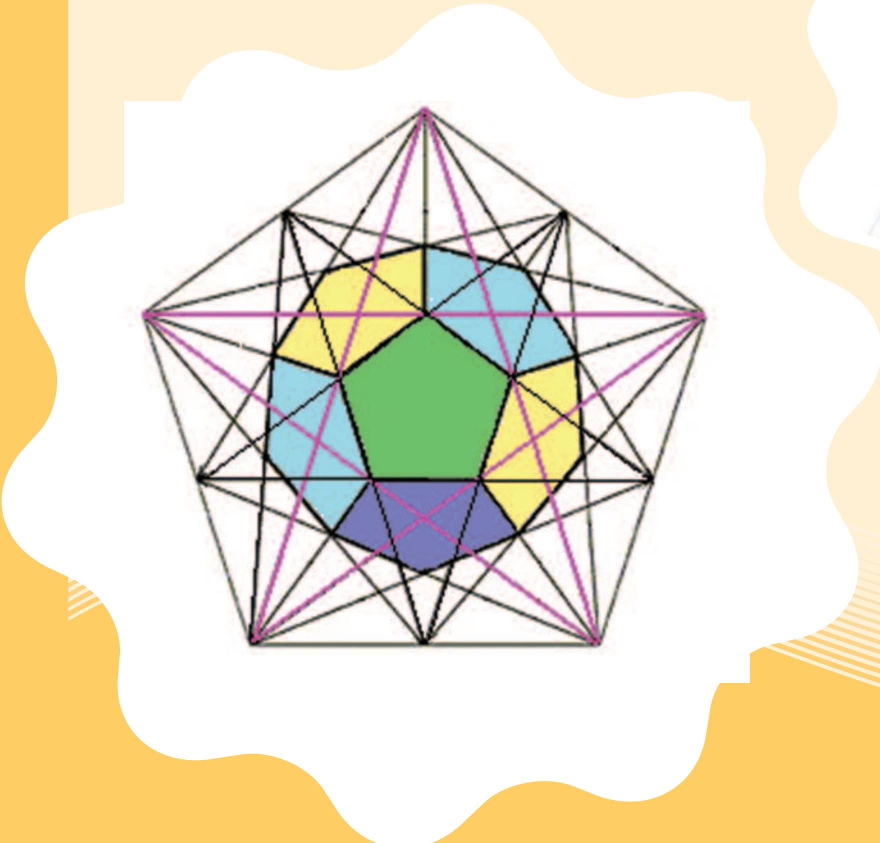
ÜNİTE 2

UZAYDA DOĞRU VE DÜZLEM

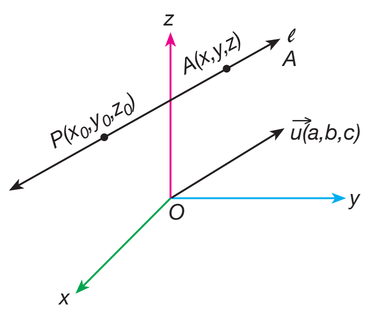
Sayfa No



BÖLÜM 1

UZAYDA BİR DOĞRUNUN VEKTÖREL VE PARAMETRİK DENKLEMLERİ

UZAYDA BİR NOKTADAN GEÇEN VE BİR VEKTÖRE PARALEL OLAN DOĞRUNUN DENKLEMİ



Uzayda bir $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve $\vec{u} = (a, b, c)$ vektörüne paralel olan ℓ doğrusunun denklemini bulalım.

$\ell \,//\, \vec{u}$ ise ℓ doğrusunun üzerinden değişken bir A(x, y, z) noktası için $\overrightarrow{PA} \,//\, \vec{u}$ dur.

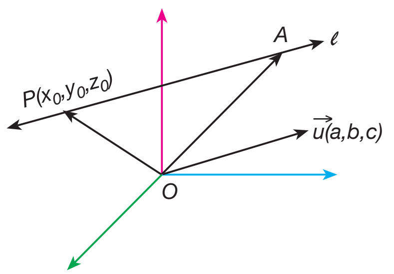
$\overrightarrow{PA} \,//\, \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{PA} = k.\vec{u} \quad (k \in R)$

$\Rightarrow \vec{A} - \vec{P} = k.\vec{u} \Rightarrow \vec{A} = \vec{P} + k.\vec{u}$ elde edilir.

