfırdan farklı ise $\text{rank}A=1$ olur.

A matrisinin tüm alt matrisleri: $[3]$, $[7]$, $[6]$, $[14]$

$|3|=3\neq 0$ olduğundan $\text{rank}A=1$ bulunur.

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 2\\ -2 & -6 & -4\end{bmatrix}$ **matrisinin rankını bulunuz.**

ÇÖZÜM A, 3x3 türünde olduğundan $\text{rank}A \le 3$ olur.

A matrisinde 2. satırın –2 katı 3. satırı verdiğinden $|A|=0$ olur. A matrisinin alt kare matrislerinden en büyüğü 2x2 türünden matrislerdir. Bunlar

$A_1=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ $A_2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ $A_3=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & -6\end{bmatrix}$...

Bunlardan birinin determinantı sıfırdan farklı ise $\text{rank}A=2$ bulunur.

$|A_1|=\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=11\neq 0$ olduğundan $\text{rank}A=2$ bulunur.

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}3 & 5 & 3\\ -2 & 4 & -1\\ 1 & 6 & 4\\ 2 & 1 & -3\end{bmatrix}$ **matrisinin rankını bulunuz.**

ÇÖZÜM A, matrisi 4x3 türünde olduğundan $\text{rank}A \le 3$ olur. A matrisinin alt kare matrislerinden en büyüğü 3x3 türünden matrislerdir. Bunlardan birinin determinantı sıfırdan farklı ise $\text{rank}A=3$ olur.

A matrisinin 3x3 türündeki alt matrislerinden biri

$A_1=\begin{bmatrix}3 & 5 & 3\\ -2 & 4 & -1\\ 1 & 6 & 4\end{bmatrix}$ olup determinantı $|A_1|=\begin{vmatrix}3 & 5 & 3\\ -2 & 4 & -1\\ 1 & 6 & 4\\ 3 & 5 & 3\\ -2 & 4 & -1\end{vmatrix}$

$=48-36-5-(12-18-40)=7+46=53$

$|A_1|\neq 0$ olduğundan $\text{rank}A=3$ bulunur.

ÖRNEK $A=\begin{bmatrix}3 & 10 & 2\\ 4 & 2 & k\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$ matrisinin rankı k nın hangi değeri için 3 olamaz?

ÇÖZÜM $|A|=0$ ise $\text{rank}A=3$ olamaz.

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 10 & 2\\ 4 & 2 & k\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 10 & 2\\ 4 & 2 & k\end{vmatrix}=0 \Rightarrow 6-8+20k-(8-3k+40)=0 \Rightarrow 23k=50 \Rightarrow k=\frac{50}{23} \text{ bulunur.}$$

DOĞRUSAL (LİNEER) DENKLEM SİSTEMLERİ

TANIM: $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ **biçimindeki denkleme, doğrusal (lineer) denklem denir. Burada** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ **reel sayılarına denklemin katsayıları** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **değişkenlerine de bilinmeyenler denir.**

$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$ **ifadesine denklemin birinci yanı, b reel sayısına da denklemin ikinci yanı denir.**

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\}$$

biçimindeki n bilinmeyenli m denklemin oluşturduğu sisteme, doğrusal (lineer) denklem sistemi denir.

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ **'e denklem sisteminin bilinmeyenleri,** $a_{11}, a_{12}, \cdots a_{1n}$ **'e denklemin katsayıları,** $b_1, b_2, \cdots, b_m$ **sayılarına da denklem sisteminin sabitleri denir.**

Denklem sistemindeki katsayıların oluşturduğu

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

matrisine denklem sisteminin katsayılar matrisi, doğrusal denklemin sabitlerinin oluşturduğu

$$B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$

matrisine denklem sisteminin sabitler matrisi, doğrusal denklemin bilinmeyenlerinin oluşturduğu

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

matrisine denklem sisteminin bilinmeyenler matrisi denir.

$$[AB] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

matrisine lineer (doğrusal) denklem sisteminin arttırılmış matrisi adı verilir. Bu sistemin çözümünün olabilmesi için $[A]$ ve $[AB]$ matrislerinin ranklarının eşit olması gerekir.

Doğrusal denklem sistemi matrisler yardımıyla

$$AX = B \quad \text{veya} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$ **biçiminde yazılır.**

$$A \cdot X = B$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$ **bulunur.**

ÖRNEK

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 11 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 9 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= -6 \end{aligned}\right\}$$ denklem sistemini **matrisler yardımıyla ifade ediniz.**

ÇÖZÜM

Katsayılar matrisi $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ Sabitler matrisi $B = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix}$

Bilinmeyenler matrisi $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ olur.

Sistemin matrisler biçimindeki ifadesi

$$AX = B \quad \text{veya} \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix}$$ bulunur.

ÖRNEK

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2-x_3+2x_4&=7\\ x_2+x_3-5x_4&=12\\ x_1-3x_2+x_4&=-9\\ 3x_1+2x_2+4x_3&=6 \end{aligned}\right\}$$ denklem sistemini **matrisler yardımıyla ifade ediniz.**

ÇÖZÜM

Katsayılar matrisi $A=\begin{bmatrix}1&1&-1&2\\0&1&1&-5\\1&-3&0&1\\3&2&4&0\end{bmatrix}$ Sabit matrisi $B=\begin{bmatrix}7\\12\\-9\\6\end{bmatrix}$

Bilinmeyenler matrisi $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$ olur.

Sistemin matrisler biçimindeki ifadesi

$AX=B$ veya $\begin{bmatrix}1&1&-1&2\\0&1&1&-5\\1&-3&0&1\\3&2&4&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\12\\-9\\6\end{bmatrix}$ olur.

ELEMANTER SATIR İŞLEMLERİ

TANIM: Bir doğrusal denklem sisteminde

1) **Herhangi iki denklemin yerlerini değiştirmek,**
2) **Herhangi bir denklemi bir $k\in R\setminus\{0\}$ skaleriyle çarpmak,**
3) **Herhangi bir denklemi bir $k\in R\setminus\{0\}$ skaleriyle çarpıp diğer denkleme eklemek,**

işlemlerine elemanter satır işlemleri denir.

Bir (ε_1) denklem sistemine sonlu sayıda elemanter satır işlemleri uygulandığında elde edilen (ε_2) sistemi (ε_1) sistemine denktir denir. $\varepsilon_1\sim\varepsilon_2$ ile gösterilir. Denklem sistemlerinin çözüm kümeleri birbirine eşittir. Bundan dolayı bir denklem sistemine, sonlu sayıda elemanter satır işlemleri uygulayarak çözümü daha basit bir denklem sistemi elde etmek mümkündür. Elde edilen denklem sistemini çözmek ilk sistemi çözmekten daha kolaydır.

Denklem sistemlerinde geçerli olan satır işlemleri $[A\ B]$ artırılmış katsayılar matrisinin satırları veya sütunları içinde geçerlidir. Bu satırlar veya sütunlar üzerinde yapılan elemanter satır işlemleri sonucunda elde edilen $[A\ B]$ matrisine $[A\ B]$ nin echelon (eşelon) biçimi denir.

Bir A matrisine sonlu sayıda elemanter satır veya sütun işlemleri uygulandığında elde edilen B matrisi, A matrisine denktir denir. $A\sim B$ ile gösterilir. Denk matrislerin rankları birbirine eşittir.

ÖRNEK

$x+2y-z=-2$
$3x+8y+2z=30$
$4x+9y-z=15$

denklem sisteminin çözümünü **echelon (eşelon) biçimi kullanarak bulunuz.**

ÇÖZÜM

Denklem sisteminin artırılmış katsayılar matrisi

$$[AB]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&-2\\3&8&2&30\\4&9&-1&15\end{array}\right]\overset{\varepsilon_1}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&-2\\0&2&5&36\\4&9&-1&15\end{array}\right]\overset{\varepsilon_2}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&-2\\0&2&5&36\\0&1&3&23\end{array}\right]\overset{\varepsilon_3}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-6&-38\\0&2&5&36\\0&1&3&23\end{array}\right]$$

$$\overset{\varepsilon_4}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-6&-38\\0&1&2&13\\0&1&3&23\end{array}\right]\overset{\varepsilon_5}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-6&-38\\0&1&2&13\\0&0&1&10\end{array}\right]\overset{\varepsilon_6}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&22\\0&1&2&13\\0&0&1&10\end{array}\right]\overset{\varepsilon_7}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&22\\0&1&0&-7\\0&0&1&10\end{array}\right]$$

ε_1 : 1. satırın –3 katı 2. satıra eklenirse

ε_2 : 1. satırın –4 katı 3. satıra eklenirse

ε_3 : 2. satırın –1 katı 1. satıra eklenirse

ε_4 : 3. satır 2. satırdan çıkarılırsa

ε_5 : 2. satır 3. satırdan çıkarılırsa

ε_6 : 3. satırın 6 katı 1. satıra eklenirse

ε_7 : 3. satırın 2 katı 2. satırdan çıkarılırsa

Elde edilen son ifade

$AX = B$ olduğundan $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22\\-7\\10\end{bmatrix}$ bulunur.

ÖRNEK

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$
$3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 9$
$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 12$

denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM

$$[AB]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&3\\3&7&4&9\\2&-1&3&12\end{array}\right]\underset{\varepsilon_2}{\overset{\varepsilon_1}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&3\\0&1&1&0\\0&-5&1&6\end{array}\right]\underset{\varepsilon_4}{\overset{\varepsilon_3}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&3\\0&1&1&0\\0&0&6&6\end{array}\right]$$

$$\underset{\varepsilon_6}{\overset{\varepsilon_5}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&4\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{array}\right]\underset{\varepsilon_7}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&4\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{array}\right]$$

ε_1 : satır 2 – (3x satır1)

ε_2 : satır 3 – (2x satır1)

ε_3 : satır 1 – (2x satır 2)

ε_4 : satır 3 + (5x satır 2)

ε_5 : $\frac{1}{6}$ x satır 3

ε_6 : satır 1 + satır 3

ε_7 : satır 2 – satır 3

Verilen denklem sistemi $AX = B$ olduğundan $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-1\\1\end{bmatrix}$ bulunur.

UYARI: A katsayılar matrisi, B sabitler matrisi ve X bilinmeyenler matrisi ise

1) A bir kare matris ise

i) $|A| \neq 0$ olduğunda $X = A^{-1}.B$ dir.

ii) $|A| = 0$ olduğunda sistemin çözümü yoktur.

2) A bir karesel matris değilse

i) $m > n$ olduğunda n tane denklemden oluşan bir sistemin çözümü bulunur. Bulunan bu çözüm geri kalan denklemleri sağlarsa ilk sistemin de çözümü olur.

ii) $m < n$ olduğunda $n - m$ tane bilinmeyen $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = \lambda_2 \ldots x_{n-m} = \lambda_{m-n}$ gibi parametre olarak seçilir ve geri kalan m tane bilinmeyen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-m}$ lere bağımlı olur.

ÖRNEK

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 13$$
$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 9$$
$$5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -7$$
$$6x_1 - 4x_2 + 8x_3 - 2x_4 = 16$$

Denklem sistemini çözünüz.

ÇÖZÜM

Denklem sisteminin matris gösterimi

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & -4 & 8 & -2 \end{bmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ -7 \\ 16 \end{bmatrix}}_{B} \text{ biçiminde yazılır.}$$

Kat sayılar matrisin determinantı $|A| = 0$ olduğundan denklem sisteminin çözümü yoktur.

ÖRNEK

$$x + 2y + 3z = 3$$
$$2x + 4y + 5z = 4$$
$$3x + 5y + 6z = -1$$

Denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Denklem sisteminin matris gösterimi

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}}_{B} \text{ biçiminde yazılır.}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ ve } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -1 \text{ olduğundan } X = A^{-1}.B \text{ biçiminde tek çözümü vardır.}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{EkA olduğundan } A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}.B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$x = -11$, $y = 4$, $z = 2$ elde edilir.

ÖRNEK $\left.\begin{array}{l} x-5y+2z=4 \\ x+2y-5z=11 \end{array}\right\}$ **denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM Denklem sayısı bilinmeyenden bir fazladır.

Denklem sisteminin echolon (eşelon) formu:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -5 & 11 \end{array}\right] \overset{\varepsilon_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & -7 & 7 \end{array}\right] \overset{\varepsilon_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{\varepsilon_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \text{ olur.}$$

ε_1 = (2. satır) – (1. satır)

$\varepsilon_2 = \dfrac{1}{7}$x(2. satır)

ε_3 = (1.satır) + 5x(2. satır)

Denklem sistemi;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x-3z=9 \\ y-z=1 \end{array}$$ denkleminde $z = \lambda$ parametresi seçilirse

$y = 1 + \lambda \qquad x = 9 + 3\lambda$ olur. Denklemin çözümü

$x = 9 + 3\lambda, \quad y = 1 + \lambda, \quad z = \lambda : \lambda \in R$ dir.

DOĞRUSAL (LİNEER) DENKLEM SİSTEMLERİNİN CRAMER YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

denklem sisteminin matris gösterimi: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ dir.

Denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ olsun.

Katsayılar determinantında 1. sütundaki elemanlar yerine sabitler matrisinin elemanları yazılarak elde edilen determinanta Δ_1, 2. sütundaki elemanlar yerine sabitler matrisinin elemanları yazılarak elde edilen determinanta Δ_2, bu şekilde $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ determinantları oluşturulursa;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdots \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix} \text{ dir.}$$

1) $\Delta \neq 0$ ise denklem sisteminin tek çözümü vardır ve bu çözüm;$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $\cdots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$ dir.

2) $\Delta = 0$ ve $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ lerden en az biri sıfırdan farklı ise sistemin çözümü yoktur.

3) $\Delta = 0$ ise ve $\Delta_1 = \Delta_2 = \ldots\ldots = \Delta_n = 0$ ise sistemin sonsuz çözümü vardır.

ÖRNEK

$\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ x-y=-3 \end{array}\right\}$ **denklem sistemini çözünüz.**

ÇÖZÜM

Denklem sistemini cramer metodu ile çözelim.

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0$ olduğundan denklem sisteminin tek çözümü vardır.

$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-5+3}{-2} = 1$ $\qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3-5}{-2} = 4$

sistemin çözümü $x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ bulunur.

ÖRNEK

$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 = 5 \\ 4x_1 + x_2 = 7 \end{array}\right\}$ **denklem sistemini çözünüz.**

ÇÖZÜM

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2+4 = 6 \neq 0$ olduğundan denklem sisteminin tek çözümü vardır.

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{5+7}{6} = 2$ $\qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}}{6} = \frac{14-20}{6} = -1$

sisteminin çözümü $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ bulunur.

Bu denklem sistemleri yerine koyma veya yok etme metodu ile çözülebilir.

ÖRNEK

$\left.\begin{array}{l} 3x+2y=4 \\ 3x+2y=-m \end{array}\right\}$ **denklem sisteminin sonsuz çözümü olması için m ne olmalıdır?**

ÇÖZÜM

Cramer metoduna göre $\Delta = 0$ ve $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ olması gerekir.

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ ve $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -m & 2 \end{vmatrix} = 8+2m = 0 \Rightarrow m = -4$ bulunur.

ÖRNEK

$\left.\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \end{array}\right\}$ **denklem sistemini çözünüz.**

ÇÖZÜM

Cramer metodu ile

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$ olduğundan tek çözümü vardır.

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}3&-2&1\\2&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}}{16}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$$

$$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1&3&1\\3&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}}{16}=\frac{-12}{16}=-\frac{3}{4}$$

$$x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1&-2&3\\3&1&2\\0&1&1\end{vmatrix}}{16}=\frac{14}{16}=\frac{7}{8}\quad \text{bulunur.}$$

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{8}\\-\frac{3}{4}\\\frac{7}{8}\end{bmatrix}$$

ÖRNEK $\left.\begin{aligned}2x_1+3x_2+4x_3&=4\\x_1+ax_2+2x_3&=5\\4x_1+bx_2+8x_3&=10\end{aligned}\right\}$ **denkleminin sonsuz çözümü olması için a ile b arasında ki bağıntı nedir?**

ÇÖZÜM Cramer metoduna göre denklem sisteminin sonsuz çözümü olması için

$\Delta=0$ ve $\Delta_1=0$, $\Delta_2=0$, $\Delta_3=0$ olması gerekir.

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&3&4\\1&a&2\\4&b&8\end{vmatrix}=0 \text{ dır.}\qquad \Delta_1=\begin{vmatrix}4&3&4\\5&a&2\\10&b&8\end{vmatrix}=0 \Rightarrow -2a+3b=15$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&4&4\\1&5&2\\4&10&8\end{vmatrix}=0$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2&3&4\\1&a&5\\4&b&10\end{vmatrix}=0 \Rightarrow -2a+3b=15$$

bulunur. a ile b arasındaki bağıntı $-2a+3b=15$ olur.

HOMOGEN DOĞRUSAL (LİNEER) DENKLEM SİSTEMLERİ

Doğrusal denklem sistemlerinin her birinde ikinci tarafların sıfır olmadığını kabul ettik. Eğer ikinci taraftaki sabitler matrisi bir sıfır matrisi ise denklem sistemine **homogen doğrusal denklem sistemi** adı verilir.

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=0\\\vdots\qquad\vdots\qquad\qquad&\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=0\end{aligned}$$

Homogen denklem sistemlerinde $\Delta_1=\Delta_2=\ldots\ldots=\Delta_n=0$ olduğundan

1) $\Delta\neq 0$ için sistemin tek çözümü $(x_1, x_2, \ldots, x_n)=(0, 0, \ldots\ 0)$ dır.
Buna sistemin apaçık çözümü denir.

2) $\Delta=0$ için sistemin sonsuz çözümü vardır.

ÖRNEK

$\left.\begin{array}{l}5x-3y=0\\2x+4y=0\end{array}\right\}$ homogen sistemini çözünüz.

ÇÖZÜM

$\Delta=\begin{vmatrix}5 & -3\\2 & 4\end{vmatrix}=20+6=26\neq 0$ olduğundan sıstemin (x,y) = (0,0) apaçık çözümünden başka çözümü yoktur.

ÖRNEK

$\left.\begin{array}{r}3x_1-2x_2+x_3=0\\2x_1-3x_2+x_3=0\\x_1+2x_2-x_3=0\end{array}\right\}$ **homogen denklem sistemini çözünüz.**

ÇÖZÜM

$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\2 & -3 & 1\\1 & 2 & -1\end{vmatrix}=4\neq 0$ olduğundan sistemin $(x_1, x_2, x_3)=(0,0,0)$ apaçık çözümünden başka çözümü yoktur.

ÖRNEK

$\left.\begin{array}{r}2x+4y+z=0\\x+12y+2z=0\\3x+16y+3z=0\end{array}\right\}$ **homogen doğrusal denklem sistemini çözünüz.**

ÇÖZÜM

$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\1 & 12 & 2\\3 & 16 & 3\end{vmatrix}=0$ olduğundan sistemin sonsuz çözümü vardır.

$$\left.\begin{array}{ll}S_1: & 2x+4y+z=0\\S_2: & x+12y+2z=0\\S_3: & 3x+16y+3z=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}2x+4y+z=0\\x+12y+2z=0\end{array}\right\}$$

Denklemlerinde $z=t$ seçilirse

$\left.\begin{array}{l}2x+4y=-t\\x+12y=-2t\end{array}\right\}$ sistemi çözülürse

$x=-\dfrac{t}{5},\quad y=-\dfrac{3t}{20}$ bulunur. Buna göre t ye bağlı çözüm kümesi;

$Ç=\left\{\left(-\dfrac{t}{5},\ -\dfrac{3t}{20},\ t\right);\ t\in R\right\}$ bulunur.

ÖRNEK

$\left.\begin{array}{r}2x-y-z=0\\x+a\cdot y+z=0\\x+y+a\cdot z=0\end{array}\right\}$ homojen denklem sisteminin (0, 0, 0) çözümünden başka **bir çözümünün olması için a nın pozitif değeri kaç olmalıdır?**

ÇÖZÜM

$\Delta=0$ için sistemin (0, 0, 0) dan başka bir çözümü vardır.

$\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\1 & a & 1\\1 & 1 & a\end{vmatrix}=0\Rightarrow$ $a^2+a-2=0$ denklemi elde edilirse

$a=1\quad a=-2$ Pozitif kökü $a=1$ bulunur.

VEKTÖR UZAYI

TANIM: Boş olmayan bir V kümesi verilmiş olsun. V kümesinde $\forall$ (x,y) $\in$ VxV için T(x,y) = x + y ile tanımlı T: VxV $\to$ V fonksiyonu (toplama işlemi) ve R gerçel sayılar cismi olmak üzere, $\forall$(r,x) $\in$ RxV için S(r, x) = rx ile tanımlı S: RxV $\to$ V fonksiyonu (skalerle çarpma işlemi) verilmiş olsun. Aşağıdaki aksiyomlar gerçekleniyorsa V kümesine R gerçel sayılar cismi üzerinde vektör uzayı ya da gerçel vektör uzayı denir ve V(R) ile gösterilir.

1. (V, +) sistemi değişmeli gruptur.

2.

a)	**$\forall r \in R$**	**ve**	**$\forall x, y \in V$**	**için**	**$r(x+y) = rx + ry$**
b)	**$\forall r, s \in R$**	**ve**	**$\forall x \in V$**	**için**	**$(r+s)x = rx + sx$**
c)	**$\forall r, s \in R$**	**ve**	**$\forall x \in V$**	**için**	**$r(sx) = (rs)x$**
d)	**$1 \in R$**	**ve**	**$\forall x \in V$**	**için**	**$1x = x$ dir.**

V(R) vektör uzayında V kümesinin elemanlarına vektör, R kümesinin elemanlarına da skaler denir.

UYARI–1: Yukarıdaki vektör uzayı tanımında gerçel sayı cismi yerine, karmaşık sayı cismi de alınabilir. Böylece elde edilen vektör uzayına **karmaşık vektör uzayı** denir. Bu bölümde gerçel vektör uzaylarından başka vektör uzaylarını incelemeyeceğimiz için **gerçel vektör uzayı** ifadesi yerine **vektör uzayı** ifadesini kullanacağız.

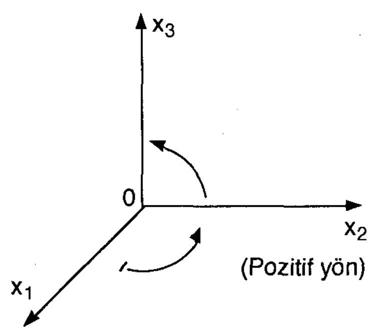
UYARI–2: $R^n = RxRx\cdots xR = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): x_1, x_2, \cdots x_n \in R\}$ kümesi,

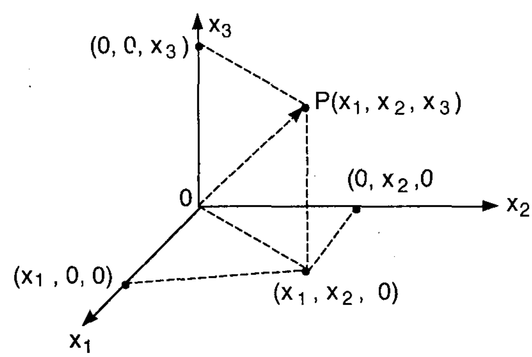
i) $(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$ toplama

ii) $r \cdot (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (rx_1, rx_2, \cdots, rx_n)$ skalerle çarpma

işlemlerine göre R de bir vektör uzayıdır. Özel olarak R^2 ile düzlem, R^3 ile üç boyutlu uzay gösterilir. Bu nedenle düzlemdeki bir vektör (x_1, x_2), üç boyutlu uzaydaki bir vektör (x_1, x_2, x_3) olarak alınır.

UZAYDA DİK KOORDİNAT SİSTEMİNDE (x_1, x_2, x_3) VEKTÖRÜNÜN GÖSTERİMİ





$(x_1, 0, 0)$ noktasından $(0x_2, 0x_3)$ düzlemine paralel bir düzlem, $(0, x_2, 0)$ noktasından $(0x_1, 0x_3)$ düzlemine paralel bir düzlem, $(0, 0, x_3)$ noktasından $(0x_1, 0x_2)$ düzlemine paralel bir düzlem çizilir. Bu üç düzlemin arakesiti (x_1, x_2, x_3) üçlüsüne karşılık gelen noktadır. Bundan böyle **(x_1, x_2, x_3) üçlüsüne karşılık gelen nokta** yerine kısaca **(x_1, x_2, x_3) noktası** diyeceğiz.

UYARI–3:

- Bütün gerçel sayı dizilerinin kümesi A olsun. A kümesi, R cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.
- R kümesi, + işlemine göre Q(Rasyonel Sayılar) üzerinde bir vektör uzayıdır.
- mxn türünden bütün matrislerin M_{mn} kümesi R cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.
- Katsayıları gerçel sayı olan tüm polinomların $R_{[x]}$ kümesi, R cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.
- $[a,b]$ aralığında tanımlı bütün gerçel değerli fonksiyonların $F[a,b]$ kümesi, R cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.
- Z/5 kümesi, R cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

ALT VEKTÖR UZAYI

TANIM: V bir vektör uzayı ve $A \subset V$, $A \neq \varnothing$ olsun. A kümesi toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalı ise yani;

$\forall x,y \in A$ ve $\forall r \in R$ içn

i) $x + y \in A$

ii) $rx \in A$ oluyorsa A ya, V nin bir altuzayı denir.

ÖRNEK Bütün gerçel sayı dizilerinin kümesi S olsun. Dizilerde toplama ve bir gerçel sayı ile çarpma işlemlerine göre S kümesinin, R cismi üzerinde bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

1) (S, +) sisteminin değişmeli bir grup olduğunu gösterelim.

a) S kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

b) $\forall (a_n),(b_n),(c_n) \in S$ için

$$(a_n)+((b_n)+(c_n)) = (a_n)+(b_n+c_n) = (a_n+(b_n+c_n))$$
$$= ((a_n+b_n)+c_n) = ((a_n)+(b_n))+(c_n)$$

olduğundan, S kümesinde toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

c) $\forall (a_n) \in S$ için

$$(a_n)+(0) = (a_n+0) = (a_n) \text{ ve } (0)+(a_n) = (0+a_n) = (a_n)$$

olduğundan, S kümesinde toplama işlemine göre etkisiz eleman (0) dizisidir.

d) $\forall (a_n) \in S$ için

$$(a_n)+(-a_n) = (a_n-a_n) = (0) \text{ ve } (-a_n)+(a_n) = (-a_n+a_n) = (0)$$

olduğundan, S kümesinde (a_n) elemanının toplamsal tersi $(-a_n)$ dir.

e) $\forall (a_n),(b_n) \in S$ için

$$(a_n)+(b_n) = (a_n+b_n) = (b_n+a_n) = (o_n)+(a_n)$$

olduğundan, S kümesinde toplama işleminin değişme özelliği vardır. Yani (S, +) sistemi değişmeli bir gruptur.

2) **a)** $\forall r \in R$ ve $\forall (a_n),(b_n) \in S$ için

$$r[(a_n)+(b_n)] = r(a_n+b_n) = (r(a_n+b_n)) = (ra_n+rb_n)$$
$$= (ra_n)+(rb_n) = r(a_n)+r(b_n) \text{ dir.}$$

b) $\forall r,s \in R$ ve $\forall (a_n) \in S$ için

$$(r+s)(a_n) = ((r+s)a_n) = (ra_n+sa_n)$$
$$= (ra_n)+(sa_n) = r(a_n)+s(a_n) \text{ dir.}$$

c) $\forall r,s \in R$ ve $\forall (a_n) \in S$ için

$$r(s(a_n)) = r(sa_n) = (r(sa_n)) = ((rs)a_n) = (r{\cdot}s)(a_n) \text{ dir.}$$

d) $1 \in R$ ve $\forall (a_n) \in S$ için $1{\cdot}(a_n) = (1a_n) = (a_n)$ dir.

Sonuç: S kümesi, R cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

ÖRNEK

$A = \{(x_1,x_2) | (x_1,x_2) \in R^2 \wedge x_1 - 3x_2 = 0\}$ kümesinin **R^2 nin bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.**

ÇÖZÜM

1) $(x_1,x_2) \in A \Rightarrow x_1 - 3x_2 = 0$

$(y_1,y_2) \in A \Rightarrow + \; y_1 - 3y_2 = 0$

$$(x_1+y_1) - 3(x_2+y_2) = 0$$

$$\Rightarrow (x_1+y_1,\ x_2+y_2) \in A$$

$$\Rightarrow (x_1,x_2)+(y_1,y_2) \in A \text{ olduğundan}$$

A kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

ÇÖZÜM

2) $(x_1,x_2) \in A \Rightarrow x_1 - 3x_2 = 0$

$$\Rightarrow k(x_1 - 3x_2) = 0$$

$$\Rightarrow kx_1 - 3kx_2 = 0$$

$$\Rightarrow (k{\cdot}x_1, kx_2) \in A$$

$$\Rightarrow k(x_1,x_2) \in A \text{ olduğundan}$$

A kümesi skalerle çarpma işlemine göre kapalıdır. A kümesi R^2 nin bir alt uzayıdır.

VEKTÖRLERİN DOĞRUSAL (LİNEER) BİLEŞİMİ VE VEKTÖRLERİN ÜRETTİĞİ KÜME

V bir vektör uzayı, $v_1, v_2, v_3, \dots v_n \in V$ ve

$r_1, r_2, r_3, \dots, r_n \in R$ olmak üzere,

$r_1V_1 + r_2V_2 + r_3V_3 + \dots + r_nV_n \in V$ vektörüne $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ vektörlerinin **doğrusal (lineer) bileşimi** denir.

ÖRNEK **(2, –3) ve (–1, 4) vektörlerinin tüm doğrusal bileşimlerini yazınız.**

ÇÖZÜM $r_1, r_2 \in R$ olmak üzere bu iki vektörün tüm doğrusal bileşimleri

$$r_1(2,-3)+r_2(-1,4)=(2r_1,-3r_1)+(-r_2,4r_2)$$
$$=(2r_1-r_2,\,-3r_1+4r_2) \text{ vektörüdür.}$$

ÖRNEK (5, –7) vektörünü, (–2, 1) ve (–1, 5) vektörlerinin doğrusal bileşimi olarak yazınız.

ÇÖZÜM

$$r_1(-2,1)+r_2(-1,5)=(5,-7)$$
$$(-2r_1,r_1)+(-r_2,5r_2)=(5,-7)$$
$$(-2r_1-r_2,\,r_1+5r_2)=(5,-7)$$
$$\Rightarrow \left.\begin{aligned}-2r_1-r_2&=5\\ r_1+5r_2&=-7\end{aligned}\right\} \text{ sisteminden } \begin{aligned}r_1&=-2\\ r_2&=-1\end{aligned} \text{ bulunur. Buradan}$$
$$(5,-7)=-2(-2,1)-(-1,5) \text{ yazılır.}$$

UYARI: $e_1 = i = (1, 0)$, $e_2 = j = (0, 1)$ vektörleri R^2 de

$e_1 = i = (1, 0, 0)$, $e_2 = j = (0, 1, 0)$, $e_3 = k = (0, 0, 1)$ vektörleri R^3 de birim vektörleri gösterir.

R^2 deki her (x_1,x_2) vektörü $(x_1,x_2)=x_1e_1+x_2e_2$

$(x_1,x_2)=x_1i+x_2j$

R^3 deki her (x_1,x_2,x_3) vektörü $(x_1,x_2,x_3)=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$

$(x_1,x_2,x_3)=x_1i+x_2j+x_3k$

biçiminde birim vektörlerin doğrusal bileşimi olarak yazılır.

TANIM: V bir vektör uzayı ve $v_1, v_2, v_3, \dots v_n \in V$ olsun.

$v_1, v_2, v_3 \dots v_n$ vektörlerinin doğrusal bileşimlerinin oluşturduğu

$U=\{r_1v_1+r_2v_2+r_3v_3+\cdots+r_nv_n : r_1,r_2,r_3,\cdots,r_n \in R\}$ kümesine $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ vektörlerinin ürettiği (gerdiği) küme, $\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$ kümesine de U kümesinin üreteci denir. U, V nin bir alt uzayıdır.

ÖRNEK R^3 de (1, –1, 0) ve (2, 0, 3) vektörlerinin **gerdiği alt uzayı bulunuz.**

ÇÖZÜM (1, –1, 0) ve (2, 0, 3) vektörlerinin gerdiği alt uzay

$\{r_1(1,-1,0)+r_2(2,0,3): r_1, r_2 \in R\}$ dir. Alt uzayın herhangi bir vektörü (x,y,z) olsun. x, y, z arasındaki bağıntı alt uzayın denklemini verir.

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= r_1(1,-1,0)+r_2(2,0,3)\\ &= (r_1,-r_1,0)+(2r_2,0,3r_2)\\ &= (r_1+2r_2,-r_1,3r_2) \text{ den}\end{aligned}$$

$x = r_1+2r_2,\ y=-r_1,\ z=3r_2$ dir.

$r_1=-y \quad r_2=\dfrac{z}{3}$ değerleri $x = r_1+2r_2$ de yerine konursa

$$x=-y+2\cdot\frac{z}{3} \Rightarrow 3x=-3y+2z$$

$\Rightarrow 3x+3y-2z=0$ elde edilir ki bu denklemde gerilen alt uzayın denklemidir .

VEKTÖRLERİN DOĞRUSAL BAĞIMLILIĞI VE DOĞRUSAL BAĞIMSIZLIĞI

V bir vektör uzayı ve $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ olsun

i) $r_1, r_2, \dots, r_n \in R$ sayılarından en az biri sıfırdan farklı olmak üzere,

$r_1v_1 + r_2v_2 + \dots + r_nv_n = 0$ koşulu sağlanıyorsa $v_1, v_2, \dots, v_n$ **vektörleri doğrusal bağımlıdır** denir.

ii) $r_1v_1 + r_2v_2 + \dots + r_nv_n = 0$ eşitliği yalnız $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$ için sağlanıyorsa $v_1, v_2, \dots, v_n$ **vektörleri doğrusal bağımsızdır** denir.

UYARI:
i) R^n de alınan n tane vektörün bileşenlerinin alt alta yazılmasıyla elde edilen n boyutlu determinantın değeri sıfır ise vektörler doğrusal bağımlı, sıfırdan farklı ise doğrusal bağımsızdır. Doğrusal bağımlı vektörler uzayı germezler. Doğrusal bağımsız vektörler uzayı gererler.
ii) n boyutlu uzayda n + 1 tane vektör daima doğrusal bağımlıdır.

ÖRNEK R^2 de (3, – 4) ve (2, 5) vektörleri **doğrusal bağımlı mıdır?**

ÇÖZÜM

i) $r_1, r_2 \in R$ ve $(0,0) \in R^2$ olmak üzere,

$r_1(3,-4)+r_2(2,5)=(0,0)$

$\left.\begin{aligned}3r_1+2r_2&=0\\ -4r_1+5r_2&=0\end{aligned}\right\}$ sisteminden $r_1=r_2=0$ bulunur ki vektör doğurusal bağımsızdır .

ii) $\begin{vmatrix}3 & -4\\ 2 & 5\end{vmatrix} = 15+8=23 \neq 0$ olduğundan doğrusal bağımsızdır .

ÖRNEK R^2 de (1, 3) ve (5, 15) vektörleri **doğrusal bağımlı mıdır?**

ÇÖZÜM Vektörlerin bileşenlerinin oluşturduğu determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} = 15 - 15 = 0$$ olduğundan vektörler doğrusal bağımlıdırlar.

ÖRNEK R^3 de (1,2,3), (0,1,4), (2,0,3) **vektörleri doğrusal bağımlı mıdır?**

ÇÖZÜM

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$$ olduğundan bu vektörler doğrusal bağımsızdırlar.

ÖRNEK (1, a – 1, 0), (b + 3, –2, 4), (–3, b, 0) vektörlerinin R^3 de doğrusal bağımlı olmaları için **a ile b arasındaki bağıntı nedir?**

ÇÖZÜM

$$\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 0 \\ b+3 & -2 & 4 \\ -3 & b & 0 \end{vmatrix} = 0$$ determinantını 3. sütuna göre açalım.

$$-4\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ -3 & b \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ -3 & b \end{vmatrix} = 0$$

$b + 3a - 3 = 0$ dan $3a + b = 3$ bulunur.

VEKTÖR UZAYININ TABANI VE BOYUTU

V vektör uzayındaki $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektörleri V yi geriyor ve doğrusal bağımsız iseler

$\{v_1, v_2 \ldots, v_n\}$ kümesine **V nin tabanı** ve n sayısına da **V nin boyutu** denir.

$\{e_1, e_2\}$ kümesi R^2 nin, $\{e_1, e_2, e_3\}$ kümesi R^3 ün birer tabanıdır. Bu tabanlara R^2 ve R^3 ün **temel tabanı** denir.

UYARI:

i) R^n de doğrusal bağımsız n tane vektör daima uzayı gerer. Bu nedenle R^n de doğrusal bağımsız n tane vektörün kümesi bu uzayın bir tabanıdır.

ii) Bir uzayın birden fazla tabanı olabilir. Ancak boyut kesinlikle tek bir reel sayıdır.

Boy (R^n) = n dir.

ii) Vektör sayısı, boyut sayısından fazla ise, vektörler doğrusal bağımlıdır.

ÖRNEK $A = \{(1,-1), (-1,0)\}$ kümesinin

a) R^2 vektör uzayının bir tabanı olduğunu gösteriniz.

b) R^2 vektör uzayının boyutu nedir.

c) (–2,4) vektörünü A tabanına göre ifade ediniz.

ÇÖZÜM **a)** $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ olduğundan vektörler doğrusal bağımsızdırlar. A kümesi R^2 nin bir tabanıdır.

b) R^2 vektör uzayında 2 tane vektör bulunduğundan boyut $(R^2) = 2$ dir.

c) $(-2,4) = a(1,-1) + b(-1,0)$

$(-2,4) = (a-b,-a) \Rightarrow a = -4 \wedge -4-b = -2 \Rightarrow b = -2$ olur.

$(-2,4) = -4(1,-1) - 2(-1,0)$ elde edilir.

ÖRNEK $\{(1,-3,2),(2,1,0),(0,-7,4)\}$ kümesi $\mathbf{R^3}$ **ün bir tabanı mıdır?**

ÇÖZÜM $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 4 \end{vmatrix} = 0$ olduğundan vektörler doğrusal bağımlıdır. Doğrusal bağımlı üç vektör R^3 de taban oluşturamaz.

DOĞRUSAL (LİNEER) DÖNÜŞÜMLER

TANIM: V_1, V_2 birer vektör uzayı ve f: $V_1 \to V_2$ bir fonksiyon olsun.

i) $\forall x,y \in V_1$ **için** $f(x+y) = f(x) + f(y)$

ii) $\forall r \in R$ **ve** $\forall x \in V_1$ **için** $f(rx) = rf(x)$ **koşulları sağlanıyorsa f ye V_1 den V_2 ye bir doğrusal dönüşüm denir.**

ÖRNEK $f: R^2 \to R^2$, $f(x_1,x_2) = (2x_1,4x_2)$ **bir doğrusal dönüşüm müdür?**

ÇÖZÜM **i)** $x = (x_1,x_2) \in R^2 \wedge y = (y_1,y_2) \in R^2$ için

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x_1+y_1, x_2+y_2) \\ &= (2(x_1+y_1), 4(x_2+y_2)) \\ &= (2x_1+2y_1, 4x_2+4y_2) \\ &= (2x_1+4x_2) + (2y_1+4y_2) \\ &= f(x_1,x_2) + f(y_1,y_2) \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

ii) $f(rx) = f(rx_1,rx_2) = (2rx_1,4rx_2) = r(2x_1,4x_2)$

$= rf(x_1,x_2) = rf(x)$ olduğundan f doğrusal dönüşümdür.

UYARI: $f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = (?,?,\cdots)$ dönüşümünde ? işaretli yerlerde x_1. x_2. ..., x_n lerin birer doğrusal bileşimi varsa f bir doğrusal dönüşümdür.

DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLERİN MATRİS GÖSTERİMİ

$f: R^n \to R^m$ doğrusal dönüşümünde $x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in R^n$ olmak üzere $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$ vektörünün f doğrusal dönüşümü altında görüntüsü

$$f(x) = x_1 \cdot f(e_1) + x_2 \cdot f(e_2) + \cdots + x_n \cdot f(e_n) \text{ dir.}$$

$$f(e_1) = f(1,0,0,\cdots,0) = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1})$$

$$f(e_2) = f(0,1,0,\cdots,0) = (a_{12}, a_{22}, \cdots a_{m2})$$

$$\vdots$$

$$f(e_n) = f(0,0,0\cdots 1) = (a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{mn}) \text{ olsun}$$

$f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)$ vektörlerini sütun vektörleri olarak alalım ve $f(x)$ i yeniden yazalım.

$$f(x) = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

olur ki buradaki

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ matrisine **f doğrusal dönüşümünün matrisi** denir.

UYARI: R^n den R^m ye tanımlı f doğrusal dönüşümüne karşılık gelen matris mxn türündedir.

ÖRNEK $f: R^2 \to R^3$

$f(x_1, x_2) = (x_1 - 3x_2, -4x_2, -2x_1 + x_2)$ dönüşümüne **karşılık gelen matrisi yazınız.**

ÇÖZÜM f dönüşümünün matrisi 3x2 türündedir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

ÖRNEK $g: R^3 \to R^2$, $g(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2, x_1 + 3x_2 - 2x_3)$ dönüşümüne karşılık gelen matrisi yazınız.

ÇÖZÜM g dönüşümünün matrisi 2x3 türündedir.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

UYARI: f ve g iki doğrusal dönüşüm ve f nin matrisi A, g nin matrisi B olsun.

$f \pm g$, fog dönüşümleri tanımlı ise

i) $f \pm g$ dönüşümünün matrisi $A \pm B$

ii) kf dönüşümünün matrisi $k.A(k \in R)$

iii) fog dönüşümünün matrisi A.B dir.

iv) Her doğrusal dönüşüme bir matris, her matrıse bir doğrusal dönüşüm karşı gelir. Sütun sayısı tanım kümesinin boyutunu, satır sayısı ise değer kümesinin boyutunu belirler.

ÖRNEK $f: R^2 \to R^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$

$g: R^2 \to R^2$, $g(x_1, x_2) = (2x_1, 3x_2)$ dönüşümleri veriliyor.

$f + g$, $f - g$, $2f - g$, fog , gof ve $(fog)(1,2)$ dönüşümlerinin matrislerini yazınız.

ÇÖZÜM f nin dönüşüm matrisi : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

g nin dönüşüm matrisi : $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ olur.

$$f + g = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f - g = A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$2f - g = 2A - B = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$fog = A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$gof = B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(fog)(1,2) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMÜN TERSİ

V_1, V_2 birer vektör uzayı, f: $V_1 \to V_2$ bir doğrusal dönüşüm ve g: $V_2 \to V_1$ olsun

fog : $V_2 \to V_2$, gof : $V_1 \to V_1$ birer birim fonksiyon ise g de bir doğrusal dönüşümdür.

g ye f nin tersi denir ve $g = f^{-1}$ yazılır.

f dönüşümünün matrisi A ise, f^{-1} ters dönüşümünün matrisi A^{-1} dir.