$\vec{A} = \vec{P} + k.\vec{u}$ denklemine ℓ doğrusunun vektörel denklemi denir.

$\vec{A} = \vec{P} + k.\vec{u}$ vektörel denklemi

$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + k.(a, b, c)$ şeklinde yazılabilir.



$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (k.a + k.b + k.c)$

$(x, y, z) = (x_0 + k.a,\ y_0 + k.b,\ z_0 + k.c)$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + k.a \\ y &= y_0 + k.b \\ z &= z_0 + k.c \end{aligned}\right\}$$ denklem sistemi elde edilir.

Bu denklem sistemine ℓ doğrusunun parametrik denklemi denir.

$$\overrightarrow{PA} = \vec{A} - \vec{P} = (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)$$
$$= (x - x_0,\ y - y_0, z - z_0)$$
$$\vec{u} = (a, b, c)$$

$\overrightarrow{PA} \,//\, \vec{u} \Rightarrow \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ elde edilir.

Bu bağıntıya doğrunun kartezyen denklemi denir.

$\vec{u} = (a, b, c)$ vektörüne doğrunun doğrultman vektörü denir.

Doğrultman parametrelerinden biri sıfır olması durumunda örneğin $\vec{u} = (a, b, 0)$ şeklinde ise doğru z eksenine diktir.

Parametrik denklemi $\quad x = x_0 + k.a$

$y = y_0 + k.b$

$z = z_0$

şeklindedir. Bu durumda kartezyen denklemi

$\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b},\ z = z_0$ dır.

Doğrultman vektörü $\vec{u} = (a, 0, c)$ şeklinde ise;

Parametrik denklemi $\quad x = x_0 + k.a$

$y = y_0$

$z = z_0 + k.c$

Kartezyen denklemi $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{z - z_0}{c},\ y = y_0$ dir.

Doğrultman vektörü $\vec{u} = (0, b, c)$ şeklinde ise;

Parametrik denklemi $\quad x = x_0$

$y = y_0 + k.b$

$z = z_0 + k.c$

Kartezyen denklemi $x = x_0,\ \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ dir.

Sonuç:

Uzayda herhangi bir $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve $\vec{u} = (a, b, c)$ vektörüne paralel olan doğrunun

i. Vektörel denklemi; $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + k.(a, b, c);\ k \in R$

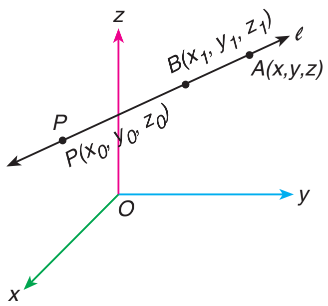
ii. Parametrik denklemi; $x = x_0 + k.a$

$$y = y_0 + k.b$$

$$z = z_0 + k.c \quad \text{dir.}$$

iii. Kartezyen denklemi; $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ dir.

2.1.2. Uzayda İki Noktası Verilen Doğrunun Denklemi



Uzayda $P(x_0, y_0, z_0)$ ve $B(x_1, y_1, z_1)$ noktaları verilsin. P ve B noktalarından geçen ℓ doğrusunun denklemini bulalım.

ℓ doğrusunun üzerinde keyfi bir A(x, y, z) noktası için.

$$\overrightarrow{PA} = k.\overrightarrow{PB}$$

$$\vec{A} - \vec{P} = k.(\vec{B} - \vec{P})$$

$$(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = k[(x_1, y_1, z_1) - (x_0, y_0, z_0)]$$

$$(x - x_0,\ y - y_0, z - z_0) = k.(x_1 - x_0,\ y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

denklemi iki noktadan geçen doğrunun vektörel denklemidir.

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = k.(x_1 - x_0, y_0 - y_0, z_1 - z_0)$$

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 = k.(x_1 - x_0) &\Rightarrow x = x_0 + k.(x_1 - x_0) \\ y - y_0 = k.(y_1 - y_0) &\Rightarrow y = y_0 + k.(y_1 - y_0) \\ z - z_0 = k.(z_1 - z_0) &\Rightarrow z = z_0 + k.(z_1 - z_0) \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi iki noktadan geçen doğrunun parametrik denklemleridir.