ÖRNEK

$f: R^2 \to R^2$, $f(x_1,x_2) = (3x_1 - x_2, -2x_1 + 4x_2)$ doğrusal dönüşümü için f^{-1} **ters dönüşümünün matrisini bulunuz.**

ÇÖZÜM

f nin matrisi $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ olduğundan f^{-1} in matrisi: $\det A = 12 - 2 = 10 \neq 0$ olup,

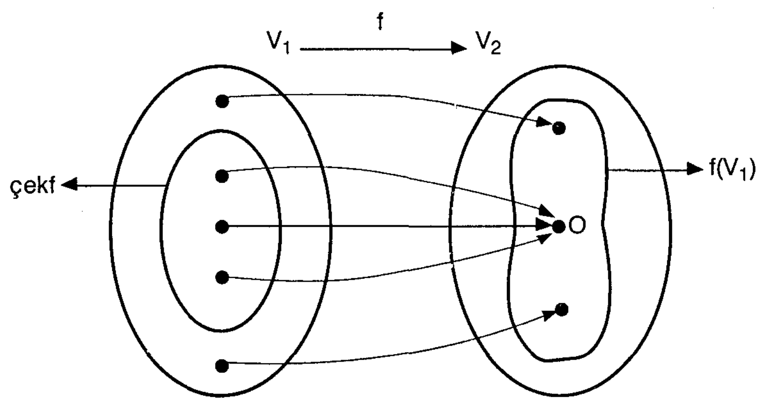
$$A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

BİR DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMÜN ÇEKİRDEĞİ VE GÖRÜNTÜ UZAYI

V_1, V_2 birer vektör uzayı ve $f: V_1 \to V_2$ bir doğrusal dönüşüm olsun. V_2 nin sıfır vektörüne dönüşen, V_1 in vektörlerinin kümesine f dönüşümünün çekirdeği denir ve çekf ile gösterilir. V_1 in tüm vektörlerinin görüntüsüne f dönüşümünün **görüntü uzayı denir** ve **$f(V_1)$** ile gösterilir.

$$\text{çekf} = \{x \in V_1 | \ f(x) = 0\}$$

$$f(V_1) = \{f(x) | \ x \in V_1\} \text{ dir.}$$



- boyut {çekf} + boyut {$f(V_1)$} = boyut {V_1}
- çekf = {0} ise f bire–bir dir.

ÖRNEK

$f: R^2 \to R$, $f(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2$ doğrusal dönüşümünün **çekirdeğini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$f(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2 = 0$ olmalıdır.

$x_2 = k$ denilirse $x_1 = 3k$ olur. Yani

$f(x_1,x_2) = 0 \Rightarrow (x_1,x_2) = (3k,k), k \in R$ dir.

$$\text{çekf} = \{(3k,k) | \ k \in R\}$$

$$= \{(3,1) \cdot k | \ k \in R\} \text{ olur.}$$

1. ÖTELEME DÖNÜŞÜMÜ

f: $R^2 \to R^2$, f(x, y) = (x + a, y + b) doğrusal dönüşümüne **öteleme** denir. Yani (x,y) vektörünün (a,b) vektörü kadar ötelenmişi (x + a, y + b) dir. Öteleme dönüşümü, uzunlukları, açıları ve alanları değiştirmez. (a,b) vektörü öteleme vektörüdür.

ÖRNEK (3, – 4) öteleme vektörü, (5, –2) vektörünü **hangi vektöre dönüştürür?**

ÇÖZÜM Tanıma göre (5, –2) vektörünün (3, –4) vektörü kadar ötelenmişi,

$\left(5+3,(-2)+(-4)\right)=(8,-6)$ dır.

ÖRNEK f: $R^2 \to R^2$, f(x, y) = (x + 2, y – 3) ötelemesinin **tersini bulunuz.**

ÇÖZÜM x + 2 = X, y – 3 = Y den x = X – 2, y = Y + 3 olur.

f^{-1}(X, Y) = (X – 2, Y + 3) bulunur.

ÖRNEK f(x, y) = (x – 2, y + 3), g(x, y) = (x + 1, y + 2) ötemeleri için **fof ve fog ötelemelerini bulunuz.**

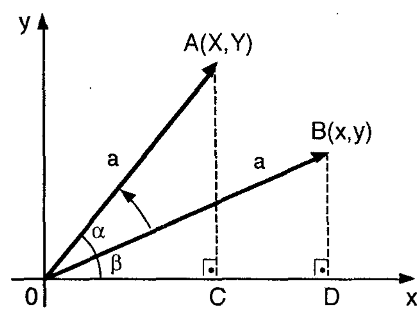
ÇÖZÜM $(fof)(x,y)=f[f(x,y)]=f(x-2,y+3)=(x-2-2,y+3+3)=(x-4,y+6)$

$(fog)(x,y)=f[g(x,y)]=f(x+1,y+2)=(x+1-2,y+2+3)=(x-1,y+5)$ bulunur.

2. DÖNME DÖNÜŞÜMÜ

$K'=A\cdot K$ dönüşümünde $A=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ve $a^2+b^2=1$ ise bu dönüşüme **dönme dönüşümü** denir.

Dönme açısı $0 \le \alpha < 2\pi$ olan başlangıç noktası etrafındaki pozitif yöndeki bir dönmede B(x,y) noktasının görüntüsü A(X,Y) ise:



$|OA|=|OB|=a$ olsun

$\overset{\triangle}{OAC}$ de: $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{|OC|}{a}$

$X=|OC|=a\cdot\cos(\alpha+\beta)$ (1)

$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{|AC|}{a}$

$Y=|AC|=a\cdot\sin(\alpha+\beta)$ (2) dir.

X = a cosα.cosβ – asinα.sinβ (1)

Y = a sinα.cosβ + acosα.sinβ (2) olur.

Öte yandan $\widehat{OBD}$ de: $\cos\beta=\dfrac{|OD|}{a} \quad \wedge \quad \sin\beta=\dfrac{|BD|}{a}$

$x=|OD|=a\cos\beta$ (3) $\quad y=|BD|=a\sin\beta$ (4) elde edilir.

(3) ve (4), (1) ve (2) de yerine konulursa,

$$\begin{aligned} X&=x\cos\alpha-y\sin\alpha \\ Y&=x\sin\alpha+y\cos\alpha \end{aligned} \quad \text{ya da} \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Buradaki $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ matrisi dönme matrisidir.

Düzlemdeki dönme dönüşümü, uzunluk, açı ve alanları değiştirmez.

ÖRNEK Düzlemde $\alpha = \frac{\pi}{3}$ **radyanlık pozitif yöndeki dönmenin matrisini ve (–2, 4) noktasının görüntüsünü bulunuz.**

ÇÖZÜM Dönme matrisi $= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

(–2, 4) noktasının görüntüsü ise

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}+2 \end{bmatrix} \text{ veya } \left(-1-2\sqrt{3},\, 2-\sqrt{3}\right) \text{ dür.}$$

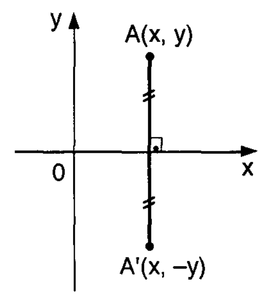
3. SİMETRİ DÖNÜŞÜMÜ

1) x eksenine göre simetri:

A(x, y) noktasının Ox eksenine göre simetriği A′(x, –y) olup bu simetri dönüşümünün matrisi

$$\boxed{A_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \text{ dir.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = (x,-y) \text{ olur.}$$

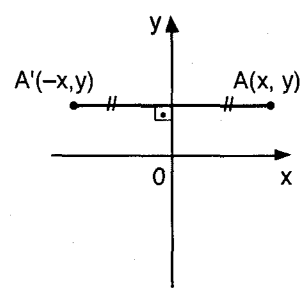


2) y eksenine göre simetri:

A(x, y) noktasının Oy eksenine göre simetriği A′(–x, y) olup bu simetri dönüşümünün matrisi

$$\boxed{A_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \text{ dir.}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = (-x,y) \text{ olur.}$$

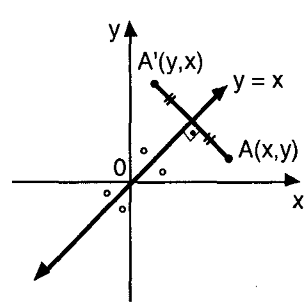


3) y = x doğrusuna göre simetri:

A(x, y) noktasının y = x doğrusuna göre simetriği A′(y, x) olup bu simetri dönüşümünün matrisi

$$\boxed{A_{y=x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \text{ dır.}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = (y,x) \text{ olur.}$$

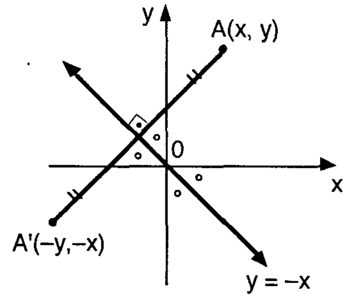


4) $y = -x$ doğrusuna göre simetri:

A(x, y) noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriği $A'(-y, -x)$ olup bu simetri dönüşümünün matrisi

$$\boxed{A_{y=-x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}$$ dır.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix} = (-y, -x) \text{ olur.}$$

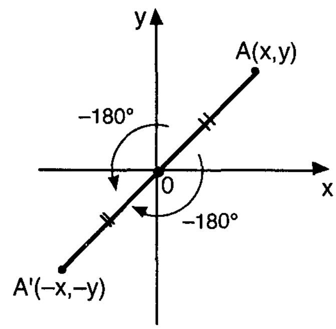


5) Orijine göre simetri: (180° ve –180° lik dönmeler)

A(x, y) noktasının orijine göre simetriği $A'(-x, -y)$ olup bu simetri dönüşümünün matrisi

$$\boxed{A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$$ dir.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = (-x, -y) \text{ olur.}$$

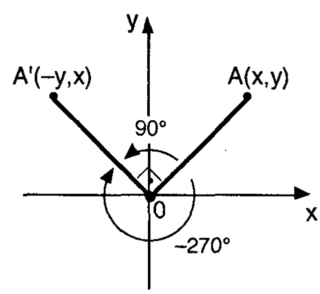


6) (+90° veya –270° lik) dönme:

Bu dönmenin matrisi:

$$\boxed{A_{90} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$$ dır.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = (-y, x) \text{ olur.}$$

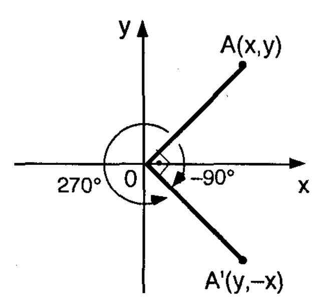


7) (+270° veya –90°) lik dönme:

Bu dönmenin matrisi:

$$\boxed{A_{270} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}$$ dır.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} = (y, -x) \text{ olur.}$$



4. HOMOTETİ DÖNÜŞÜMÜ

$k \in R$ ve $A(x, y) \in R^2$ olmak üzere,

$H(x, y) = (kx, ky) = k(x, y)$ dönüşümüne **homoteti** denir.

$0(0, 0)$ homoteti merkezi, k sayısı ise homoteti oranıdır.

Homoteti dönüşümünün matrisi $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ dır.

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix} = (kx, ky) = k \cdot (x, y) \text{ olur.}$$

5. BENZERLİK DÖNÜŞÜMÜ

Bir homoteti ile bir dönmenin bileşkesine **benzerlik dönüşümü** denir. Yani benzerlik dönüşümünün matrisi

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\cos\alpha & -k\sin\alpha \\ k\sin\alpha & k\cos\alpha \end{bmatrix} \text{ dır.}$$

ÖRNEK $A(2, -4)$ noktasının,

a) x eksenine göre
b) y eksenine göre
c) $y = x$ doğrusuna göre
d) $y = -x$ doğrusuna göre
e) Orijine göre simetriklerini,
f) 90° döndürüldüğünde elde edilen
g) 270° döndürüldüğünde elde edilen noktaları bulunuz.

ÇÖZÜM $A(2, -4)$,

a) $A_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = (2, 4)$

b) $A_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = (-2, -4)$

c) $A_{y=x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = (-4, 2)$

d) $A_{y=-x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = (4, -2)$

e) $A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = (-2, 4)$

f) $A_{90} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = (4, 2)$

g) $A_{270} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} = (-4, -2)$ bulunur.

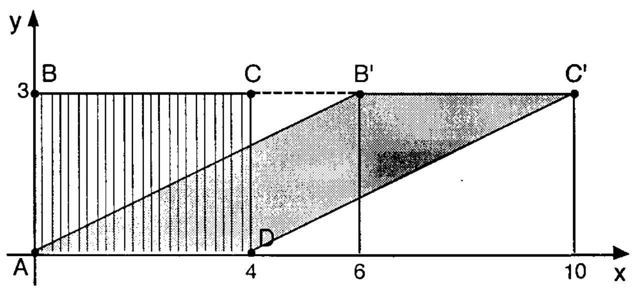
ÖRNEK

A(0, 0) , B(0, 3), C(4, 3), D(4, 0) olan dörtgenin $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dönüşüm **matrisi altındaki görüntüsünü bulunuz ve şeklini çiziniz.**

ÇÖZÜM

Noktaların tümüne dönüşüm matrisini aynı anda uygulayalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 10 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} A & B' & C' & D \end{matrix} \end{array}$$



ÖRNEK

f: $R^2 \to R^2$ doğrusal dönüşümünün matrisi $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ dır. $2x - 3y + 1 = 0$ **doğrusunun bu dönüşüm matrisi altındaki görüntüsü nedir?**

ÇÖZÜM

Doğru üzerindeki her hangi bir (x, y) noktasının dönüşüm matrisindeki görüntüsü $[X, Y]$ olsun.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - y \\ 2x \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Buradan $X = 3x - y$ ve $Y = 2x$ olur.

x ve y değerleri çekilirse

$$x = \frac{Y}{2} \quad \wedge \quad X = \frac{3Y}{2} - y$$

$$y = \frac{3Y - 2X}{2} \text{ bulunur.}$$

Doğru denkleminde yerine konursa,

$$2 \cdot \frac{Y}{2} - 3 \cdot \frac{3Y - 2X}{2} + 1 = 0$$

$2Y - 9Y + 6x + 2 = 0$ dan

$6X - 7Y + 2 = 0$ elde edilir.

ÇÖZÜMLÜ TEST –1

1. $A=\begin{bmatrix} a+b & a \\ -b & -3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} c & \mathrm{sgn}(1+a^2) \\ [\![3,8]\!] & 4 \end{bmatrix}$ matrisleri için $A+B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ise **c nedir?**

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

ÇÖZÜM

$$A+B=\begin{bmatrix} a+b+c & a+1 \\ -b+3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ olduğundan

$$\left.\begin{aligned} a+b+c&=1 \\ a+1&=0 \\ -b+3&=0 \end{aligned}\right\}$$ denklemleri bulunur.

Bu denklemler çözülürse $a=-1$, $b=3$, $c=-1$ olur

YANIT "A"

2. $A=\begin{bmatrix} x & 3 \\ a+y & a+b \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -6 & y \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ ve

$A+B=3I_2$ ise **A matrisinin elemanları toplamı nedir?**

A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

ÇÖZÜM

$$A+B=\begin{bmatrix} x-6 & 3+y \\ a+y+2 & a+b-4 \end{bmatrix}=3I_{2x2}$$ ise

$x-6=3 \Rightarrow x=9$

$3+y=0 \Rightarrow y=-3$

$a+y+2=0 \Rightarrow a=1$

$a+b-4=3 \Rightarrow b=6$ olur.

A matrisinin elemanları toplamı:

$x+3+a+y+a+b = 9+3+1+(-3)+1+6 = 17$ bulunur.

YANIT "E"

3. $A=\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$ veriliyor.

$A+B^T=B+A^T$ ise **a ile b arasındaki bağıntı nedir?**

A) $a+b=0$ B) $a-b=0$ C) $a-2b=0$

D) $a+2b=0$ E) $a-3b=0$

ÇÖZÜM

$A^T=\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$, $B^T=\begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}$ dir.

$A+B^T=B+A^T \Rightarrow A-A^T=B-B^T$ olur.

$A-A^T=B-B^T \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & b-a \\ a-b & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow a-b=0$$ bulunur.

YANIT "B"

4. $A=\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$ ve $A^n=2^{2n-2}.3^{n-1}.A$ ise **a nedir?**

A) 1 B) 2 C) 6 D) 9 E) 12

ÇÖZÜM

$$A^2=a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=a^2\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=2a^2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=2a\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}=2aA$$

$$A^3=a\cdot 2a^2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=2a^3\cdot 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$=4a^2A=2^2a^2A$

$A^n=2^{n-1}\cdot a^{n-1}\cdot A$ elde edilir.

$A^n=2^{2n-2}\cdot 3^{n-1}\cdot A=2^{n-1}\cdot a^{n-1}\cdot A$

$(2^2\cdot 3)^{n-1}=(2\cdot a)^{n-1}\Rightarrow 12=2a$

$a=6$ bulunur.

YANIT "C"

5. $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -3 & -1\end{bmatrix}$ ise A^{30} matrisi **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) I_{2x2} B) $8I_{2x2}$ C) $8^{10}I_{2x2}$
D) $8^{15}I_{2x2}$ E) A

ÇÖZÜM

$$A^2=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -3 & -1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 6 & -2\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -3 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 6 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}=8I_{2x2}$$

$A^{30}=\left(A^3\right)^{10}=8^{10}\cdot I_{2x2}$ bulunur.

YANIT "C"

6. Elemanları $(Z/5,+,\cdot)$ cisminden seçilen

$A=\begin{bmatrix}\bar{4}\\ \bar{3}\\ \bar{2}\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{1} & \bar{4}\end{bmatrix}$ matrisleri için **A.B matrisinin elemanları toplamı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\bar{1}$ B) $\bar{2}$ C) $\bar{3}$ D) $\bar{4}$ E) 0

ÇÖZÜM

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}\bar{3} & \bar{4} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{3} & \bar{2}\\ \bar{4} & \bar{2} & \bar{3}\end{bmatrix} \text{ olur.}$$

A.B matrisinin elemanları toplamı

$\bar{3}+\underbrace{\bar{4}+\bar{1}}_{0}+\bar{1}+\underbrace{\bar{3}+\bar{2}}_{0}+\bar{4}+\underbrace{\bar{2}+\bar{3}}_{0}=\bar{3}$ bulunur

YANIT "C"

7. $\begin{bmatrix}3x+1 & 2\\ 2y+3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 2\\ 5 & z+4\end{bmatrix}$ olduğuna göre

x + y – z ifadesinin değeri nedir?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

ÇÖZÜM

Matrislerin eşitliğinden;

$3x+1=7$ $2y+3=5$ $z+4=5$
$x=2$ $y=1$ $z=1$ olur.

$x+y-z=2+1-1=2$ bulunur.

YANIT "E"

8. $a\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}$ ise **a.b çarpımı kaçtır?**

A) 4 B) 2 C) –2 D) –4 E) –6

ÇÖZÜM

$$a\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2a+b\\ 3a+4b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Matrislerin eşitliğinden $2a+b=2$
$3a+4b=-2$ bulunur.

Bu denklemler çözülürse;
$a=2,\ b=-2$ dir.
$a.b=-4$ olur.

YANIT "D"

9. $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ matisi veriliyor. A^{16} **matrisi nedir?**

A) $\begin{bmatrix}0 & 2^{16}\\ 1 & 2^{16}-1\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}1 & 2^{16}\\ 0 & 2^{16}-1\end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix}1 & 2^{16}-1\\ 0 & 2^{16}\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}1 & 2^{8}-1\\ 0 & 2^{8}\end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix}0 & 2^{8}-1\\ 1 & 2^{8}\end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2^2-1\\ 0 & 2^2\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 7\\ 0 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2^3-1\\ 0 & 2^3\end{bmatrix}$$

$$A^4=\begin{bmatrix}1 & 7\\ 0 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 15\\ 0 & 16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2^4-1\\ 0 & 2^4\end{bmatrix}$$

$\vdots$

$A^{16}=\begin{bmatrix}1 & 2^{16}-1\\ 0 & 2^{16}\end{bmatrix}$ bulunur.

YANIT "C"

10. $A=\begin{bmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. $\tan\theta=0{,}75$ ise **A.B nedir?**

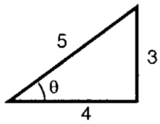
A) $\begin{bmatrix}1\\ 0{,}25\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}1\\ 0{,}375\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}1\\ 0{,}5\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}1\\ 0{,}96\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}1\\ 1{,}5\end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ \sin 2\theta\end{bmatrix}$$

$\tan\theta=0{,}75=\frac{3}{4}$



$\sin 2\theta=2\sin\theta\cdot\cos\theta$

$=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$ olur.

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1\\ \frac{24}{25}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0{,}96\end{bmatrix}$$ bulunur.

YANIT"D"

11. $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}-3\\ 2\end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

$A.C=C-B$ eşitliğini sağlayan **C matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}-1 & 2\end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

$A_{2x2}\cdot C=C-B_{2x1}$ ise C_{2x1} olmalıdır.

$$\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}3a+b&=a+3\\ -2a-b&=b-2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}2a+b&=3\\ +\ -2a-2b&=-2\end{aligned}$$

$-b=1\Rightarrow b=-1$

$a=2$ olur.

$$C=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$$ bulunur.