$\overrightarrow{PA} = k.\overrightarrow{PB} \Rightarrow \overrightarrow{PA} \parallel \overrightarrow{PB}$ dir.

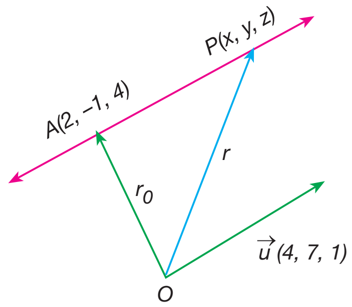
$$\overrightarrow{PA} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$$

$\overrightarrow{PB} = (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0)$ olduğundan

$\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}$ bağıntısı iki noktadan geçen doğrunun kartezyen denklemidir.

ETKİNLİK

A(2, –1, 4) noktasından geçen ve $\vec{u} = (4, 7, 1)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemini bulalım.



Doğrunun değişken bir noktası P(x, y, z) olsun.

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \Rightarrow r = r_0 + k.\vec{u},\ k \in R$ dir.

(x, y, z) = (2, –1, 4) + k.(4, 7, 1)

(x, y, z) = (2, –1, 4) + (4k, 7k, k)

(x, y, z) = (2 + 4k, –1 + 7k, 4 + k)

$\Rightarrow x = 2 + 4k,\ \ y = -1 + 7k,\ \ z = 4 + k$ parametrik denklemi elde edilir. Buradan,

$\dfrac{x - 2}{4} = k,\ \dfrac{y + 1}{7} = k,\ z - 4 = k$ yazılabilir.

O halde doğrunun kartezyen denklemi

$\dfrac{x - 2}{4} = \dfrac{y + 1}{7} = z - 4$ bulunur.

1. Uzayda bir A(–1, 3, 4) noktasından geçen ve $\vec{u}$ = (2, 1, 2) vektörüne paralel olan doğrunun vektörel denklemini bulalım.

Çözüm:

Doğrunun üzerindeki herhangi bir nokta P(x, y, z) olsun.

$\overrightarrow{AP} \,//\, \vec{u}$ olduğundan $\overrightarrow{AP} = \vec{k}.\vec{u}$, $k \in IR$ dir.

$\vec{P} - \vec{A} = k.\vec{u} \Rightarrow \vec{P} = \vec{A} + k.\vec{u}$

$\vec{P}$ = (–1, 3, 4) + k.(2, 1, 2) doğrunun vektörel denklemidir.

2. Uzayda bir A(–4, –1, 3) noktasından geçen ve $\vec{u}$ = (–1, 3, 2) vektörüne paralel olan doğrunun parametrik denklemini bulalım.

Çözüm:

P(x, y, z) doğru üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere,

$\vec{P} = \vec{A} + k.\vec{u}$, $k \in R$ doğrusunun vektörel denklemidir.

$\vec{P}$ = (–4, –1, 3) + k . (–1, 3, 2)

(x, y, z) = (–4, –1, 3) + k.(–1, 3, 2)

(x, y, z) = (–4 – k, –1 + 3k, 3 + 2k)

$$\left.\begin{array}{l} x = -4 - k \\ y = -1 + 3k \\ z = 3 + 2k \end{array}\right\}$$ doğrusunun parametrik denklemidir.

3. Uzayda bir A(0, –2, 5) noktasından geçen ve $\vec{u}$ = (–3, 5, –2) vektörüne paralel olan doğrunun kartezyen denklemini bulalım.

Çözüm:

Uzayda A(x_0, y_0, z_0) noktasından geçen ve $\vec{u}$ = (a, b, c) vektörüne paralel olan doğrunun kartezyen denklemi

$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ dir. Buradan doğru denklemi

$\frac{x}{-3} = \frac{y + 2}{5} = \frac{z - 5}{-2} = k$, $k \in IR$ dir.

4. $\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{4} = z - 3$ doğrusunun doğrultman vektörlerinden birini bulalım.