YANIT "B"

12. $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ ise $\mathbf{A.A^T}$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix}13 & -1 & -1\\ -3 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 5\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}13 & -3 & -1\\ -3 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -5\end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix}-13 & -3 & 1\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -5\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}13 & -3 & -1\\ -3 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 5\end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix}13 & -3 & -1\\ -1 & -1 & 5\\ -3 & 1 & -1\end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

$$A^T=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix}$$ olur.

$$A\cdot A^T=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & -3 & -1\\ -3 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

bulunur.

YANIT "D"

13. $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ ve $f(x)=x^2-2x$ ise **f(A) nın eşiti nedir?**

A) $\begin{bmatrix}3 & -15\\ 0 & 8\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}8 & -15\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}3 & 0\\ -15 & 8\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}3 & 0\\ 15 & 8\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}8 & 0\\ -15 & 3\end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

$f(A)=A^2-2A$ dir.

$$A^2=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 3 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -9 & 4\end{bmatrix}$$

$$2A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 6 & -4\end{bmatrix}$$ olur.

$$f(A)=A^2-2A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -9 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 6 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -15 & 8\end{bmatrix}$$

bulunur.

YANIT "C"

14. $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ matrisinin her köşegeninin terimleri toplamı 3 olduğuna göre $\mathbf{A^2}$ **matrisinin $\mathbf{a_{21}}$ ve $\mathbf{a_{12}}$ terimlerinin toplamı nedir?**

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

ÇÖZÜM

$$A^2=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned}a_{21}+a_{12}&=ac+cd+ab+bd\\&=a(b+c)+d(b+c)\\&=(a+d)\cdot(b+c)\\&=3\cdot 3=9 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

YANIT "C"

15. $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}x & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

A.B = B.A ise **x in değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

ÇÖZÜM

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x & 0\\ -x-6 & 3\end{bmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}x & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x & 0\\ -5 & 3\end{bmatrix}$$

A.B = B.A

$$\begin{bmatrix}2x & 0\\ -x-6 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x & 0\\ -5 & 3\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow -x-6=-5$

$\Rightarrow x=-1$ bulunur.

YANIT "B"

16. $B=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 3 & 3\end{bmatrix}$ veriliyor. $B^2=k.B$ ise **k kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

ÇÖZÜM

$$B^2=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 3 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 3 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 6 & 6\end{bmatrix}$$

$$=2\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 3 & 3\end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$B^2=kB\Rightarrow 2\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 3 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 3 & 3\end{bmatrix}\cdot k$$

$\Rightarrow k=2$ bulunur.

YANIT "E"

17. $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ise **A^2+2A+I_{2x2} ifadesi neye eşittir?**

A) $\begin{bmatrix}4 & -8\\ 0 & 4\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}3 & 0\\ -4 & 3\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 0 & -3\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 4 & -3\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}3 & 0\\ 4 & 3\end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

$A^2+2A+I_{2x2}=(A+I_{2x2})^2$ dir.

$$A+I_{2x2}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 0 & 2\end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$(A+I_{2x2})^2=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -2\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & -8\\ 0 & 4\end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

YANIT "A"

18. $A=\begin{bmatrix}-a & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & a\end{bmatrix}$ ve $A^2=I_2$ ise **a aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) 1 B) 2 C) –1 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{10}$

ÇÖZÜM

$$A^2=\begin{bmatrix}-a & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & a\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-a & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & a\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a^2-3 & 0\\ 0 & -3+a^2\end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$A^2=I_2\Rightarrow\begin{bmatrix}a^2-3 & 0\\ 0 & -3+a^2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$a^2-3=1$

$a=+2$

$a=-2$ bulunur.

YANIT "B"

19. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. $A - B = -A^T$ ise

B matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

$A - B = -A^T \Rightarrow A + A^T = B$ olur.

$$A + A^T = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$ bulunur.

YANIT "C"

20. A ve B matrisleri için

$(A + B^T)^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ve $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ise

B matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

$(A + B^T)^T = A^T + B$ ve $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ bulunur.

YANIT "D"

21. $A = [a_{ij}]_{2x2}$, $B = [b_{ij}]_{2x2}$ ve

$a_{ij} = \begin{cases} i & , i \neq j \\ -j & , i = j \end{cases}$, $b_{ij} = \begin{cases} i \cdot j & , i \neq j \\ (-j)^i & , i = j \end{cases}$ veriliyor.

A.B matrisinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$ bulunur.

YANIT "A"

22. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ve $A \cdot B = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \end{bmatrix}$ ise

B.B^T matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

A.B matrisi 2x1 türünden olduğu için B matrisi de 2x1 türünde bir matrisdir. $B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ olsun.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a - b \\ a - 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$\left. \begin{aligned} 3a - b &= -7 \\ a - 2b &= -4 \end{aligned} \right\}$ denklemleri çözülürse

$a = -2$, $b = 1$ olur.

$B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B^T = [-2 \quad 1]$

$B \cdot B^T = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [-2 \quad 1] = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ bulunur.

YANIT "E"

23. $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & -3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\\ -4 & -3\end{bmatrix}$ olmak üzere;

$x \cdot A + y \cdot B = \begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & -4\\ 5 & 1\end{bmatrix}$ ise **x + y aşağıdakilerden hangisidir?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

ÇÖZÜM

$$x\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & -3\\ 1 & -2\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\\ -4 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & -4\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3x+y & -x\\ 2x-2y & -3x+y\\ x-4y & -2x-3y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & -4\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

matrislerin eşitliğinden; $x = 1$, $y = -1$ dir.

$x + y = 0$ olur.

YANIT "C"

24. $A=\begin{bmatrix}3 & x & 2\\ -1 & 5 & 4\\ y & z & 1\end{bmatrix}$ ve $A^T = A$ olması için

(x, y, z) ne olmalıdır?

A) (1, –2, 4) B) (–1, 2, 4)
C) (–1, 0, –1) D) (–1, 2, 0)
E) (1, 0, 1)

ÇÖZÜM

$A^T=\begin{bmatrix}3 & -1 & y\\ x & 5 & z\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}$ dir.

$$A^T = A \Rightarrow \begin{bmatrix}3 & -1 & y\\ x & 5 & z\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & x & 2\\ -1 & 5 & 4\\ y & z & 1\end{bmatrix}$$

$x = -1$, $y = 2$, $z = 4$ olur.

$(x, y, z) = (-1, 2, 4)$ dir.

YANIT "B"

25. $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

$f(x) = x^2 + 3x + 2$ olduğuna göre, **f(A) nedir?**

A) $\begin{bmatrix}4 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}6 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}7 & 12\\ 0 & 4\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}6 & 6\\ 0 & 12\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}8 & 0\\ 18 & 10\end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

$$f(x) = (x+1)\cdot(x+2) \Rightarrow$$

$$f(A)=\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\cdot\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6 & 6\\ 0 & 12\end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

YANIT "D"

26. $i^2 = -1$ olduğuna göre,

$\begin{bmatrix}2+xi & 0\\ y & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z+x-yi\\ 7\end{bmatrix}$ ise

x + y + z kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

ÇÖZÜM

$$\begin{bmatrix}2+xi\\ y+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z+x-yi\\ 7\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$y = 1$

$$2 + xi = z + x - yi \Rightarrow \left.\begin{matrix}z+x=2\\ x=-1\end{matrix}\right\} \Rightarrow z = 3 \text{ dir.}$$

$x + y + z = -1 + 1 + 3 = 3$ bulunur.

YANIT "C"

27. $\begin{bmatrix}\log_3(3x) & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\end{bmatrix}$ ise **x kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

$$\begin{bmatrix} \log_3(3x) & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\log_3(3x) + 10 = 12 \Rightarrow \log_3(3x) = 2$$

$$\Rightarrow 3x = 3^2$$

$\Rightarrow x = 3$ bulunur.

YANIT "C"

28. A m x n tipinden, B de k x p tipinden bir matristir.

A^T.B işleminin tanımlı olması için aşağıdakilerden hangisi gerçekleşmelidir?

A) $k = p$ B) $n = k$ C) $m = p$

D) $m = k$ E) $n = p$

ÇÖZÜM

$A_{mxn} \Rightarrow A^T_{nxm}$ olur.

$\underbrace{A^T_{nxm} \cdot B_{kxp}} \Rightarrow m = k$ olmalıdır.

YANIT "D"

29. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ ise

$(A + B)^2$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 36 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 36 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 36 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 36 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 0 & -36 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ olur.

$(A + B)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 36 \end{bmatrix}$ bulunur.

YANIT "A"

30. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ve $(A^T) \cdot B = I_2$ olduğuna göre

B matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun. $A^T . B = I_2 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3a - c & 3b - d \\ 2a - c & 2b - d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 3a - c = 1$

$2a - c = 0$

$3b - d = 0$

$2b - d = 1$

Denklemleri çözülürse;

$a = 1, b = -1, c = 2, d = -3$ bulunur.

B matrisi

$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ olur.

YANIT "C"

ÇÖZÜMLÜ TEST –2

1. $\begin{vmatrix} |x-2| & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 19$ **denkleminin çözüm kümesi nedir?**

A) {–7} B) {–11} C) {7, 11}
D) {–7, 11} E) {7, –11}

ÇÖZÜM

$3|x-2| - 8 = 19 \Rightarrow 3|x-2| = 27$

$|x-2| = 9$

$x - 2 = 9$ veya $x - 2 = -9$

$x = 11$ veya $x = -7$

$Ç = \{-7, 11\}$

YANIT "D"

2. $\begin{vmatrix} 3x+6 & 3 \\ m+1 & x \end{vmatrix} = 0$ denkleminin bir kökü –1 ise **bu denklemin çarpanlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(x-1)^2$ B) $(x+1)^2$ C) $(x-2)$
D) $(x+2)$ E) $(x-3)$

ÇÖZÜM

$\begin{vmatrix} 3x+6 & 3 \\ m+1 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 3m - 3 = 0$

$x = -1 \Rightarrow m = -2$ olur.

Denklem:

$3x^2 + 6x + 3 = 0 \Rightarrow 3(x^2 + 2x + 1) = 0$

$\Rightarrow 3(x+1)^2 = 0$ bulunur.

YANIT "B"

3. $\begin{vmatrix} 18990 & 18992 \\ 18989 & 18991 \end{vmatrix}$ **determinantının değeri kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

ÇÖZÜM

$18989 = t \Rightarrow \begin{vmatrix} t+1 & t+3 \\ t & t+2 \end{vmatrix} = (t+1)\cdot(t+2) - t(t+3)$

$= t^2 + 2t + t + 2 - t^2 - 3t$

$= 2$ bulunur.

YANIT "C"

4. $i^2 = -1$ olduğuna göre

$\begin{vmatrix} 0 & -i & i+1 \\ 1 & 2i & i \\ -1 & i & -i \end{vmatrix}$ **determinantının değeri nedir?**

A) –3+3i B) –3+2i C) –3–2i
D) 3+3i E) 3–3i

ÇÖZÜM

$\begin{vmatrix} 0 & -i & i+1 \\ 1 & 2i & i \\ -1 & i & -i \end{vmatrix} = -i(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & i \\ -1 & -i \end{vmatrix} + (i+1)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2i \\ -1 & i \end{vmatrix}$

$= (i+1)\cdot(i+2i)$

$= 3i^2 + 3i$

$= -3 + 3i$ bulunur.

YANIT "A"

5. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinde M minördür.

$M_{21} - M_{23}$ değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ZAFER YAYINLARI

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{array}{l} M_{21}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=5 \\ M_{23}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=3\end{array}\right\}\Rightarrow 5-3=2$$

YANIT "B"

6. $\begin{vmatrix}-4 & 3\\ [\![x-2]\!] & 2\end{vmatrix}=1$ **denkleminin çözüm kümesi nedir?**

A) [0, 1) B) [1, 2) C) [2, 4)

D) [–2, –1) E) [–1, 0)

ÇÖZÜM

$$\begin{vmatrix}-4 & 3\\ [\![x-2]\!] & 2\end{vmatrix}=1 \Rightarrow -8-3[\![x-2]\!]=1$$

$$\Rightarrow [\![x-2]\!]=-3$$

$$\Rightarrow -3\le x-2<-2$$

$$\Rightarrow -1\le x<0 \quad \text{bulunur.}$$

$$\Rightarrow \Rightarrow x\in[-1,0)$$

YANIT "E"

7. $x\in R$ olmak üzere;

$f(x)=\begin{vmatrix}3\ln x+1 & \ln x^2\\ -1 & 2+\ln x\end{vmatrix}$ olarak tanımlanmıştır.

f(x) in x = e noktasındaki türevi nedir?

A) 0 B) 1 C) $\frac{9+2e}{e}$

D) $\frac{11+3e}{3}$ E) $\frac{15}{e}$

ÇÖZÜM

$$f(x)=(3\ln x+1)\cdot(2+\ln x)+\ln x^2$$

$$=3(\ln x)^2+7\ln x+\ln x^2$$

$$f'(x)=6\ln x\frac{1}{x}+\frac{7}{x}+\frac{2x}{x^2}$$

$$f'(e)=6\ln e\frac{1}{e}+\frac{7}{e}+\frac{2}{e}$$

$$=\frac{15}{e} \quad \text{bulunur.}$$

YANIT "E"

8. $\begin{vmatrix}n & 1\\ 1 & n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2n & 1\\ 1 & 2n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3n & 1\\ 1 & 3n\end{vmatrix}+\dots+\begin{vmatrix}9n & 1\\ 1 & 9n\end{vmatrix}$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $275n^2$ B) $280n^2-6$

C) $285n^2-9$ D) $290n^2-n$

E) $295n^2-n$

ÇÖZÜM

Açıklayıcı bilgi : $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Determinantlar hesaplanırsa;

$$=n^2-1+4n^2-1+9n^2-1+\dots+81n^2-1$$

$$=n^2(1+4+9+\dots+81)-9$$

$$=n^2\frac{9\cdot10\cdot19}{6}-9$$

$$=285n^2-9$$

YANIT "C"

9. $x^3+y^3+z^3=22,\ x.y.z=4$ olmak üzere

$\begin{vmatrix}x & z & y\\ y & x & z\\ z & y & x\end{vmatrix}$ **determinantının değeri kaçtır?**

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

ÇÖZÜM

$$\begin{vmatrix}x & z & y\\ y & x & z\\ z & y & x\end{vmatrix}=x^3+y^3+z^3-3x\cdot y\cdot z$$

$$=22-12$$

$$=10$$

YANIT "D"

10. $y-x=-6 \quad z-y=3$ olmak üzere;

$\begin{vmatrix}1 & x & yz\\ 1 & y & zx\\ 1 & z & xy\end{vmatrix}$ **determinantının değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 42 B) 44 C) 48 D) 50 E) 54

ÇÖZÜM

1. satır 2. ve 3. satırdan çıkartılırsa

$$\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 0 & y-x & zx-yz \\ 0 & z-x & xy-yz \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} y-x & z(x-y) \\ z-x & y(x-z) \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)\cdot y(x-z) - z(x-y)\cdot(z-x)$$

$$\left.\begin{array}{l} y-x=-6 \\ z-y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad = (y-x)\cdot(x-z)(y-z)$$

$z-x=-3$ olur. $\quad = (-6)\cdot(3)\cdot(-3) = 54$

YANIT "E"

11. n x n türündeki A ve B matrisleri için

$$\left[\left(A^T\cdot B^T\right)\cdot\left(A^{-1}\cdot B^{-1}\right)^T\right]^{-1}$$ **ifadesi neye eşittir?**

A) A.B B) B.A C) $B^T.A^T$

D) $A^T.B^T$ E) I_n

ÇÖZÜM

$$\left[\left(A^T\cdot B^T\right)\cdot\left(A^{-1}\cdot B^{-1}\right)^T\right]^{-1} = \left[(B\cdot A)^T\left((B\cdot A)^{-1}\right)^T\right]^{-1}$$

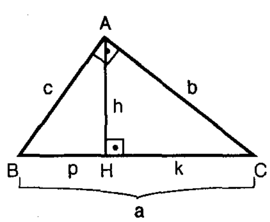
$$= \left[(B\cdot A)^T\cdot\left((B\cdot A)^T\right)^{-1}\right]^{-1}$$

$$= (I_n)^{-1}$$

$$= I_n$$

YANIT "E"

12. Şekildeki dik üçgene göre



$$A = \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ p & b & a \\ h & k & b \end{vmatrix}$$

determinantı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 0 B) k C) a D) h E) b

ÇÖZÜM

$$A = \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ p & b & a \\ h & k & b \end{vmatrix} = c\left(b^2 - ak\right) = c\left(b^2 - b^2\right)$$

$$= 0$$

YANIT "A"

13. $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -1 & \operatorname{cosec} x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cot x & 1 \\ \cos x & \tan x \end{vmatrix}$ **çarpımı aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 1 B) cos2x C) $\cos^2 x$

D) sinx E) $\sin^2 x$

ÇÖZÜM

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -1 & \operatorname{cosec} x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cot x & 1 \\ \cos x & \tan x \end{vmatrix}$$

$$= \left(\sin x \frac{1}{\sin x} + \cos x\right)\cdot(\cot x \tan x - \cos x)$$

$$= (1+\cos x)\cdot(1-\cos x)$$

$$= 1 - \cos^2 x$$

$$= \sin^2 x$$

YANIT "E"

14. Aşağıdaki matrislerden kaç tanesi tekil (singüler) matristir?

I. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ II. $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ III. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

IV. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ V. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

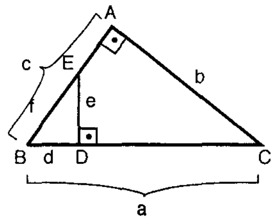
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ÇÖZÜM

Tekil matris determinantı sıfır olan matristir. I., III., IV. numaralı matrisler tekil matrisdir.

YANIT "C"

15. ABC dik üçgeninin kenarları a, b, c BDE dik üçgeninin kenarları d, e, f olduğuna göre



$$\begin{vmatrix} 4 & a & f \\ 8 & b & e \\ 12 & c & d \end{vmatrix}$$

determinantının değeri nedir?

A) a.b.c B) d.e.f C) 0
D) 1 E) 3

ÇÖZÜM

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DBE}$ olduğundan $\frac{a}{f} = \frac{b}{e} = \frac{c}{d}$ olur.

Determinantın 2. ve 3. sütunları orantılı olduğundan değeri sıfırdır.

YANIT "C"

16. Z / 6 da $A = \begin{bmatrix} \bar{5} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{4} \end{bmatrix}$ **matrisinin tersini bulunuz.**

A) $\begin{bmatrix} \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} \bar{4} & -\bar{1} \\ -\bar{1} & \bar{3} \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} \bar{4} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{3} \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{5} & \bar{5} \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{4} \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \bar{5} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{4} \end{vmatrix} = \bar{5}\cdot\bar{4} - \bar{1}\cdot\bar{1} = \bar{1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\bar{1}}\cdot\begin{bmatrix} \bar{4} & -\bar{1} \\ -\bar{1} & \bar{5} \end{bmatrix} \qquad (-\bar{1} = \bar{5})$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{5} & \bar{5} \end{bmatrix}$$

YANIT "D"

17. $\begin{vmatrix} x & y \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$ ve $\begin{vmatrix} y & x \\ b & a \end{vmatrix} = 0$

denklemleri ile verilen doğrular birbirine dik olduğuna göre, $\frac{a}{b}$ **kaçtır?**

A) 2 B) 1 C) −1 D) −1 E) $-\frac{1}{2}$

ÇÖZÜM

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow d_1,\ -6x - 3y = 0 \Rightarrow m_1 = -2$$

$$\begin{vmatrix} y & x \\ b & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow d_2,\ ay - bx = 0 \Rightarrow m_2 = \frac{b}{a}$$

$$d_1 \perp d_2 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$-2\cdot\frac{b}{a} = -1 \Rightarrow \frac{a}{b} = 2 \text{ bulunur.}$$

YANIT "A"

18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ise A^{-2} **matrisinin determinantı nedir?**

A) 2 B) 1 C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

ÇÖZÜM

$|A| = 1\cdot4 - 2\cdot1 = 2$ dir.

$$|A^{-2}| = |A|^{-2} = \frac{1}{|A|^2} \text{ olduğundan}$$

$$|A^{-2}| = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

YANIT "E"

19. $A = [a_{ij}]_{2x2}$ matrisi $a_{ij} = ij + i - j$ biçiminde tanımlanmıştır. **IAI değeri nedir?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

ÇÖZÜM

$a_{11} = 1+1-1=1 \qquad a_{21} = 2\cdot1+2-1=3$

$a_{12} = 1\cdot2+1-2=1 \qquad a_{22} = 2\cdot2+2-2=4$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-3=1$$

YANIT "B"

20. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisleri için

$A^{-1}\cdot B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ olduğuna göre **a kaçtır?**

A) 2 B) 1 C) a D) –1 E) –2

ÇÖZÜM

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$A^{-1}\cdot B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3a & 3 \\ a & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow a=2$$

YANIT "A"

21. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ denkleminin çözüm kümesi **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) {–1, 1} B) {–2,2} C) {–3,3}

D) {–4,4} E) Ø

ÇÖZÜM

$3\cdot x^2 = 4\cdot 12$

$x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \ \vee \ x = -4$ bulunur.