Çözüm:

A(x_0, y_0, z_0) noktasından geçen ve $\vec{u}$ = (a, b, c) vektörüne paralel doğrunun denklemi

$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = k$, $k \in R$ olduğundan

$\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z - 3}{1}$ doğrusunun doğrultman vektörü

$\vec{u}$ = (3, 4, 1) veya $\vec{u}$ ne paralel vektörlerden biri olabilir.

5. Uzayda denklemi $\frac{x + 3}{2} = \frac{2y - 1}{5} = \frac{3z + 2}{4}$ doğrusunun doğrultman vektörlerinden birini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{x + 3}{2} = \frac{2y - 1}{5} = \frac{3z + 2}{4} \Rightarrow \frac{x + 3}{2} = \frac{2\left(y - \frac{1}{2}\right)}{5} = \frac{3\left(z + \frac{2}{3}\right)}{4}$$

$\frac{x + 3}{2} = \frac{y - \frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{z + \frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}$ olduğundan doğrultman vektörü

$\vec{u} = \left(2, \frac{5}{2}, \frac{4}{3}\right)$ olarak alınabilir.

6. Uzayda denklemi $\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 1}{4}$, z = 4 olan doğrunun doğrultman vektörlerinden birini bulalım.

Çözüm:

$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$, $z = z_0$ kapalı denklemiyle verilen doğrunun doğrultman vektörü $\vec{u}$ = (a, b, 0) olduğundan

$\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 1}{4}$, z = 4 doğrusunun doğrultman vektörü

$\vec{u}$ = (3, 4, 0) olarak alınabilir.

Bu doğru z eksenine dik bir doğrudur.

UYGULAMA ADIMI

7. Uzayda A(1, –2, 4) ve B(–1, 0, 2) noktalarından geçen doğrunun vektörel denklemini bulalım.

Çözüm:

P(x, y, z); A ve B noktalarından geçen doğrunun üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere,

$\overrightarrow{AP} = k.\overrightarrow{AB}$ dir.

$\vec{P} - \vec{A} = k.\overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{P} = \vec{A} + k.\overrightarrow{AB}$, $k \in IR$ vektörel denklemi verir.

$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} \Rightarrow \vec{B} - \vec{A} = (-1-1, 0-(-2), 2-4) = (-2, 2, -2)$

$\vec{P} = \vec{A} + k.\overrightarrow{AB}$

$\vec{P} = (1, -2, 4) + k.(-2, 2, -2)$, $k \in R$ vektörel denklemi elde edilir.

8. Uzayda A(–3, 1, 2) ve B(1, –2, 4) noktalarından geçen doğrunun parametrik denklemini bulalım.

Çözüm:

$\vec{P} = \vec{A} + k.\overrightarrow{AB}$, $k \in IR$ olduğundan

(x, y, z) = (–3, 1, 2) + k.(1 – (–3), –2 – 1, 4 – 2)

(x, y, z) = (–3, 1, 2) + k.(4, –3, 2)

(x, y, z) = (–3 + 4k, 1 – 3k, 2 + 2k)

$\left.\begin{array}{l} x = -3+4k \\ y = 1-3k \\ z = 2+2k \end{array}\right\}$ doğrusunun parametrik denklemidir.

9. Uzayda orijinden ve A(–3, 2, 5) noktasından geçen doğrunun kapalı denklemini bulalım.

Çözüm:

O(0, 0, 0) ve A(–3, 2, 5) noktasından geçen doğrunun kapalı denklemi

$$\frac{x-(-3)}{0-(-3)} = \frac{y-2}{0-2} = \frac{z-5}{0-5} = k,\quad k \in IR$$

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-5}{-5} = k,\quad k \in IR \text{ dir.}$$

10. Uzayda d: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{2}$ doğrusuna paralel olan ve A(–2, 4, –3) noktasından geçen doğrunun vektörel denklemini bulalım.

Çözüm:

d: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{2}$ doğrusunun doğrultman vektörü

$\vec{u}$ = (3, 4, 2) dir. Dolayısıyla $\vec{u}$ = (3, 4, 2) vektörüne paralel ve A(–2, 4, –3) noktasından geçen doğrunun vektörel denklemi, P(x, y, z) bu doğru üzerindeki herhangi bir nokta olmak üzere,

$\vec{P} = \vec{A} + k.\vec{u}$, $k \in IR$

$\vec{P} = (-2, 4, -3) + k.(3, 4, 2)$, $k \in IR$ dir.

11. Analitik uzayda $\frac{x-2}{7} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-1}{5}$ denklemi ile verilen doğrunun üzerinde bulanan noktalardan herhangi ikisini bulalım.

Çözüm:

Kartezyen denklemi $\frac{x-2}{7} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-1}{5}$ olan doğrunun parametrik denklemini yazalım.

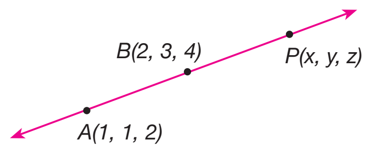
$\frac{x-2}{7} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-1}{5} = k$, $k \in IR \Rightarrow \frac{x-2}{7} = k \Rightarrow x = 7k+2$

$\frac{y-4}{3} = k \Rightarrow y = 3k+4$, $\frac{z-1}{5} = k \Rightarrow z = 5k+1$

Bu doğru üzerindeki noktalar (7k + 2, 3k + 4, 5k + 1) şeklindedir. k = 0 için A(2, 4, 1) k = 1 için B(9, 7, 6) doğru üzerinde bulunan herhangi iki noktadır.

12. Analitik uzayda A(1, 1, 2) ve B(2, 3, 4) noktalarından geçen doğrunun denklemini bulalım.

Çözüm:



Doğrunun üzerinde keyfi bir P(x, y, z) noktası alalım.

$\overrightarrow{AP} = (x-1, y-1, z-2)$

$\overrightarrow{AB} = (2-1, 3-1, 4-2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1, 2, 2)$ dir.

$\overrightarrow{AP} = k.\overrightarrow{AB}$ olduğundan,

$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{2}$ doğru denklemi elde edilir.

1. Uzayda bir A(3, –1, 0) noktasından geçen ve $\vec{u}$ = (1, –1, 4) vektörüne paralel olan doğrunun vektörel denklemini bulunuz.

$\vec{P} = (3, -1, 0) + k.(1, -1, 4)$

2. Uzayda bir A(4, 3, –5) noktasından geçen ve $\vec{u}$ = (–2, 1, 3) vektörüne paralel olan doğrunun k parametresine göre denklemini bulunuz.

$x = 4 - 2k$
$y = 3 + k$
$z = -5 + 3k, \; k \in IR$

3. Uzayda bir A(7, 2, 3) noktasından geçen ve $\vec{u}$ = (–4, 3, 1) vektörüne paralel olan doğrunun kartezyen denklemini bulunuz.

$\frac{x-7}{-4} = \frac{y-2}{3} = z - 3$

4. Kartezyen denklemi $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-6}{7}$ olan doğrunun geçtiği noktayı ve doğrultman vektörünü bulunuz.

$A(2, 4, 6)$
$\vec{u} = (3, 5, 7)$

5. Kartezyen denklemi $x = 2, \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{2}$ olan doğrunun geçtiği noktayı ve doğrultman vektörünü bulunuz.

$A(2, 1, -3)$
$\vec{u} = (0, -4, 2)$

6. Kartezyen denklemi $\frac{2x-8}{3} = \frac{3y-1}{4} = \frac{4z+2}{5}$ olan doğrunun doğrultman vektörünü bulunuz.

$\vec{u} = \left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}\right)$

PEKİŞTİRME ADIMI

7. Uzayda A(–1, –1, 4) ve B(2, 1, 3) noktasından geçen doğrunun vektörel denklemini bulunuz.

$\vec{P} = (-1, -1, 4) + k.(3, 2, -1)$

8. Uzayda A(2, –3, 1) ve B(–4, 0, –3) noktasından geçen doğrunun parametrik denklemini bulunuz.

$x = 2 - 6k$
$y = -3 + 3k$
$z = 1 - 4k$

9. Uzayda A(0, 2, –5) ve B(–4, –1, 1) noktasından geçen doğrunun kapalı denklemini bulunuz.

$\frac{x+4}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-6}$

10. Uzayda d: $\frac{x+3}{-4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{4-z}{1}$ doğrusuna paralel olan ve A(1, 3, –3) noktasından geçen doğrunun vektörel denklemini bulunuz.