Çözüm kümesi {–4, 4}

YANIT "D"

22. Z/4 de

$A = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{3} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -\overline{3} & \overline{1} \\ \overline{3} & \overline{0} \end{bmatrix}$ matrisleri için

$|A^T B^T|$ **ifadesinin değeri nedir?**

A) $\overline{0}$ B) $\overline{1}$ C) $\overline{2}$ D) $\overline{3}$ E) $\overline{4}$

ÇÖZÜM

$$|A^T\cdot B^T| = |(B\cdot A)^T| = |BA|^T = |BA|$$

$$B\cdot A = \begin{bmatrix} -\overline{3} & \overline{1} \\ \overline{3} & \overline{0} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{3} & \overline{3} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$|BA| = \overline{3}$ bulunur.

YANIT "D"

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ olduğuna göre

$AX.B^{-1} = B$ eşitliğini sağlayan **X matrisinin tüm elemanlarının toplamı kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

ÇÖZÜM

$$AX\cdot B^{-1} = B$$

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I_2} X \cdot \underbrace{B^{-1}\cdot B}_{I_2} = A^{-1}\cdot B\cdot B$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}\cdot B^2$ olur.

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Elemanları toplamı 5 bulunur.

YANIT "C"

24. $\begin{bmatrix} a & 0 \\ \frac{3}{4} & b \end{bmatrix}$ matrisinin tersi kendisine eşit olduğuna göre **a + b toplamı nedir?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

ÇÖZÜM

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ \frac{3}{4} & b \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a\cdot b}\begin{bmatrix} b & 0 \\ -\frac{3}{4} & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{3}{4ab} & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$$

Tersi kendisine eşit olduğu için

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ \frac{3}{4} & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{3}{4ab} & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 = 1 \\ b = \frac{1}{b} \Rightarrow b^2 = 1 \\ a\cdot b = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -1 \quad b = 1 \quad \text{veya} \\ a = 1 \quad b = -1 \quad \text{olmalı} \end{array}$$

$a + b = 0$ bulunur.

YANIT "C"

25. $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 olsun.

$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix}$ **determinantı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{bc}{a}$ B) $\frac{b^2c}{a}$ C) $\frac{a^2}{bc}$

D) $\frac{a}{b^2c^2}$ E) $-\frac{bc}{a^2}$

ÇÖZÜM

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} = x_1\cdot x_2^2 + x_1^2\cdot x_2$$

$$= (x_1\cdot x_2)\cdot(x_2 + x_1)$$

$$= -\frac{bc}{a^2}$$

YANIT "E"

26. $\begin{bmatrix} 3 & r & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin rankının 1 olması için **r kaç olmalıdır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

ÇÖZÜM

$\begin{vmatrix} 3 & r \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r = 6$ bulunur.

YANIT "D"

27. $\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + 2x_4 = 4 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 = -5 \\ 4x_1 - 3x_3 = 1 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin **matrislerle ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

Seçenekler incelenirse kolaylıkla görülecektir.

YANIT "D"

28. $\left.\begin{array}{l} 2ax+3y=0 \\ -2x-6by=0 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin sonsuz çözümünün olması için **a ile b arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $a \cdot b = -\frac{1}{2}$ B) $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ C) $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$

D) $a - b = 2$ E) $a \cdot b = \frac{1}{2}$

ÇÖZÜM

$\Delta = 0$ olmalı $\begin{vmatrix} 2a & 3 \\ -2 & -6b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a \cdot b = \frac{1}{2}$

YANIT "E"

29. $\left.\begin{array}{r} x-3y+z=0 \\ x+ay+z=0 \\ x+2y+2z=0 \end{array}\right\}$ homogen denklem sistemi veriliyor. Bu sistemin (0,0,0) çözümünden başka bir çözümünün olması için **a ∈ R ne olmalıdır?**

A) –6 B) –5 C) –3 D) –1 E) 1

ÇÖZÜM

$\Delta = 0$ olmalı,

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$
$$\begin{matrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{matrix}$$

$2a + 2 - 3 - (a + 2 - 6) = 0$

$a - 1 + 4 = 0 \Rightarrow a = -3$ bulunur.

YANIT "C"

30. $\left.\begin{array}{l} 3x_1+x_2=-3 \\ 6x_1+2x_2=m \end{array}\right\}$ denklem sisteminin sonsuz çözümünün olması için **m ne olmalıdır?**

A) –6 B) –4 C) –2 D) 4 E) 6

ÇÖZÜM

$\Delta = 0$ ve $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ olması gerekir.

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ m & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m = -6$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 6 & m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m = -6$ bulunur.

YANIT "A"

31. $\left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=3 \\ 2y-3z=4 \\ x-6z=-2 \end{array}\right\}$ denklem sisteminde x, y, z bilinmeyenlerinin determinantları sırasıyla Δ_1, **Δ_2, Δ_3 ise $\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3$ değeri kaçtır?**

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

ÇÖZÜM

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -6 \end{vmatrix}$ olduğundan

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -54$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & -6 \end{vmatrix} = -81$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -18$

$\Rightarrow \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 = -54 - (-81) - 18$

$= 9$ bulunur.

YANIT "A"

ÇÖZÜMLÜ TEST –3

1. A, B ve C birer matris olmak üzere;

$C = B^T.A^T + A.B$ ise **C^T nedir?**

A) $A^T.B^T$ B) A.B C) B.A

D) C^{-1} E) C

ÇÖZÜM

$$C^T = \left(B^T\cdot A^T + A\cdot B\right)^T = \left((A\cdot B)^T + A\cdot B\right)^T \Rightarrow$$

$$C^T = \left(\left((A\cdot B)^T\right)^T + (A\cdot B)^T\right)$$

$$C^T = A\cdot B + B^T\cdot A^T = C$$

YANIT "E"

2. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri için

A.B + B.A işleminin sonucu nedir?

A) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B\cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A\cdot B + B\cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

YANIT "A"

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ matrisi için **A^{42} nedir?**

A) $2^{21}.A$ B) $2^{42}.A$ C) A^T

D) A E) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olduğundan

$$A^{42} = \left(A^2\right)^{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

YANIT "E"

4. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

X.B = A eşitliğini sağlayan X matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 11 & 8 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 8 & 11 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -8 & -5 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 11 & 8 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -9 & 6 \\ 11 & 8 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

$$X\cdot B = A \Rightarrow X\cdot\underbrace{B\cdot B^{-1}}_{I_2} = A\cdot B^{-1}$$

$$X = A\cdot B^{-1}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-8-(-9)}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

O halde $X = A.B^{-1}$ olduğundan

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$$

YANIT "B"

5. Terimleri 2 x 2 türünde matrisler olan bir (a_n) aritmetik dizisinde

$a_1 = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ve $a_7 = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$ olduğuna

göre, **a_3 aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

Aritmetik dizinin ortak farkını bulalım.

$$r_{2x2} = \frac{a_7 - a_1}{7-1} = \frac{\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}{6} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$a_3 = a_1 + 2r = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

YANIT "D"

6. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 9 & 11 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

3.A + 2.B = C eşitliğini gerçekleyen B matrisinin devriği nedir?

A) $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

$$3 \cdot A + 2 \cdot B = C \Rightarrow B = \frac{C - 3 \cdot A}{2}$$

$$B = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 9 & 11 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

YANIT "C"

7. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ve

$C = A^T \cdot B^{-1}$ eşitliğini gerçekleyen **C matrisi nedir?**

A) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 14 & 4 \\ -4 & 3 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -4 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{9-8}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = A^T \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$$

YANIT "A"

8. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi için **A^{30} nedir?**

A) $2^{15}.I_{2x2}$ B) $4^{15}.I_{2x2}$ C) $-2^{15}.A$

D) $-2^{15}.I_{2x2}$ E) $-2^{15}.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = -2.I_2 \Rightarrow A^{30} = (A^2)^{15} = (-2 \cdot I_2)^{15}$$

$$A^{30} = -2^{15}.I_{2x2}$$

YANIT "D"

9. $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\4&0&2\\5&1&3\end{bmatrix}$ matrisi için $\left(A^{-1}\right)^{T}$ **matrisinin determinantı kaçtır?**

A) 6 B) 3 C) 2 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

ÇÖZÜM

$$\det\left[\left(A^{-1}\right)^{T}\right]=\left(\det(A)\right)^{-1}$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}2&1&3\\4&0&2\\5&1&3\\2&1&3\\4&0&2\end{vmatrix}=6\Rightarrow\left(\det(A)\right)^{-1}=\frac{1}{6}$$

YANIT "E"

10. $A=\begin{bmatrix}2&1&4&3\\3&2&6&8\\5&7&10&4\\-1&2&-2&3\end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

det(A) kaçtır?

A) 30 B) 12 C) 0 D) –15 E) –25

ÇÖZÜM

A matrisinde 3. sütun 1. sütunun 2 katı olduğundan det (A) = 0 olur.

YANIT "C"

11. $A=\begin{bmatrix}-5&1\\4&1\end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

det(A^{40}) kaçtır?

A) 3^{80} B) 3^{40} C) 0 D) -3^{40} E) -3^{80}

ÇÖZÜM

$$\det\left(A^{40}\right)=\left(\det(A)\right)^{40}=(-5-4)^{40}=(-9)^{40}=3^{80}$$

YANIT "A"

12. $\begin{vmatrix}\log(x-2)&-3\\1&1\end{vmatrix}\le 2$ eşitsizliğinin **çözüm kümesi nedir?**

A) $\left(0,\frac{21}{10}\right]$ B) $\left(2,\frac{21}{10}\right)$ C) $\left[2,\frac{21}{10}\right]$

D) $\left(2,\frac{21}{10}\right]$ E) $\left[\frac{21}{10},\infty\right)$

ÇÖZÜM

$$\log(x-2)+3\le 2\Rightarrow\log(x-2)\le -1$$

$$x-2\le\frac{1}{10}\Rightarrow x\le\frac{21}{10}$$

Ayrıca $x-2>0$ olmalı. Buradan $x>2$ bulunur.

İki aralığı kesiştirerek $2<x\le\frac{21}{10}$

YANIT "D"

13. $A=\begin{bmatrix}-2&3&1\\4&5&1\\3&2&5\end{bmatrix}$ matrisi için a_{32} **nin kofaktörü (eşçarpanı) kaçtır?**

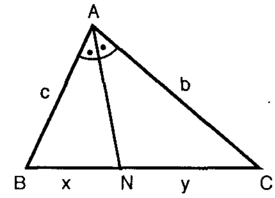
A) 12 B) 6 C) 0 D) –6 E) –12

ÇÖZÜM

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}-2&1\\4&1\end{vmatrix}=-1\cdot(-6)=6$$

YANIT "B"

14. [AN] açıortay olmak üzere ve şekilde verilenlere göre



$$\begin{vmatrix}2&4&5\\c&b&b+c\\x&y&x+y\end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

A) xybc B) xy + bc C) 1

D) 0 E) x + y + b + C

ÇÖZÜM

ABC üçgeninde $\frac{x}{c}=\frac{y}{b}=\frac{x+y}{c+b}$ orantısı bulunduğundan 2. satır ve 3. satırın orantılı olduğu görülür. Dolayısıyla determinantın değeri 0 dır.

YANIT "D"

15. x, y, z, t birer tamsayı olmak üzere;

$A=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ veriliyor.

Buna göre **$\det\left(\left(A^T\cdot A\right)^T\right)$ aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 5 B) 8 C) 12 D) 27 E) 49

ÇÖZÜM

$$\det\left(\left(A^T\cdot A\right)^T\right)=\det\left(A^T\cdot A\right)=\det\left(A^T\right)\cdot\det(A)$$
$$=(\det A)^2$$
$$=(xt-yz)^2$$

Dolayısıyla sonuç bir tam kare olmalı.

YANIT "E"

16. $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} \frac{1}{64} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{64} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{64} \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. **Buna göre A.B matrisinin tersi aşağıdakilerden hangisidir.**

A) $2^{10}.I_{3x3}$ B) $2^5.I_{3x3}$ C) $2^4.I_{3x3}$

D) I_{3x3} E) $2.I_{3x3}$

ÇÖZÜM

$$A\cdot B=2\cdot\frac{1}{64}\cdot I_{3x3}$$
$$=\frac{1}{32}\cdot I_{3x3}$$
$$(A\cdot B)^{-1}=\left(\frac{1}{32}\cdot I_{3x3}\right)^{-1}$$
$$=32\cdot I_{3x3}$$
$$=2^5\cdot I_{3x3}$$

YANIT "B"

17. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ matrisleri verliyor. **det(A.B)^2 kaçtır?**

A) –49 B) –7 C) 0 D) 7 E) 49

ÇÖZÜM

$$A\cdot B=\left[6+2-12+5-8\right]=[-7]$$
$$\det(A\cdot B)^2=(-7)^2=49$$

YANIT "E"

18. $\begin{bmatrix} 1 & x & 2 \\ 1 & 0 & x \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi olmadığına göre **x in alabileceği değerler toplamı kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 11

ÇÖZÜM

det(A) = 0 olmalı. 2. satıra göre determinant değerini bulalım.

$$\det(A)=1(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} x & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}+x\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$
$$\det(A)=-(4x+6)-x\cdot(-3-x)=0$$
$$-4x-6+3x+x^2=0$$
$$x^2-x-6=0$$
$$\text{Kökler toplamı}=\frac{-b}{a}=1$$

YANIT "D"

19. $A=\begin{bmatrix} \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{2} & \bar{3} \end{bmatrix}$ matrisinin (Z/5, +, .) te **çarpmaya göre tersi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{3} \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{3} \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{3} \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

$$A^{-1} = \frac{1}{9-8}\begin{bmatrix} \overline{3} & \overline{-4} \\ \overline{-2} & \overline{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{3} & \overline{1} \\ \overline{3} & \overline{3} \end{bmatrix}$$

YANIT "B"

20. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

$X + A^2 = A^{-1}$ koşulunu sağlayan X matrisinin tüm elemanları toplamı kaçtır?

A) –7 B) –5 C) –3 D) –1 E) 0

ÇÖZÜM

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} - A^2 = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow -3-1-\frac{1}{2}-\frac{5}{2} = -7$$

YANIT "A"

21. $f(x) = \begin{vmatrix} 2^{x+1} & 2 \\ 2^x & 3 \end{vmatrix}$ $g(x) = \begin{vmatrix} 2^x & 1 \\ 2^x & 4 \end{vmatrix}$ fonksiyonları veriliyor. **$(fog)(1)$ değeri kaçtır?**

A) 512 B) 256 C) 128 D) 64 E) 32

ÇÖZÜM

$$f(x) = 3 \cdot 2^{x+1} - 2^{x+1}$$
$$g(x) = 2^{x+2} - 2^x \qquad \Rightarrow (fog)(1) = f(g(1))$$
$$= f(6) = 3 \cdot 2^7 - 2^7$$
$$\Rightarrow (fog)(1) = 256$$

YANIT "B"

22. $\begin{vmatrix} [\![\frac{x}{2}]\!] & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 10$ eşitliğini gerçekleyen **<u>en büyük</u> x tamsayısı kaçtır?**

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

ÇÖZÜM

$$4 \cdot [\![\frac{x}{2}]\!] - 6 = 10 \Rightarrow [\![\frac{x}{2}]\!] = 4$$

$$4 \le \frac{x}{2} < 5$$

$$8 \le x < 10$$

En büyük x tamsayısı $x = 9$ olur.

YANIT "C"

23. $A = \begin{bmatrix} -2 & -x+4 \\ -x & m \end{bmatrix}$ matrisinin $\forall x \in R$ için çarpmaya göre tersinin var olabilmesi için **m aşağıdakilerden hangisinde bulunmalıdır?**

A) $(2, \infty)$ B) $(-2, 2)$ C) $(4, \infty)$
D) $(-\infty, 2)$ E) $(-\infty, -2)$

ÇÖZÜM

$\det(A) \neq 0$ olmalı

$-2m - (-x).(-x+4) \neq 0 \Rightarrow -2m - x^2 + 4x \neq 0$

İkinci derece denkleminde $\Delta < 0$ olmalı.

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4.(-1).(-2m) < 0$

$m > 2 \Rightarrow m \in (2, \infty)$

YANIT "A"

24. $\left.\begin{aligned} 2x + 3y + az &= 5 \\ -x - y + z &= -2 \\ x + ay + 3z &= 7 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin tek çözümünün var olması için **a ne <u>olmamalıdır?</u>**

A) $\{2, 3\}$ B) $\{-2, 1\}$ C) $\{-3, 2\}$
D) $\{-1, 3\}$ E) $\{-3, -2\}$

ÇÖZÜM

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & a \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ olmalı. Determinant açılırsa

$a^2 + a - 6 \neq 0$ elde edilir.

$(a+3)(a-2) \neq 0$ için $a \neq -3$
$a \neq 2$ olmalı

YANIT "C"

25. $\begin{vmatrix} 1993 & 1991 \\ 1989 & 1987 \end{vmatrix}$ **determinantının değeri kaçtır?**

A) 10 B) 8 C) –6 D) –8 E) –10

ÇÖZÜM

$1991 = x$ alınırsa $\begin{vmatrix} x+2 & x \\ x-2 & x-4 \end{vmatrix} = -8$ bulunur.

YANIT "D"

26. $\begin{vmatrix} \cos 75° & \sin 75° \\ \sin 105° & \cos 285° \end{vmatrix}$ **determinantının değeri kaçtır?**

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0

D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ÇÖZÜM

$\sin 105° = \sin(180° - 75°) = \sin 75°$

$\cos 285° = \cos(360° - 75°) = \cos 75°$ alınırsa

$$\begin{vmatrix} \cos 75° & \sin 75° \\ \sin 75° & \cos 75° \end{vmatrix} = \cos^2 75° - \sin^2 75°$$
$$= \cos 150°$$
$$= -\cos 30°$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

YANIT "A"

27. Aşağıdakilerden hangisi A(–2, 3) ve B(4, –1) noktasından geçen doğrunun denklemidir?

A) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ B) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

C) $\begin{vmatrix} x & -2 & 4 \\ y & 3 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$ D) $\begin{vmatrix} x & -2 & 3 \\ y & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

E) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$

ÇÖZÜM

Bu noktalardan geçen doğrunun denklemi

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2}{3}$ $y - 3 = -\frac{2}{3}(x+2) \Rightarrow$

$2x + 3y = 5$

seçeneklerde bu koşulu sağlayan C dir.

YANIT "C"

28. $f(2x-4) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ x & x & -3 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ ise **f(6) kaçtır?**

A) –67 B) –57 C) 0 D) 57 E) 67

ÇÖZÜM

f(6) sorulduğuna göre sistemde x yerine 5 yazılırsa determinantın değeri –67 bulunur.

YANIT "A"

29. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisleri için

det($A^3.B^2$) kaçtır?

A) 392 B) 432 C) 452 D) 464 E) 532

ÇÖZÜM

$\det(A^3.B^2) = (\det A)^3.(\det B)^2 = 3^3.4^2 = 27.16$

$= 432$

YANIT "B"

30. $x^2 - 5x - 7 = 0$ denkleminin kökleri a ve b olduğuna göre, $\begin{vmatrix} a-1 & b \\ -b & a+1 \end{vmatrix}$ **determinantının değeri kaçtır?**

A) 4 B) 5 C) 10 D) 15 E) 38

ÇÖZÜM

$$\begin{vmatrix} a-1 & b \\ -b & a+1 \end{vmatrix} = a^2 - 1 - (-b^2) = a^2 + b^2 - 1$$
$$= (a+b)^2 - 2ab - 1$$
$$= 5^2 - 2(-7) - 1$$
$$= 25 + 14 - 1 = 38$$

$a + b =$ Kökler toplamı $= 5$

$a \cdot b =$ Kökler çarpımı $= -7$

YANIT "E"

ÇÖZÜMLÜ TEST –4

1. Aşağıdaki kümelerden hangisi R^2 nin bir alt uzayı değildir?

A) $\{(x,y) \in R^2 : x = 2y\}$

B) $\{(x,y) \in R^2 : x = y\}$

C) $\{(x,y) \in R^2 : x - 3y = 0\}$

D) $\{(x,y) \in R^2 : x - 5y = 0\}$

E) $\{(x,y) \in R^2 : y = x - 2\}$

ÇÖZÜM

$A = \{(x,y) \in R^2 : y = x - 2\}$ kümesinin R^2 nin bir alt uzayı olmadığını gösterelim.

$A = \{(x,y) \in R^2 : x - y - 2 = 0\}$

$(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in A$ olsun.

$(x_1,y_1) \in A \Rightarrow \quad x_1 - y_1 - 2 = 0$

$(x_2,y_2) \in A \Rightarrow \quad + \; x_2 - y_2 - 2 = 0$

$(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) - 4 = 0$

$(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in A$ olsaydı,

$(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) - 2 = 0$ eşitliği sağlanmalıydı. Öyleyse

$(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \notin A$ dır.

Yani $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \notin A$ dır.

A kümesi toplama işlemine göre kapalı olmadığından R^2 nin bir alt uzayı değildir.

YANIT "E"

2. R^3 de $\vec{A} = (1, 1, 0)$ ve $\vec{B} = (0, 2, -1)$ vektörlerinin gerdiği alt uzayın denklemi **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x + y + z = 0$ B) $x - y - 2z = 0$

C) $x + y = 0$ D) $x - y + z = 0$

E) $x + 5y + 3z = 0$

ÇÖZÜM

$\vec{A} = (1, 1, 0)$ ve $\vec{B} = (0, 2, -1)$

vektörlerinin gerdiği alt uzay

$\{r_1(1,1,0) + r_2(0,2,-1) : r_1, r_2 \in R\}$ dir.

Alt uzayın herhangi bir vektörü (x, y, z) olsun x, y, z arasındaki bağıntı alt uzayın denklemini verir.

$(x,y,z) = r_1(1,1,0) + r_2(0,2,-1)$

$(x,y,z) = (r_1, r_1, 0) + (0, 2r_2, -r_2)$

$(x,y,z) = (r_1, r_1 + 2r_2, -r_2)$ den

$x = r_1, \quad y = r_1 + 2r_2, \quad z = -r_2$ dir.

$r_1 = x$ ve $r_2 = -z$ değerlerini

$y = r_1 + 2r_2$ de yerine koyalım.

$y = x + 2.(-z)$

$y = x - 2z$

$x - y - 2z = 0$ elde edilir.

YANIT "B"

3. $\vec{A} = (2, [\![x]\!])$ ve $\vec{B} = (1, 4)$ vektörleri lineer bağımlı ise x in değer aralığı **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) [8, 9) B) [7, 8) C) [5, 6)

D) [1, 7) E) [1, 8)

ÇÖZÜM

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri lineer bağımlı ise vektör bileşenlerinin oluşturduğu determinantın değeri sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 2 & [\![x]\!] \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$2.4 - [\![x]\!] = 0$

$[\![x]\!] = 8$

$8 \leq x < 9$

$x \in [8, 9)$ bulunur.

YANIT "A"

4. $\vec{A} = (1, 2, 3)$, $\vec{B} = (2, 4, k)$ ve $\vec{C} = (2, 2, 3)$ vektörlerinin uzayı germemeleri için **k ne olmalıdır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

ÇÖZÜM

Doğrusal (lineer) bağımlı vektörler uzayı germezler. Öyleyse vektörlerin bileşenlerinden oluşan determinantın değeri sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & k \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & k \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & k \end{array} = 12 + 12 + 4k - 24 - 2k - 12 = 0$$

$$2k - 12 = 0$$

$$2k = 12$$

$k = 6$ bulunur.

YANIT "D"

5. $\vec{A} = (x, y)$ vektörü R^2 de $\vec{B} = (1, -2)$ vektörünün gerdiği alt uzayın bir elemanı olduğuna göre x ile y arasındaki bağıntı **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x + 2y = 0$ B) $x + y = 0$ C) $2x + y = 0$
D) $x - 4y = 0$ E) $2x + 3y = 0$

ÇÖZÜM

R^2 de $\vec{B} = (1, -2)$ vektörünün gerdiği alt uzay V olsun.

$V = \{k(1,-2) : k \in R\}$ dir.

$\vec{A} \in V \Rightarrow k \in R \wedge \vec{A} = (x,y)$ için

$(x, y) = k(1, -2)$ yazılır.

$(x, y) = (k, -2k)$

$x = k \wedge y = -2k$

$-\dfrac{y}{2} = k$ dan

$x = -\dfrac{y}{2}$

$2x = -y$

$2x + y = 0$ elde edilir

YANIT "C"

6. A(3, –1) ve B(5, –7) noktaları ile $\vec{V} = (a-1)\, e_1 - (a + 7)\, e_2$ vektörleri veriliyor. $\vec{BA}$ ve $\vec{v}$ vektörleri lineer bağımlı ise **a aşağıdakilerden hangisidir?**

A) –6 B) –4 C) –2 D) 3 E) 5

ÇÖZÜM

$\vec{BA} = \vec{A} - \vec{B}$

$\vec{BA} = (3, -1) - (5, -7)$

$\vec{BA} = (3 - 5, -1 + 7)$

$\vec{BA} = (-2, 6)$

$\vec{V} = (a - 1, -a - 7)$

$\vec{BA}$ ve $\vec{V}$ vektörleri lineer bağımlı ise bileşenlerinin oluşturduğu determinantın değeri sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ a-1 & -a-7 \end{vmatrix} = 0$$

$$2a + 14 - 6a + 6 = 0$$

$$-4a + 20 = 0$$

$$4a = 20$$

$a = 5$ bulunur.

YANIT "E"

7. $R^2 \to R^3$ lineer dönüşümünün matrisi,

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ise f dönüşümü **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $f(x_1; x_2) = (2x_1 + x_2; -x_1; 3x_1 + x_2)$

B) $f(x_1; x_2) = (2x_1 - x_2; x_1 + 3x_2; x_1 + x_2)$

C) $f(x_1; x_2) = (2x_1 + x_2; x_1 + 3x_2; x_1 + x_2)$

D) $f(x_1; x_2) = (2x_1 - x_2; x_1 + 3x_2; x_2)$

E) $f(x_1; x_2) = (2x_1; x_1 + 3x_2; x_2)$

ÇÖZÜM

$R^2 \to R^3$ lineer dönüşümün matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x2} \text{ ise f dönüşümü}$$

$f(x_1; x_2) = (2x_1 - x_2; x_1 + 3x_2; x_2)$ biçimindedir.

YANIT "D"

8. $A = [a_{ij}]_{2x2}$ matrisi,

$\vec{X} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ vektörünü $\vec{Y} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektörüne dönüştürüyor.

Buna göre $\vec{Z} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektörünü **aşağıdakilerden hangisine dönüştürür?**

A) $\begin{bmatrix} 10 \\ -18 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -10 \\ 18 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 18 \\ -10 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} -18 \\ 10 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -10 \\ -18 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

$A = [a_{ij}]_{2x2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun.

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \end{bmatrix}$ dir.

$$\begin{bmatrix} 2a - 3b \\ 2c - 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2a - 3b &= -9 \\ 2c - 3d &= 5 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4a + 6b \\ -4c + 6d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(2a - 3b) \\ -2(2c - 3d) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-2)\cdot(-9) \\ (-2)\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -10 \end{bmatrix} \text{bulunur.}$$

YANIT "C"

9. $R^3 \to R^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_2 - x_3)$ lineer dönüşüme karşılık gelen matris **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

f dönüşümünün matrisi 2x3 türündedir.

$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_2 - x_3)$ ise

dönüşüm matrisi $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ dir.

YANIT "B"

10. $R^2 \to R^2$ ye f ve g lineer dönüşümleri

$f(x_1; x_2) = (x_1 + x_2 , 2x_1)$

$g(x_1; x_2) = (2x_2, x_1 - x_2)$

biçiminde tanımlanıyor.

fog dönüşümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(fog)(x_1; x_2) = (4x_2; x_2 - x_1)$

B) $(fog)(x_1; x_2) = (4x_2; x_1 - x_2)$

C) $(fog)(x_1; x_2) = (x_1 + x_2 ; 2x_2 - 2x_1)$

D) $(fog)(x_1; x_2) = (x_1 + x_2; 2x_1 - 2x_2)$

E) $(fog)(x_1; x_2) = (x_1 + x_2, 4x_2)$

ÇÖZÜM

$f(x_1; x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1)$ dönüşümünün matrisi

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ve

$g(x_1; x_2) = (2x_2, x_1 - x_2)$ dönüşümünün matrisi

$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ dir.

$$(fog) = A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$(fog) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ olur ki bu da

$(fog)(x_1; x_2) = (x_1 + x_2, 4x_2)$

biçiminde yazılır.

YANIT "E"

11. f: $R^2 \to R^2$, f(x,y) = (2x, 3x – y) dönüşümü veriliyor. fof dönüşümünün matrisi **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

f dönüşümünün matrisi A olsun A, 2x2 türünde bir kare matristir.

$f(x,y) = (2x, 3x - y)$ ise $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ olur.

$(fof) = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

elde edilir.

YANIT "A"

12. f: $R^2 \to R^2$ dönüşümünün matrisi

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ise $f^{-1}(2,0)$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

f nin dönüşüm matrisi A ise, f^{-1} in dönüşüm matrisi de A^{-1} dir.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ olduğunu

hatırlayalım. Öyleyse;

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ bulunur.

$f^{-1}(2,0) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ olur.

YANIT "A"

13. f: $R^2 \to R^3$,

f(x, y) = (2x + y, x – 3y, 3x – 5y) dönüşümünün matrisi A ise **A^T matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

f: $R^2 \to R^3$, f(x,y) = (2x + y, x – 3y, 3x – 5y) dönüşümünün matrisi, yani A, 3x2 türündedir.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}_{3x2}$ olup,

Anın devriği (transpozesi)

A^T, 2x3 türündedir.

$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ bulunur.

YANIT "B"

14. f: $R^3 \to R^2$, doğrusal dönüşümünün matrisi

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ise **f, (1, 1, 0) vektörünü hangi noktaya dönüştürür?**

A) (1, –2) B) (1, –1) C) (1, 2)

D) (2, 1) E) (2, 2)

ÇÖZÜM

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = (1,2)$ bulunur.

YANIT "C"

15. f: $R^2 \to R^2$ ve g: $R^2 \to R^2$ doğrusal dönüşümlerinin matrisleri sırasıyla

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $(fog)(2,-1)$ **kaçtır?**

A) $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

(fog) dönüşümünün matrisi A.B dir.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan;

$$(fog)(2,-1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

YANIT "D"

16. f: $R^2 \to R^2$, f(x,y) = (5x + ay, 6x – 5y) doğrusal dönüşümünün ters dönüşümü kendisine eşit olduğuna göre, **a kaçtır?**

A) –4 B) –3 C) –1 D) 2 E) 4

ÇÖZÜM

f doğrusal dönüşümünün matrisi A ise f^{-1} doğrusal dönüşümünün matrisi A^{-1} dir.

Yani; $A = A^{-1}$ olmalıdır.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & a \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\det A = -25 - 6a$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-25-6a} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -a \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{25+6a} & \dfrac{a}{25+6a} \\ \dfrac{6}{25+6a} & \dfrac{-5}{25+6a} \end{bmatrix} \text{ olur ki}$$

$$A = A^{-1} \Rightarrow \frac{5}{25+6a} = 5 \text{ den}$$

$$25 + 6a = 1$$

$$6a = -24$$

$$a = -4 \text{ elde edilir.}$$

YANIT "A"

17. f: $R^2 \to R^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - 5x_2)$ doğrusal dönüşümünün çekirdeği **aşağıdakilerden hangisidir?** ($k \in R$)

A) (k, 5k) B) (5k, k) C) (–k, 5k)

D) (5k, –k) E) (–5k, k)

ÇÖZÜM

$f(x_1, x_2) = x_1 - 5x_2 = 0$ olmalıdır.

$x_2 = k$ denilirse $x_1 = 5x_2$ den

$x_1 = 5k$ olur.

Yani;

$f(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow (x_1, x_2) = (5k, k)$, $k \in R$ dir.

$\text{çekf} = \{(5k, k) \mid k \in R\}$

$\text{çekf} = \{(5,1)k \mid k \in R\}$ olur.

YANIT "B"

ZAFER YAYINLARI

18. (2, –1) öteleme vektörü **(4,3) vektörünü hangi vektöre dönüştürür?**

A) (–2, –4) B) (2, 4) C) (6, 2)

D) (2, 6) E) (6, 4)

ÇÖZÜM

(4, 3) vektörünün (2, –1) vektörü kadar ötelenmişi;

(4 + 2, 3 + (–1)) = (6, 2) dir.

YANIT "C"

19. f: $R^2 \to R^2$, f(x,y) = (x–1, y+3) ötelemesinin **tersi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $f^{-1}(x,y) = (x - 1, y + 3)$

B) $f^{-1}(x, y) = (x + 1, y - 3)$

C) $f^{-1}(x, y) = (x + 1, y + 3)$

D) $f^{-1}(x, y) = (-x + 1, y + 3)$

E) $f^{-1}(x, y) = (-x + 1, -y - 3)$

ÇÖZÜM

$f(x, y) = (x - 1, y + 3)$

$x - 1 = X \quad \wedge \quad y + 3 = Y$

$x = X + 1 \qquad y = Y - 3$ olur.

$f^{-1}(x, y) = (x + 1, y - 3)$ bulunur.

YANIT "B"

20. $f(x, y) = (x - 4, y + 1)$

$g(x, y) = (x + 2, y - 4)$

ötelemeleri için (fog) ötelemesi **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(fog)(x, y) = (2x - 2, 2y - 3)$

B) $(fog)(x, y) = (x + 2, y + 3)$

C) $(fog)(x, y) = (-x + 2, y - 3)$

D) $(fog)(x, y) = (x - 2, -y + 3)$

E) $(fog)(x, y) = (x - 2, y - 3)$

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}(fog)(x, y) &= f[g(x, y)] \\ &= f(x + 2, y - 4) \\ &= (x + 2 - 4, y - 4 + 1) \\ &= (x - 2, y - 3) \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

YANIT "E"

21. Düzlemde, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ radyanlık pozitif yöndeki dönme matrisinde (2, 4) noktasının görüntüsü **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(3\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ B) $(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$

C) $(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$ D) $(-\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

E) $(-\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

ÇÖZÜM

Dönme matrisi $= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

(2, 4) noktasının görüntüsü:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \left(-\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)$$

YANIT "D"

22. R^2 de x eksenine göre simetrik dönüşümün matrisi A, $y = x$ doğrusuna göre simetrik dönüşümün matrisi B ise **A.B matrisi nedir?**

A) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

x eksenine göre simetrik dönüşümün matrisi;

$A_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ve

$y = x$ doğrusuna göre simetrik dönüşümün matrisi;

$$B_{y=x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_x \cdot B_{y=x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

YANIT "B"

23. R^2 de orijine göre simetrik dönüşümün matrisi A, y = –x doğrusuna göre simetrik dönüşümün matrisi B dir. **Buna göre A.B^d matrisi nedir?**

A) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ÇÖZÜM

Orijine göre simetrik dönüşümün matrisi:

$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ve

y = –x doğrusuna göre simetrik dönüşümün matrisi

$B_{y=-x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ olup,

$B^d = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ dır.

$$A \cdot B^d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

YANIT "B"

24. Orijin noktası etrafında $\frac{3\pi}{2}$ radyanlık dönme matrisi, **bu dönme altında (–2, 4) noktasını hangi noktaya dönüştürür?**

A) (4, 2) B) (4, –2) C) (–4, 2)

D) (–4, –2) E) (2, –4)

ÇÖZÜM

Bu dönmenin matrisi,

$A_{\frac{3\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ dır.

(–2, 4) noktasının bu dönme altındaki görüntüsü

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = (4,2) \text{ dir.}$$

YANIT "A"

25. f: $R^2 \to R^2$ doğrusal (lineer) dönüşümünün standart tabana göre matrisi $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ dir. **Bu dönüşüm x + y + 1 = 0 denklemi ile verilen doğru üzerindeki hangi noktayı kendisine eşler?**

A) (–1, 0) B) (1, –2) C) (0, –1)

D) (2, –3) E) (–2, 1)

ÇÖZÜM

x + y + 1 = 0 doğrusu üzerinde herhangi bir A noktası alalım A(t, –t – 1) biçimindedir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ -t-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} t \\ -2t-t-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} t \\ -3t-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t-1 \end{bmatrix}$$

$$-3t-1 = -t-1$$

$$2t = 0$$

$$t = 0 \text{ olur.}$$

Öyleyse dönüşüm, x + y + 1 = 0 doğrusu üzerindeki A(0, –1) noktasını kendisine eşler.

YANIT "C"

LİNEER CEBİR

TEST 1

1. $A=\begin{bmatrix}3&4&1&2\\4&3&5&2\\4&1&1&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&4&2\\-1&5&-4\end{bmatrix}$

$A=[a_{ij}]_{3x4}$, $B=[b_{ij}]_{2x3}$ ise

$2a_{13}+a_{23}-b_{23}$ ifadesinin eşiti nedir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

2. $2\begin{bmatrix}x+4&y-2\\4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4\\8&6\end{bmatrix}$ olduğuna göre

x.y nedir?

A) –12 B) –8 C) –2 D) 2 E) 4

3. $A=\begin{bmatrix}2&1\\3&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0\\1&-1\end{bmatrix}$ olduğuna göre, **aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?**

A) $3A+3B=3(B+A)$

B) $B(A+B)=BA+B^2$

C) $(A-B)B=BA-B^2$

D) $3A+B=B+3A$

E) $(A+B)^T=B^T+A^T$

4. $\begin{bmatrix}a+b&\operatorname{sgn}(x^2+4)\\x+2&\log_2 x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}[\![e]\!]&b-c\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3\\b&5\end{bmatrix}$

olduğuna göre **ac + b.x değeri nedir?**

A) 3 B) 2 C) –1 D) –2 E) –3

5. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ve

$\sin\theta\begin{bmatrix}2\cos\theta&\cot\theta\\\sin\theta&\operatorname{cosec}\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&x\\y&z\end{bmatrix}$ ise

$\frac{x^2+y}{z}$ değeri nedir?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{3}{8}$ D) 1 E) $\frac{1}{4}$

6. $A=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2&3\\4&a\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2&6\\b&3\end{bmatrix}$ olduğuna göre, **A + B = C koşulunu sağlayan (a,b) ikilisi neye eşittir?**

A) (3, 4) B) (2, 4) C) (3, 5)
D) (1, 5) E) (2, 6)

7. $A=\begin{bmatrix}2&a&6\\b-a&3&4\\b+1&4&5\end{bmatrix}$ olmak üzere, $A^T=A$ ise

a aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{7}{2}$ D) 2 E) $\frac{9}{2}$

8. $\begin{bmatrix}1&2&-1\\4&3&1\\-2&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&-2\\1&1\\4&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&\bullet\\\bullet&b\\\bullet&c\end{bmatrix}$ ise

a + b + c toplamı kaçtır?

A) 9 B) 7 C) 4 D) 3 E) 1

9. $A=\begin{bmatrix}3&3\\-1&-1\end{bmatrix}$ matrisi için $A^3=k.A$ ise **k nedir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10. $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ise **xt – yz ifadesi neye eşittir?**

A) 0 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

11. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ise **A^{10} matrisi nedir?**

A) $\begin{bmatrix} 2^{10} & 0 \\ 2^{10} & 2^{10} \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2^{10} & 2^{10} \\ 0 & 8 \cdot 2^{10} \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 2^{10} & 0 \\ 9 \cdot 2^{10} & 2^{10} \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 2^{10} & 0 \\ 10 \cdot 2^{9} & 2^{10} \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ matrisi için **A^{200} matrisi nedir?**

A) $5^{200}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 5^{100} & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 5^{100} & 0 \\ 5^{100} & 5^{100} \end{bmatrix}$

E) $5^{400}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ olduğuna göre **A^4 neye eşittir?**

A) 18A B) 27A C) 36A
D) 42A E) 54A

14. Terimleri 2x2 türünde matrisler olan bir (a_n) aritmetik dizisinde

$a_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$, $a_8 = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$ olduğuna göre **a_5 aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. **A^n matrisi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n^5 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5^n & 1 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5n & 1 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^n \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 126 \end{bmatrix}$

eşitliğini sağlayan **(x, n) ikilisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) (4, 7) B) (7, 3) C) (7, 4)
D) (17, 9) E) (21, 6)

17. $\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\end{bmatrix}^3 - 3\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\end{bmatrix}^2 + 3\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\begin{bmatrix}-3&8\\4&3\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}-11&13\\30&12\end{bmatrix}$

C) $3\begin{bmatrix}4&-9\\7&11\end{bmatrix}$ D) $2\begin{bmatrix}-6&10\\15&-16\end{bmatrix}$

E) $4\begin{bmatrix}-3&4\\6&5\end{bmatrix}$

18. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $\left(\left(A^T\right)^T\right)^T = A$

B) $\left[A^T\cdot(B+C)\right]^T = B^T\cdot A^T + C^T\cdot A$

C) $(A\cdot B\cdot C\cdot D)^T = D^T\cdot C^T\cdot A^T\cdot B^T$

D) $(A+B+C)^T = B^T + A^T + C^T$

E) $A^T + B^T = (A\cdot B)^T$

19. $A = \begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&4\\-1&0&1\end{bmatrix}$ ve $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ ise **f(A) nedir?**

A) $\begin{bmatrix}14&9&0\\18&8&4\\-13&3&12\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}-13&-4&7\\4&7&11\\14&19&34\end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix}18&20&14\\7&-14&13\\6&7&11\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}-11&16&44\\-16&9&32\\-4&-8&-11\end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix}-13&14&6\\6&8&9\\14&7&8\end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix}1&3&-2\\4&2&3\end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix}4&5\\3&2\end{bmatrix}$ matrisleri için **aşağıdakilerden hangisi hesaplanabilir?**

A) $B^T.A^T$ B) $A.B$ C) $A - B$

D) $B.A^T$ E) $A^T.B$

21. $A = \begin{bmatrix}\sin x&\cos x\\-\cos x&\sin x\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}\sin x&\cos x\\\cos x&-\sin x\end{bmatrix}$ ise

A.B matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\1\\2\\3\end{bmatrix}$ ise $\dfrac{x\cdot y}{z+t}$ **değeri nedir?**

A) 4 B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) 8 E) 12

23. $A = \left[a_{ij}\right]_{3x2}$ olmak üzere,

$a_{ij} = i + j \equiv k(\text{mod } 3)$ ile tanımlıdır.