$\vec{P} = (1, 3, -3) + k.(-4, -2, -1)$

11. Uzayda A(1, 2, 3) ve B(–3, 1, 5) noktalarından geçen doğrunun vektörel denklemini bulunuz.

$\vec{P} = (1, 2, 3) + k.(-4, -1, 2)$

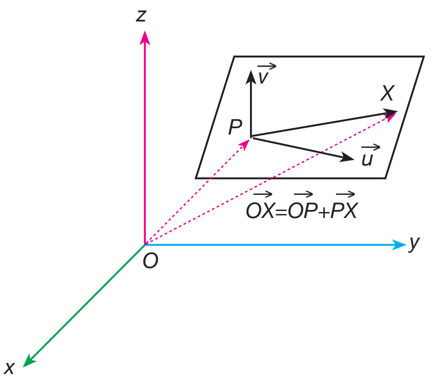
12. Uzayda denklemi $\frac{x+4}{2} = \frac{y-3}{3}, z = -1$ olan doğruya paralel olan ve A(–2, 5, –7) noktasından geçen doğrunun parametrik denklemini bulunuz.

$x = -2 + 2k$
$y = 5 + 3k$
$z = -7$

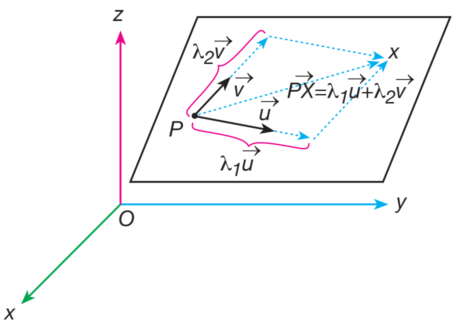
BÖLÜM 2

UZAYDA DÜZLEM DENKLEMLERİ

UZAYDA BİR DÜZLEMİN PARAMETRİK DENKLEMİ



Uzayda herhangi bir P noktasından geçen ve lineer bağımsız $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin belirttiği düzlemin parametrik denklemini bulalım.



$\vec{Px}$ vektörü $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin lineer bileşimi şeklinde yazılabilir.

$\lambda_1, \lambda_2 \in R$ olmak üzere, $\vec{Px} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} \cdots (1)$ dir.

$\vec{Ox} = \vec{OP} + \vec{Px}$

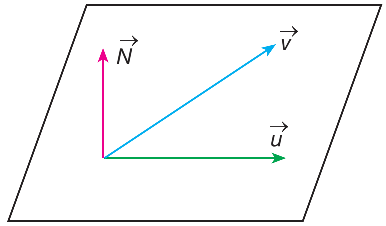
$\Rightarrow \vec{x} = \vec{P} + \vec{Px} \cdots (2)$ dir. (1) deki eşitliği (2) de yerine yazarsak;

$\vec{x} = \vec{P} + \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} \cdots (3)$ denklemi elde edilir. Bu denkleme düzlemin parametrik denklemi denir. λ_1, λ_2 reel sayılarına düzlemin parametreleri, $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerine düzlemin doğrultu vektörleri denir.

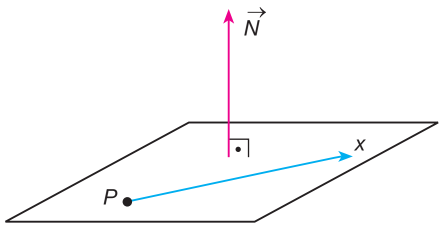
UZAYDA BİR DÜZLEMİN KAPALI DENKLEMİ

Bir düzlemin doğrultu vektörlerine dik olan vektörlere düzlemin normal vektörü denir ve $\vec{N}$ ile gösterilir.

$\vec{N} \perp \vec{u}$
$\vec{N} \perp \vec{v}$



$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ nün vektörel çarpımı $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ ye dik olan bir vektör olduğundan $\vec{N} = \vec{u} \times \vec{v}$ alınabilir.