$A\cdot A^T = \begin{bmatrix}x&\bullet&\bullet\\\bullet&y&\bullet\\\bullet&\bullet&z\end{bmatrix}$ ise **x + y + z toplamı kaçtır?**

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

24. $A^T\cdot B^T = \begin{bmatrix}1&4\\2&-3\end{bmatrix}$ ise **B.A matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix}1&4\\3&1\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}1&2\\4&-3\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}1&-3\\2&4\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}4&1\\-3&2\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}-3&1\\2&4\end{bmatrix}$

LİNEER CEBİR

TEST 2

1. $A=\begin{bmatrix} x+y+z & x \\ -y & -3 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} k & \operatorname{sgn}(x^2+1) \\ [\![\pi]\!] & \log_2 z \end{bmatrix}$

matrisleri için $A+B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ise, **k nın değeri kaçtır?**

A) –17 B) –16 C) –15 D) 10 E) 17

2. $A.\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 & 28 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$ ise, A^T **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

3. A ve B elemanları pozitif tamsayı olan birer matris olmak üzere,

$A=\begin{bmatrix} a & b \\ k & -n \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} a & k \\ -b & n \end{bmatrix}$ için

$A.B=\begin{bmatrix} 7 & t \\ t & 11 \end{bmatrix}$ ise, **t aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 33 B) 39 C) 41 D) 47 E) 55

4. $A=\begin{bmatrix} 2 & x \\ y & 4 \end{bmatrix}$ matrisin çarpma işlemine göre, ters matrisi A^{-1} olmak üzere, $x.y=7$ ise, **$A+A^{-1}$ aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ x & y \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

D) $6I_2$ E) $3I_2$

5. $2x^3-mx^2-8x+n=0$ denkleminin kökleri $x_1>x_2>x_3$ olmak üzere,

$\begin{bmatrix} x_1 & 2 & 2 \\ 0 & x_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}$ ise

m.n değeri kaçtır?

A) –24 B) –12 C) 4 D) 18 E) 36

6. Elemanları (Z/7, +, .) cisminden seçilen

$A=\begin{bmatrix} \overline{6} \\ \overline{4} \\ \overline{3} \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{1} & \overline{4} \end{bmatrix}$ matrisleri için,

A.B matrisinin elemanları toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\overline{0}$ B) $\overline{2}$ C) $\overline{3}$ D) $\overline{4}$ E) $\overline{5}$

7. $A=\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ olmak üzere, $\frac{1}{\det A}\cdot A^2$ **matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-24I_2$ B) $-2I_2$ C) $-I_2$

D) I_2 E) $2I_2$

8. $\begin{vmatrix} x & 2y & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ eşitliğine karşılık gelen doğrunun eksenleri kestiği noktalar A ve B olmak üzere, **A ile B arasında uzaklık kaç birimdir?**

A) 3 B) $\sqrt{15}$ C) 4

D) $\sqrt{17}$ E) $\sqrt{19}$

9. $A=\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ x & z & 0 \\ z & y & y \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} y & y & z \\ 0 & x & z \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ matrislerinde x,y,z pozitif gerçel sayılar olmak üzere, det(A).det(B) = 12 ise, **x.y.z aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) $2\sqrt{3}$ D) 4 E) $4\sqrt{3}$

10. $A=\begin{bmatrix} 3 & a+3 & 2 \\ a & 5 & 3a \\ 2 & a+1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinde a_{23} ve a_{21} elemanlarının kofaktörlerinin farkı –18 ise, **a aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) –18 B) –1 C) 1 D) 12 E) –31

11. $A=[a_{ij}]_{2x2}$, $B=[b_{ij}]_{2x2}$ ve

$a_{ij}=\begin{cases} 2i-j, & i\neq j \\ i^2+j, & i=j \end{cases}$, $b_{ij}=\begin{cases} 0, & i\neq j \\ i^2-j, & i=j \end{cases}$

olduğuna göre, **A – B matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

12. A n x n türünden bir matris ve $B = A-A^T$ ise **B^T matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) A B) B C) A^T D) $-A^T$ E) –B

13. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & x & x \\ -1 & x & 1 \end{vmatrix}=6$ **denkleminin kökleri çarpımı kaçtır?**

A) –3 B) 0 C) 3 D) 6 E) 8

14. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & a & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ matrisleri için A.B = B.A ise **a aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

15. $3A-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$ ise **A matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

16. $\left.\begin{aligned} 3x+4y&=6 \\ 2x-3y&=4 \end{aligned}\right\}$ denklem **sisteminin matris biçiminde yazılışı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 4 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 4 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ matrisinin **rankı kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

18. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$ determinantı **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) (y–x).(z–x).(z–y) B) (x+y).(z–x).(y+z)
C) (x–y).(y–x)z D) (y–x).(z–x).z
E) (z–x).(y–x).y

19. $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ matrisi ile **x reel sayısı için** $|A+xI_2|=0$ ise **x değeri aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?**

A) –2 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

20. $\left.\begin{aligned} x+(m^2-15)y&=m \\ x+y&=4 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin bir tek çözümünün olması için, **m ne olmalıdır?**

A) –4 B) 4 C) {–4,4}
D) R–{–4} E) R–{–4, 4}

LİNEER CEBİR

TEST 3

1. $\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 9 & -3 \end{vmatrix} = 0$ **denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) {4, 3} B) {4, 2} C) {–4, –2}
D) {–3, 2} E) {2, 3}

2. $\begin{vmatrix} x^2 & -2 & 0 \\ 4 & x & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ denkleminin **çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) {2, 3} B) {–2, 3} C) {3, 4}
D) {3} E) {–2}

3. $\begin{vmatrix} x-2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & x+2 \\ 2 & x+1 & -4 \end{vmatrix} = 0$ denkleminin **çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) {–3, –2, 4} B) {3, 4, 2} C) {–3, 4, 2}
D) {–3, –2, –4} E) {–4, –2, 3}

4. $\begin{vmatrix} k\cos x.\sin x & -1+k\cos^2 x \\ -1+k\sin^2 x & k\sin x\cdot\cos x \end{vmatrix} = 0$ ise **k nedir?**

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

5. $\begin{bmatrix} 2 & 3x \\ -x & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin çarpmaya göre tersi kendisine eşit ise **x aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

6. $\begin{vmatrix} \sin 25 & \sin 65 \\ -\cos 25 & \cos 65 \end{vmatrix} = 4x-19$ **denkleminin çözüm kümesi nedir?**

A) {3} B) {2} C) {–2} D) {1} E) {5}

7. Aşağıdaki matrislerden kaç tanesinin çarpmaya göre tersi yoktur?

I. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ II. $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ III. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

IV. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ V. $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8. Aşağıdaki matrislerden hangisi tekil (singüler) matristir?

A) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

9. $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ve $\left(\frac{1}{2}A^T\right)^{-1} = B$ ise **|A| nın değeri nedir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

10. A ve B matrisler $A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ olduğuna göre $\mathbf{B^T \cdot A^T + B^{-1} \cdot A^{-1}}$ **matrisinin ikinci satır elemanları toplamı nedir?**

A) 11 B) 13 C) 14 D) 15 E) 17

11. $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ ve $k.A^4$ matrisinin determinantı 8 ise **k reel sayısı aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 2 E) 4

12. $\begin{vmatrix} 3 & a & a^{-1} \\ a^{-1} & 3 & a \\ a & a^{-1} & 3 \end{vmatrix} = 26$ ise $\mathbf{a^3 + \frac{1}{a^3}}$ **aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 8 B) 9 C) 11 D) 12 E) 15

13. $\begin{vmatrix} 500 & 503 \\ 497 & 500 \end{vmatrix}$ **determinantın değeri nedir?**

A) 25.10^6 B) 3.10^3 C) 9
D) 7 E) 3

14. $A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ ve $A^{-1}CB^{-1} \cdot A^T = A^T$ olduğuna göre $\mathbf{C^T}$ **matrisinin determinantı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 5 B) 7 C) 10 D) 11 E) 13

15. $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ a & c & 0 \\ c & b & b \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} b & b & c \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ matrislerinde a, b, c pozitif reel sayılar olmak üzere det(A).det(B) = 18 ise **abc aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 2 B) $3\sqrt{3}$ C) 3
D) 4 E) $3\sqrt{2}$

16. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **matrisinin rankı kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ a & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ise A matrisinin rankının 3 olması için **a ne olmalıdır?**

A) 2 B) 3 C) R
D) R \ {2} E) R \ {3}

18. $\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 12 \\ 4x + 6ay &= 17 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin bir tek çözümünün olabilmesi için **a için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?**

A) $a \neq -2$ B) $a \neq 2$ C) $a \neq -1$
D) $a \neq 1$ E) $a \neq 3$

19. $\left.\begin{aligned} 5x - 7y + z &= 10 \\ 4x + 3y - 2z &= 5 \\ x - y + 3z &= -4 \end{aligned}\right\}$ **denklemin sisteminin çözüm kümesini bulunuz.**

A) {1, –1, –2} B) {1, 2, 3} C) {4, 3, 2}
D) {1, –2, 4} E) {0, 1, 2}

20. $\left.\begin{aligned} ax + 3y &= a \\ 3x + ay &= a \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin sonsuz çözümü olması için **a ne olmalıdır?**

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) –1

LİNEER CEBİR

TEST 4

1. $A = \begin{bmatrix} \log_a x & a \\ a & x \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} \log_a y & y \\ x & y \end{bmatrix}$ matrisleri için, **$A + B = \begin{bmatrix} k & 12 \\ 24 & 20 \end{bmatrix}$** ise, **k neye eşittir?**

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

2. $\begin{bmatrix} a & 5 \\ y+b & x+y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & b \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = 2.I$ ise,

ax – by nin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) –19 B) –13 C) 11 D) 15 E) 39

3. $x > y$ ve $\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & x \\ -y & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 29 \\ 0 & -20 \end{bmatrix}$ ise, **(x – y) aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

4. $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -20 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ olmak üzere, kökleri x_1 ile x_2 olan **ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x^2 - 7x + 10 = 0$ B) $x^2 - 3x + 20 = 0$

B) $x^2 + 5x - 10 = 0$ D) $x^2 - 3x - 10 = 0$

E) $x^2 + 7x + 20 = 0$

5. $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ -3 & b \end{bmatrix}$ ve $A^2 - A^T = \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix}$ dır.

a > b olduğuna göre, **x + y nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) –6 B) –4 C) –2 D) 0 E) 3

6. Elemanları (Z/5, +, .) cisimden seçilen $A = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{3} & \overline{4} \end{bmatrix}$ matrisinin çarpmaya göre, **tersi olan A^{-1} matrisinin elemanları toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\overline{0}$ B) $\overline{1}$ C) $\overline{2}$ D) $\overline{3}$ E) $\overline{4}$

7. $A = \begin{bmatrix} x & x \\ 3 & x \end{bmatrix}$ matrisi için $|A| = \det A$ olmak üzere **$|A|^2 - 2|A| - 8 = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?**

A) {–1, 1, 2, 3} B) {–1, 1, 3, 4}

C) {–1, 1, 2, 4} D) {–2, –1, 1, 4}

E) {–2, –1, 1, 2}

8. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & [\![|x|]\!] \end{vmatrix} = 4$ denkleminin **çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) [4, 5) B) [5, 6) C) [6, 7)

D) [7, 8) E) [8, 9)

9. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & k & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin **k nın hangi değeri için çarpmaya göre tersi yoktur?**

A) 9 B) 8 C) 6 D) 5 E) 4

10. $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi için $\mathbf{5.A^{-1} + A^T}$ **matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) I B) 5 . I C) 6 . I

D) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 1 \\ 1 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 7 & 4a & a^2 \\ 9 & 10 & a^3 \\ 3 & 5 & a^2 \end{vmatrix}$ determinantında a_{12} ve a_{21} elemanlarının kofaktörleri birbirlerine eşit ise **$a \in R^+$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

12. $0<\alpha+\theta<\frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$A=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\cos\theta \\ \sin\alpha & \sin\theta \end{bmatrix}$

matrisleri için $(\det A).(\det B)=\frac{1}{4}$ ve

$\alpha-\theta=\frac{\pi}{18}$ ise, **α neye eşittir?**

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{9}$ D) $\frac{\pi}{18}$ E) $\frac{\pi}{36}$

13. $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ olmak üzere,

$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & \cos 2\theta \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & \cos\theta \end{bmatrix}$

det(A) = det(B) ise, θ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{3}$

14. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 9 \\ 10 \end{bmatrix}$ ve

A.B = C ise **x.y kaçtır?**

A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

15. $\begin{vmatrix} 2 & x+3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & x \end{vmatrix} \geq 0$ eşitsizliğini gerçekleyen **kaç tane x tamsayısı vardır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

16. $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $f(x)=x^2-x-2$ ise $|f(A)|$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 2 B) 0 C) –3 D) –8 E) –9

17. $A=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisleri için

$\det(A^{-1}\cdot B\cdot A)$ değeri kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

18. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 3 & k & 15 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ matrisinin **rankı aşağıdaki k değerlerinden hangisi için 3 <u>olamaz?</u>**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

19. $ax+y=2$

$8y-z=1$

$x+a^2z=3$

denklem sisteminin bir tek çözümü varsa **a aşağıdakilerden hangisi <u>olamaz?</u>**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{3}{2}$ E) 2

20. $\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=3 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminde katsayılar matrisinin ters matrisi,

$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *ise* **(x + y + z) aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 11 B) 13 C) 16 D) 18 E) 21

LİNEER CEBİR

TEST 5

1. $\begin{bmatrix} 2^x & 0 \\ 1 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^y & 1 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 0 \end{bmatrix}$ **ise a neye eşittir?**

A) $-\frac{1}{2}$ B) -1 C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

2. $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & a \\ -b & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 17 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$ ise

$a^2 - 2ab + b^2$ ifadesinin eşiti nedir?

A) 9 B) 17 C) 25 D) 33 E) 41

3. $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & -x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ ise **kökleri x_1, x_2 olan ikinci derece denklem aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x^2 - 3x - 4 = 0$ B) $x^2 + 3x - 4 = 0$
C) $x^2 - 3x + 4 = 0$ D) $x^2 + 3x + 4 = 0$
E) $x^2 - 5x - 4 = 0$

4. $\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x+y & -5 \\ 3 & x-y \end{bmatrix} = 3 \cdot I$ ise **$x^2 + y^2$ ifadesinin eşiti nedir?**

A) 9 B) 15 C) 17 D) 20 E) 23

5. $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^T - A^2 = \begin{bmatrix} -12 & x \\ y & 0 \end{bmatrix}$ ve $a < 0$ olmak üzere **$x + y$ ifadesinin eşiti nedir?**

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

6. $A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 1 & x \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

$|A|^2 - 3|A| - 4 = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

A) $\{-\sqrt{6}, -1, 1, \sqrt{6}\}$ B) $\{-4, -1, 1, 4\}$
C) $\{-4, -\sqrt{6}, \sqrt{6}, 4\}$ D) $\{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$
E) $\{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\}$

7. $\begin{vmatrix} [\![2x-1]\!] & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4$ **denkleminin çözüm kümesi nedir?**

A) $[2,3)$ B) $(2,3)$ C) $\left(\frac{3}{2},3\right)$
D) $\left[\frac{2}{3},3\right]$ E) $\left[\frac{3}{2},2\right)$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ a & 4 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin **a nın hangi değeri için tersi yoktur?**

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi için **$A^{-1} + A^T$ matrisinin eşiti nedir?**

A) 2I B) 3I C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 2x & x+1 \\ 3 & 6 & x+2 \\ 2 & 10 & x+3 \end{bmatrix}$ determinantının a_{22} ve a_{32} elemanlarının kofaktörü eşit ise **x nedir?**

A) -3 B) -2 C) 0 D) 1 E) 2

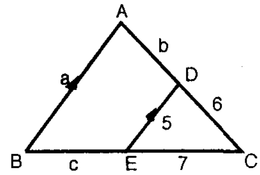
11. $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ olmak üzere;

$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cot\alpha & \tan\alpha \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$(-1)^{2n+1} \cdot \det A \cdot \det B = \frac{1}{2}$ ise **α eşiti nedir?**

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) 0

12. Yandaki şekilde $[DE]//[AB]$ dir.



Buna göre

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \\ a & 6+b & 7+c \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

A) $a+b+c+13$ B) $a+b+c$

C) abc D) 13

E) 0

13. $F(x)=\begin{vmatrix} e^{3x-2} & -e^{x+1} \\ e^{2x-1} & e^{2x+2} \end{vmatrix}$ determinantı veriliyor.

$F'(\ln 3)$ ifadesinin sonucu T ise $\sqrt{T}$ **sonucu nedir?**

A) 16 B) 25 C) 36 D) 45 E) 49

14. $\left.\begin{aligned} ax+by&=1 \\ ax-2bz&=3 \\ y-z&=4 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin bir tek çözümü varsa **a ile b arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisi <u>olamaz?</u>**

A) $a+b=0$, $a\neq 0,\ b\neq 0$

B) $a-b=0$, $a\neq 0,\ b\neq 0$

C) $\frac{a}{b}=2$, $a\neq 0,\ b\neq 0$

D) $a.b=0$

E) $a.b=\frac{1}{3}$

15. $\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=1 \\ a_2x+b_2y+c_2z&=-1 \\ a_3x+b_3y+c_3z&=4 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminde

katsayılar matrisinin ters matrisi $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

ise **(x + y + z) aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 19 B) 21 C) 23 D) 27 E) 29

16. $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. **A^{-17} matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $2^{17}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ B) $2^{-17}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

C) $2^{17}I_2$ D) $2^{-27}I_2$

E) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

17. $A=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ matrisinde her satırın terimleri toplamı 5 olduğuna göre **A^2 matrisinin birinci satırındaki terimlerinin toplamı nedir?**

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

18. $\begin{vmatrix} \cos 42 & \sin 42 \\ \sin 18 & \cos 18 \end{vmatrix}=4x+3$ denkleminin **çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\left\{-\frac{5}{8}\right\}$ B) $\left\{-\frac{3}{8}\right\}$ C) $\left\{-\frac{1}{8}\right\}$

D) $\left\{\frac{3}{8}\right\}$ E) $\left\{\frac{5}{8}\right\}$

19. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ k & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin rankı **k nın hangi değeri için 3 <u>olamaz?</u>**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

20. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ için $A^M=\begin{bmatrix} 1 & 28 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre **M neye eşittir?**

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

LİNEER CEBİR

TEST 6

1. R^3 vektör uzayında $\vec{\vartheta}_1 = (1, -1, k)$, $\vec{\vartheta}_2 = (2, 1, 0)$ $\vec{\vartheta}_3 = (m, 0, 1)$ **vektörleri lineer (doğrusal) bağımlı iseler k.m kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. $\vec{A} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektörü R^2 de $(-2, 4)$ vektörünün gerdiği alt uzayın bir elemanı olduğuna göre **x ile y arasındaki bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $y = -2x$ B) $y = -\frac{x}{2}$ C) $y = \frac{x}{2}$
D) $y = x$ E) $2y = 3x$

3. $\vec{A} = (x, -1, 0)$, $\vec{B} = (3, 3, 4)$, $\vec{C} = (1, -2, 0)$ vektörlerinin oluşturduğu küme M olsun. **x'in hangi değeri için M kümesi R^3 ün bir tabanı <u>olamaz</u>?**

A) –2 B) $-\frac{3}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

4. R^3 te,

$\vec{A} = (k, 0, 1)$, $\vec{B} = (2, -1, 3)$, $\vec{C} = (-1, -1, 2)$

vektörleri veriliyor. **k nın hangi değeri için $\vec{A}$, $\vec{B}$ ile $\vec{C}$ nin bir doğrusal birleşimidir?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5. **Aşağıdaki kümelerden hangisi R^3 ün bir tabanıdır?**

A) $F = \{(1,2,1),(2,1,1)\}$

B) $G = \{(1,2,3),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,1)\}$

C) $H = \{(2,1,1),(4,5,0),(4,2,2)\}$

D) $K = \{(1,-1,1),(1,1,1),(0,2,0)\}$

E) $L = \{(2,1,0),(1,1,0),(-1,0,2)\}$

6. $f: R^3 \to R^2$ $f(x, y, z) = (2x - y + z, x - 4z)$ **doğrusal dönüşümünün çekirdeği aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\{(4k, 5k, k)\}$ B) $\{(3k, 4k, k)\}$
C) $\{(4k, 9k, k)\}$ D) $\{(2k, 9k)\}$
E) $\{(4k, 9k)\}$

7. **Aşağıdakilerden hangisi bir doğrusal dönüşüm <u>değildir?</u>**

A) $f: R^2 \to R^3$, $f(x, y) = (2x, y, -3y)$
B) $f: R^3 \to R^3$, $f(x, y, z) = (x, x, y)$
C) $f: R \to R$, $f(x) = \sqrt{2}\,x$
D) $f: R^2 \to R^2$, $f(x, y) = (2x, 3x-y)$
E) $f: R^3 \to R^2$ $f(x,y, z) = (2x + 1, 3x + y, 2x + z)$

8. f bir doğrusal dönüşüm olsun.
f, (–2, 5) noktasını (2, –1) noktasına dönüştürüyorsa **(–6, 15) noktasını hangi noktaya dönüştürür?**

A) (–2, 1) B) (–6, 3) C) (6, –3)
D) (2, –1) E) (–8,–1)

9. f, bir doğrusal dönüşüm olsun
f(1, 0) = (–2, 1) ve f(0, 1) = (1,–1) olduğuna göre **f, $\vec{A} = (3,1)$ vektörünü hangi vektöre dönüştürür?**

A) (–3, 2) B) (–4,2) C) (–5,2)
D) (–5,1) E) (5,1)

10. $f: R^3 \to R^2$ doğrusal dönüşümünün matrisi $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ olduğuna göre **f dönüşümü hangisidir?**

A) $f: R^3 \to R^2$, $f(x, y, z) = (x, 2x + 3z)$
B) $f: R^3 \to R^2$, $f(x, y, z) = (x + z, 2x - y + 3z)$
C) $f: R^3 \to R^2$, $f(x, y, z) = (2x + y, z, 3z)$
D) $f: R^3 \to R^2$, $f(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$
E) $f: R^3 \to R^2$, $f(x, y, z) = (x, 0, y)$

11. f: $R^2 \rightarrow R^2$ doğrusal dönüşümünün matrisi

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre **f(2, 4) aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) (3, 1) B) (2, 6) C) (4, 4)
D) (4, 6) E) (4, 8)

12. f: $R^3 \rightarrow R^2$ doğrusal dönüşümünün matrisi

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ve f(a, b, 1) = (9, 10) ise **a.b kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

13. f: $R^2 \rightarrow R^2$, f(x, y) = (2x + y, x − y) doğrusal dönüşümü veriliyor. **(fof) (x, y) doğrusal dönüşümünün matrisi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

14. f: $R^2 \rightarrow R^3$ ve g: $R^3 \rightarrow R^2$ doğrusal dönüşümlerinin matrisleri sırası ile

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre

(fog) (3,4,1) aşağıdakilerden hangisidir?

A) (21, 5, 4) B) (1, 19, 3)
C) (5, 4, 1) D) (2, 10, 2)
E) (4, 5, 2)

15. f: $R^2 \rightarrow R^2$ doğrusal dönüşümü

f(x, y) = (−2y, x + 3y) şeklinde tanımlıdır.

A = (0, 2) olduğuna göre

(fof) (A) aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) (−4, 6) B) (−4, 4) C) (−12, 14)
D) (−4, 14) E) (6, 4)

16. f: $R^2 \rightarrow R^2$ doğrusal dönüşümünün matrisi

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ve f, P(x, y) noktasını K(6, 8) noktasına dönüştürüyorsa **x.y kaçtır?**

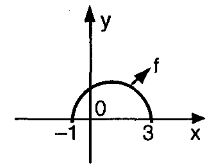
A) −10 B) 10 C) 20 D) 40 E) 80

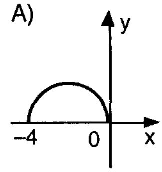
17. f bir öteleme dönüşümüdür.

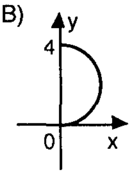
f in öteleme vektörü $\vec{\vartheta_1} = (-4, 3)$ ve $\vec{\vartheta_2} = (6,-1)$ olduğuna göre $f(\vec{\vartheta_2})$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

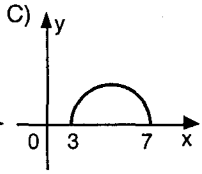
A) (2,1) B) (2,2) C) (2,3)
D) (2,4) E) (2,5)

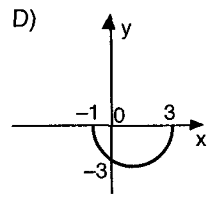
18. y = f(x) ile tanımlı f fonksiyonunun grafiği yandaki gibidir.
Buna göre f(x + 3) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

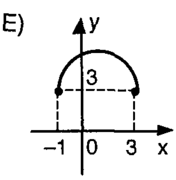


A)


B)


C)


D)


E)


19. f: $R^2 \rightarrow R^2$, f(x,y) = (2x + 3, $\frac{y-1}{2}$) biçiminde **tanımlanan f fonksiyonunun (ötelemesinin) tersi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $f^{-1}(x, y) = (2x - 3, 2y + 1)$
B) $f^{-1}(x, y) = (\frac{x-3}{2}, 2y + 1)$
C) $f^{-1}(x,y) = (\frac{2y+3}{2}, \frac{x-1}{3})$
D) $f^{-1}(x,y) = (\frac{x+1}{3}, 2y+3)$
E) $f^{-1}(x,y) = (2x+3, 2y-1)$

20. R^2 de $\theta = \frac{\pi}{6}$ radyanlık pozitif yöndeki dönme f olduğuna göre f(2,−2) **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(-\sqrt{3} - 1; -1+\sqrt{3})$
B) $(-\sqrt{3} + 1, 1 + \sqrt{3})$
C) $(\sqrt{3} + 1, 1-\sqrt{3})$
D) $(-\sqrt{3} - 1, \sqrt{3})$
E) $(-2\sqrt{3}, 0)$

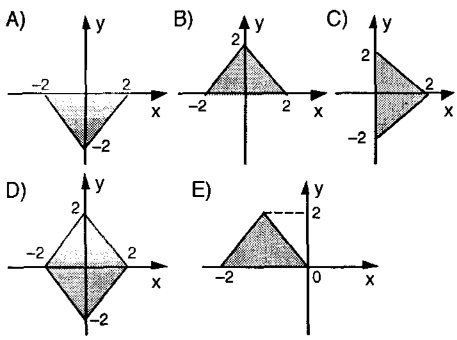
21. 2x − 5y + 11 = 0 doğrusunun π radyanlık dönme dönüşümü **altındaki görüntüsünün denklemi aşağıdaki doğrulardan hangisidir?**

A) 2x + 5y − 11 = 0 B) −2x + 5y + 11 = 0
C) 5x − 2y + 11 = 0 D) −5x + 2y + 11 = 0
E) $-\frac{x}{2} + \frac{y}{5} + 11 = 0$

22. $x + 2y - 4 = 0$ doğrusunun A(1, 1) noktasına göre **simetriği aşağıdaki noktalardan hangisinden geçer?**

A) (–4, 2) B) (0, 1) C) (4, 2)
D) (8, 2) E) (4, 4)

23. A(1, 0), B(–1, 0), C(0, 1) noktaları veriliyor. Köşeleri A, B, C olan üçgenin $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ dönüşüm matrisine göre **görüntüsünün grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



24. Aşağıdakilerden hangisi negatif yönde $\frac{\pi}{2}$ radyanlık dönmenin matrisidir?

A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

25. $f: R^2 \to R^2$, $f(x,y) = (2x + y,\ 3x - 6y)$ lineer dönüşümünün çekirdeği **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\{(0,0)\}$ B) $\{t(1,2),\ t \in R\}$
C) $\{t(2,3),\ t \in R\}$ D) $\{t(3,2),\ t \in R\}$
E) $\{t(3,1), t \in R\}$

26. Aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır?</u>

A) Dönme dönüşümü alanı değiştirmez.
B) Dönme dönüşümü açıyı değiştirmez.
C) Öteleme dönüşümü alanı değiştirmez.
D) Öteleme dönüşümü açıyı değiştirmez.
E) Benzerlik dönüşümü alanı değiştirmez.

27. Pozitif yönde $\frac{2\pi}{3}$ radyanlık dönme altında **$2x + 2y + 1 = 0$ doğrusunun görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(\sqrt{3} - 1)x + (\sqrt{3} + 1)y + 1 = 0$
B) $(\sqrt{3} + 1)x - (\sqrt{3} - 1)y - 1 = 0$
C) $(\sqrt{3} - 1)x - (-\sqrt{3} + 1)y + 1 = 0$
D) $\sqrt{3}x + \sqrt{3}y + 1 = 0$
E) $(\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3}y + 1 = 0$

28. f bir öteleme dönüşümü ve öteleme vektörü $\vartheta = (a,b)$ dir. ϑ vektörü (6, –1) vektörünü (2, 2) vektörüne dönüştürüyor ise **(a,b) aşağıdakilerden hangisidir?**

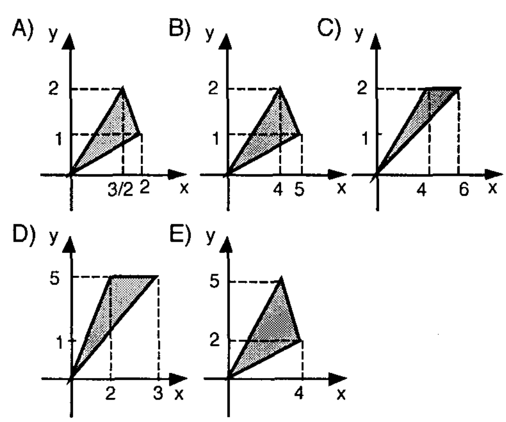
A) (–3, 4) B) (–4, –3) C) (–4, 3)
D) (3, 4) E) (4, 3)

29. A matrisi pozitif yönde $\frac{\pi}{2}$ radyanlık dönmenin matrisi ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ **A·B nedir?**

A) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

30. A(0, 0) , B(1, 2) , C(1, 1) noktaları ile sınırlanan üçgensel bölge ve $K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dönüşüm matrisleri veriliyor. Buna göre **ABC üçgensel bölgesi KL dönüşümü ile aşağıdaki bölgelerden hangisine dönüşür?**



YANIT ANAHTARLARI

BÖLÜM–1 (ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR)

TEST–1		TEST–2		TEST–3		TEST–4		TEST–5	
1. A	17. A	1. E	17. D	1. D	17. A	1. C	17. C	1. C	17. D
2. B	18. A	2. D	18. C	2. C	18. D	2. D	18. E	2. B	18. A
3. B	19. C	3. E	19. A	3. D	19. C	3. B	19. A	3. E	19. C
4. E	20. E	4. D	20. E	4. E	20. D	4. D	20. A	4. C	20. B
5. A	21. C	5. C	21. B	5. A	21. C	5. A	21. C	5. A	21. E
6. E	22. D	6. E	22. D	6. B	22. C	6. D	22. B	6. E	22. A
7. E	23. B	7. D	23. E	7. A	23. B	7. E	23. B	7. D	23. D
8. D	24. B	8. D	24. B	8. B	24. D	8. B	24. C	8. B	24. E
9. C	25. E	9. C	25. E	9. E	25. C	9. D	25. D	9. A	25. B
10. E	26. D	10. C	26. B	10. A	26. A	10. A	26. E	10. B	26. B
11. D	27. A	11. B	27. B	11. C	27. B	11. C	27. A	11. B	27. A
12. C	28. E	12. E	28. B	12. B	28. E	12. B	28. E	12. A	28. E
13. A	29. E	13. A	29. B	13. E	29. C	13. E	29. C	13. B	29. E
14. C	30. C	14. D	30. B	14. E		14. A	30. D	14. D	30. C
15. E		15. B		15. D		15. C		15. A	31. B
16. D		16. B		16. B		16. D		16. E	32. D

TEST–6		TEST–7		TEST–8		TEST–9		TEST–10	
1. C	16. E	1. E	16. C	1. C	16. B	1. B	16. E	1. B	16. B
2. A	17. C	2. A	17. D	2. C	17. C	2. C	17. A	2. E	17. E
3. D	18. A	3. A	18. A	3. B	18. C	3. E	18. A	3. A	18. A
4. E	19. B	4. C	19. E	4. D	19. E	4. A	19. C	4. B	19. B
5. E	20. D	5. D	20. D	5. E	20. D	5. C	20. D	5. E	20. E
6. D	21. C	6. E	21. D	6. C	21. A	6. C	21. E	6. B	21. C
7. C	22. A	7. D	22. D	7. E	22. D	7. E	22. B	7. A	22. E
8. C	23. E	8. C	23. E	8. D	23. E	8. B	23. A	8. C	23. D
9. E	24. C	9. A	24. B	9. C	24. E	9. A	24. B	9. D	
10. E	25. D	10. D	25. B	10. C	25. C	10. B	25. B	10. B	
11. C	26. E	11. E	26. A	11. A	26. C	11. A		11. E	
12. C	27. B	12. D	27. C	12. D	27. B	12. B		12. D	
13. D	28. D	13. A		13. D		13. E		13. E	
14. B		14. D		14. C		14. D		14. B	
15. C		15. A		15. A		15. A		15. C	

BÖLÜM–2 (LİMİT VE SÜREKLİLİK)

TEST–1		TEST–2		TEST–3		TEST–4		TEST–5		TEST–6	
1. A	14. A	1. E	13. D	1. D	14. C	1. E	14. E	1. B	14. B	1. A	14. B
2. D	15. E	2. A	14. E	2. C	15. D	2. D	15. B	2. D	15. B	2. B	15. B
3. C	16. E	3. D	15. A	3. B	16. D	3. D	16. D	3. C	16. C	3. D	16. C
4. D	17. E	4. D	16. B	4. A	17. D	4. A	17. E	4. B	17. E	4. D	17. D
5. B	18. B	5. C	17. B	5. A	18. A	5. B	18. B	5. D	18. E	5. E	18. E
6. D	19. D	6. A	18. D	6. B	19. C	6. C	19. C	6. E	19. E	6. C	19. A
7. D	20. A	7. A	19. A	7. C	20. E	7. E	20. E	7. A	20. B	7. E	20. A
8. B	21. C	8. C	20. B	8. A	21. C	8. D	21. B	8. C	21. E	8. D	21. C
9. D	22. D	9. E	21. C	9. A	22. B	9. A	22. C	9. C	22. C	9. B	22. A
10. E	23. A	10. C	22. A	10. C	23. D	10. E	23. A	10. D	23. E	10. A	23. A
11. D	24. E	11. D	23. A	11. B	24. D	11. E	24. C	11. C	24. C	11. D	24. C
12. C	25. C	12. A	24. A	12. D	25. C	12. E	25. C	12. A	25. D	12. D	25. E
13 B			25. D	13. D		13. B		13. E		13. D	26. B
											27. D

BÖLÜM-3 (TÜREV)

TEST-1		TEST-2		TEST-3		TEST-4	
1. C	17. E	1. B	17. B	1. D	17. C	1. D	17. C
2. E	18. C	2. B	18. C	2. C	18. A	2. C	18. E
3. D	19. C	3. D	19. A	3. D	19. E	3. E	19. B
4. B	20. C	4. A	20. C	4. B	20. A	4. B	20. E
5. B	21. A	5. C	21. E	5. E	21. D	5. A	21. A
6. C	22. E	6. D	22. A	6. A	22. B	6. C	22. A
7. A		7. B	23. B	7. E	23. C	7. B	
8. D		8. E	24. B	8. D	24. A	8. D	
9. D		9. A	25. D	9. C	25. D	9. B	
10. B		10. C	26. C	10. A	26. E	10. D	
11. D		11. B	27. E	11. B	27. C	11. E	
12. A		12. D	28. E	12. A	28. B	12. B	
13. C		13. A	29. B	13. C	29. C	13. B	
14. A		14. A	30. A	14. B		14. A	
15. C		15. E	31. C	15. D		15. A	
16. D		16. D		16. E		16. C	

TEST-5		TEST-6		TEST-7		TEST-8	
1. C	16. B	1. B	16. B	1. D	16. C	1. C	16. E
2. C	17. D	2. B	17. C	2. A	17. D	2. B	17. B
3. C	18. A	3. C	18. B	3. E	18. E	3. E	18. C
4. E	19. C	4. C	19. C	4. B	19. E	4. D	19. D
5. D	20. D	5. C	20. B	5. E	20. D	5. B	20. B
6. C		6. C	21. A	6. A	21. A	6. A	21. E
7. C		7. D	22. E	7. D	22. D	7. C	
8. C		8. C	23. A	8. B	23. D	8. E	
9. D		9. B	24. D	9. A	24. B	9. D	
10. D		10. C	25. D	10 E	25. A	10. C	
11. A		11. B	26. E	11. B		11. A	
12. D		12. C	27. B	12. B		12. E	
13. D		13. A	28. A	13. D		13. A	
14. B		14. B	29. D	14. D		14. E	
15. C		15. E	30. C	15. B		15. C	

TEST-9		TEST-10		TEST-11		TEST-12	
1. C	13. A	1. B	13. B	1. D	13. A	1. C	13. E
2. D	14. A	2. C	14. C	2. B	14. D	2. D	14. C
3. A	15. C	3. A	15. A	3. A	15. C	3. C	15. C
4. D	16. E	4. C	16. C	4. E	16. B	4. E	16. B
5. C	17. C	5. D	17. D	5. C	17. B	5. A	17. E
6. B	18. B	6. D		6. C	18. C	6. C	18. C
7. B		7. C		7. D	19. C	7. E	19. A
8. C		8. C		8. B	20. A	8. E	20. B
9. A		9. C		9. E	21. A	9. E	21. C
10. B		10. A		10. B	22. E	10. B	22. A
11. A		11. B		11. A	23. A	11. B	23. A
12. B		12. C		12. E	24. B	12. A	24. C

TEST-13		TEST-14		TEST-15		TEST-16		TEST-17	
1. A	16. B	1. B	16. C	1. B	16. C	1. C	16. A	1. D	
2. C	17. C	2. D	17. D	2. A	17. B	2. C	17. B	2. C	
3. C	18. A	3. A	18. C	3. D	18. E	3. C	18. D	3. B	
4. A	19. E	4. D	19. A	4. A	19. B	4. B	19. D	4. D	
5. D	20. B	5. E	20. C	5. C	20. D	5. B	20. B	5. D	
6. E	21. B	6. D	21. D	6. C	21. C	6. E	21. A	6. E	
7. B	22. E	7. B	22. D	7. E	22. D	7. A	22. E	7. E	
8. E	23. E	8. A	23. B	8. A	23. A	8. D	23. D	8. C	
9. C	24. C	9. B	24. A	9. D	24. E	9. C	24. C	9. B	
10. B		10. A	25. B	10. B	25. D	10. D	25. B	10. D	
11. B		11. E	26. E	11. A		11. D		11. A	
12. C		12. B	27. C	12. C		12. C		12. B	
13. A		13. B	28. A	13. E		13. B		13. B	
14. B		14. B	29. A	14. B		14. C		14. E	
15. C		15. E	30. A	15. D		15. B		15. B	

BÖLÜM-4 (İNTEGRAL)

TEST-1		TEST-2		TEST-3		TEST-4	
1. D	14. A	1. D	14. E	1. B	14. A	1. C	14. A
2. A	15. C	2. B	15. A	2. C	15. D	2. A	15. E
3. D	16. E	3. B	16. E	3. C	16. C	3. D	16. D
4. B	17. B	4. A	17. E	4. E	17. B	4. B	17. D
5. D	18. B	5. E	18. A	5. E	18. C	5. C	18. B
6. D	19. C	6. C	19. C	6. A	19. D	6. B	19. E
7. C	20. E	7. D	20. B	7. C	20. B	7. C	20. C
8. A	21. B	8. C	21. D	8. E	21. C	8. D	21. E
9. C	22. B	9. A	22. B	9. D	22. A	9. E	22. B
10. E	23. B	10. E	23. E	10. C	23. E	10. A	23. A
11. D	24. A	11. D	24. D	11. A	24. B	11. C	24. D
12. A	25. A	12. B	25. D	12. E	25. A	12. E	25. B
13. C	26. A	13. B	26. C	13. E		13. D	26. D

TEST-5		TEST-6		TEST-7		TEST-8	
1. A	17. B	1. B	17. E	1. E	17. C	1. C	17. E
2. C	18. B	2. E	18. D	2. D	18. D	2. B	18. D
3. B	19. A	3. B	19. D	3. B	19. A	3. E	19. E
4. D	20. A	4. B	20. A	4. B	20. C	4. D	20. B
5. A		5. D	21. C	5. C	21. E	5. A	21. C
6. E		6. D	22. A	6. A	22. C	6. C	22. A
7. A		7. D	23. C	7. E	23. A	7. B	23. E
8. C		8. A	24. D	8. B	24. E	8. A	24. B
9. B		9. B	25. A	9. A	25. B	9. C	25. A
10. D		10. A		10. A		10. A	
11. B		11. B		11. D		11. A	
12. A		12. C		12. C		12. E	
13. E		13. A		13. D		13. E	
14. B		14. D		14. A		14. B	
15. C		15. C		15. C		15. B	
16. B		16. A		16. A		16. A	

TEST-9		TEST-10		TEST-11	
1. A	17. D	1. E	17. A	1. E	17. C
2. B	18. C	2. B	18. A	2. B	18. E
3. E	19. E	3. E	19. D	3. C	19. E
4. E	20. A	4. C	20. B	4. A	20. B
5. B	21. D	5. A	21. E	5. B	21. C
6. B	22. B	6. B	22. B	6. C	22. D
7. C	23. D	7. D	23. C	7. B	
8. C	24. A	8. D		8. A	
9. A	25. C	9. C		9. E	
10. D	26. D	10. C		10. C	
11. B	27. E	11. E		11. C	
12. E		12. C		12. E	
13. C		13. B		13. D	
14. C		14. A		14. D	
15. E		15. C		15. C	
16. B		16. C		16. E	

BÖLÜM-5 (LİNEER CEBİR)

TEST-1		TEST-2		TEST-3	
1. D	13. B	1. A	13. C	1. D	13. C
2. A	14. C	2. C	14. B	2. E	14. C
3. C	15. D	3. B	15. A	3. A	15. E
4. D	16. E	4. D	16. C	4. C	16. C
5. D	17. D	5. E	17. C	5. E	17. E
6. E	18. D	6. A	18. A	6. E	18. D
7. B	19. D	7. C	19. B	7. B	19. A
8. E	20. E	8. D	20. E	8. D	20. B
9. D	21. C	9. C		9. B	
10. B	22. A	10. E		10. B	
11. D	23. D	11. C		11. C	
12. A	24. B	12. E		12. A	

TEST-4		TEST-5		TEST-6	
1. B	13. E	1. D	13. C	1. C	17. B
2. E	14. D	2. C	14. D	2. A	18. A
3. E	15. E	3. A	15. C	3 D	19. B
4. D	16. B	4. A	16. E	4. D	20. C
5. D	17. A	5. C	17. D	5. E	21. B
6. A	18. E	6. A	18. A	6 C	22. B
7. C	19. B	7. E	19. C	7. E	23. A
8. E	20. E	8. E	20. C	8. C	24. D
9. A		9. C		9. C	25. A
10. C		10. C		10 B	26. E
11. B		11. A		11 D	27. B
12. C		12. E		12. E	28. C
				13. B	29. A
				14. A	30. C
				15 C	
				16. D	