Dolayısıyla uzayda bir P noktasından geçen ve $\vec{N}$ vektörüne dik olan düzlemin kapalı denklemi $< \vec{Px}, \vec{N} > = 0$ şeklindedir.

Bu ifade $< \vec{x} - \vec{P}, \vec{N} > = 0$ şeklinde yazılabilir.

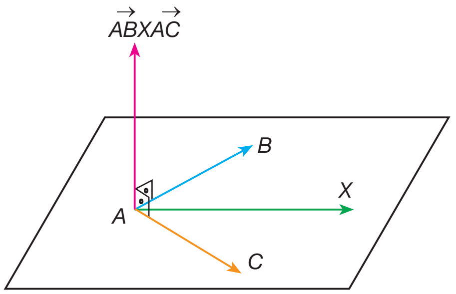
Buradan $< \vec{N}, \vec{x} > - < \vec{N}, \vec{P} > = 0$ dır.

$- < \vec{N}, \vec{P} > = d$ alınırsa $< \vec{Px}, \vec{N} > = 0$ eşitliği $< \vec{N}, \vec{x} > + d = 0$ halini alır.

$P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve $\vec{N} = (a, b, c)$ vektörüne dik olan düzlemin kapalı denklemi $\vec{x} = (x, y, z)$ olmak üzere;

$ax + by + cz + d = 0$ biçiminde verilebilir.

UZAYDA DOĞRUSAL OLMAYAN ÜÇ NOKTADAN GEÇEN DÜZLEM DENKLEMİ



Uzayda doğrusal olmayan $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$, $C(x_2, y_2, z_2)$ noktaları verilsin.

$\vec{AB} \times \vec{AC}$ vektörü hem $\vec{AB}$ hem de $\vec{AC}$ vektörüne dik olduğundan belirttiği düzleme de diktir. Bu yüzden düzlemin normal vektörü olarak alınabilir.

$\vec{N} = \vec{AB} \times \vec{AC}$ dir. Buna göre, düzlem denklemi

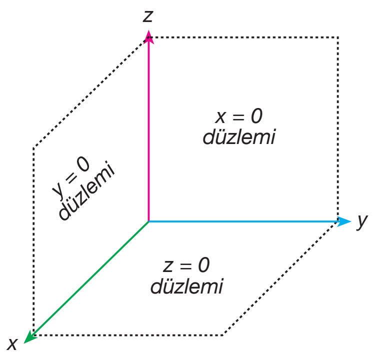
$< \vec{AB} \times \vec{AC}, \vec{Ax} > = 0$ dır. Bu çarpım $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{Ax}$ vektörlerinin karma çarpımıdır.

$< \vec{Ax}, \vec{AB} x \vec{AC} > = < \vec{AB} x \vec{AC}, \vec{Ax} > = \det(\vec{Ax}, \vec{AB}, \vec{AC}) = 0$ olduğundan düzlem denklemi

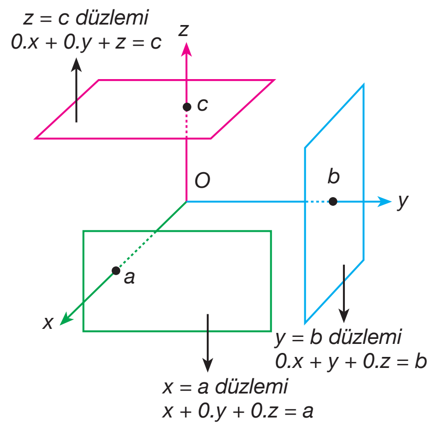
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$ biçiminde yazılabilir.

ÖZEL DÜZLEMLER

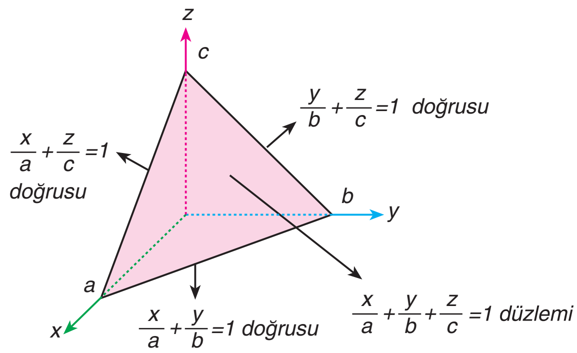
1. Koordinat Düzlemleri



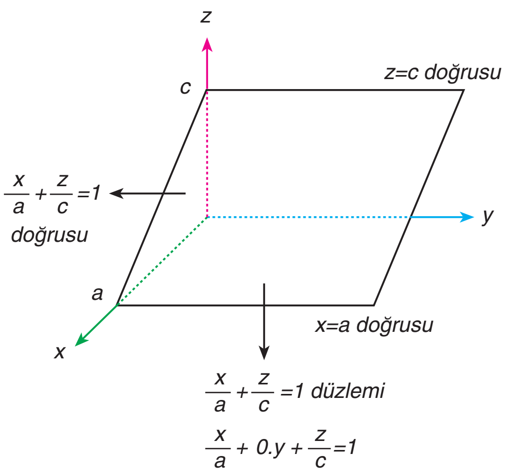
2. Koordinat Düzlemlerine Paralel Düzlemler



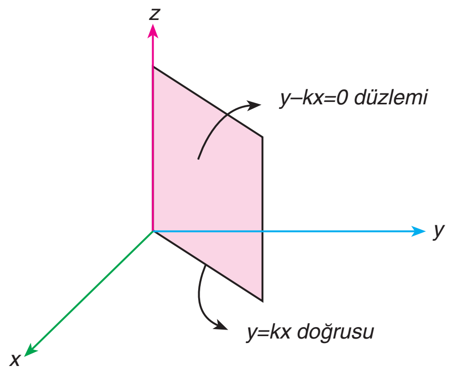
3. Eksenleri Ayırdığı Parçalar Türünden Düzlem Denklemi



4. Eksenlere Paralel Düzlemler

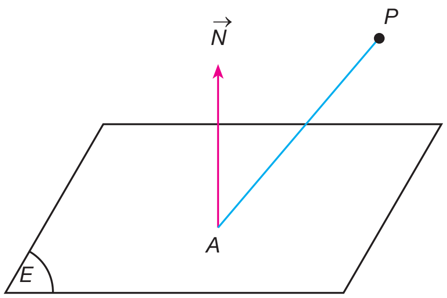


5. Eksenlerden Geçen Düzlemler



SONUÇ: Koordinat eksenlerinden geçen veya koordinat eksenlerine paralel olan düzlemlerin denklemlerinde o ekseni belirten terim bulunmaz.

YARI UZAY



E, uzayında $<\vec{N}, \vec{x}> + d = 0$ denklemiyle verilen bir düzlem olsun.

E düzleminin herhangi bir A noktası için $-<\vec{N}, \vec{A}> = d$ dir. E düzlemi bulunduğu uzayı iki yarı uzaya ayırır. $\vec{N}$ vektörünün içinde bulunduğu uzay U_1, içinde bulunmadığı uzay U_2 ise

$U_1 \cup E \cup U_2$ kümesi uzaya eşittir.

Uzayda bir P noktasının U_1 yarı uzayında bulunması için $<\vec{N}, \vec{AP}> > 0$ olmalıdır.

ÖRNEK

A(–3, 2, 5) noktasından geçen ve $\vec{N} = (2, 1, 4)$ vektörüne dik olan düzlemin denklemini yazalım.

ÇÖZÜM

A(–3, 2, 5) noktasından geçen ve normal vektörü $\vec{N} = (2, 1, 4)$ olan düzlemin denklemi

$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$

$\Rightarrow 2(x + 3) + 1.(y - z) + 4(z - 5) = 0$

veya $2x + y + 3z - 14 = 0$ dır.

ETKİNLİK

a) A(2, 1, 3) noktasından geçen ve $\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$ doğrusuna dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

b) A(3, 4, –2) ve B(1, 1, –2) noktaları veriliyor. A noktasından geçen ve $\vec{AB}$ vektörüne dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

UYGULAMA ADIMI

1. A(–1, 3, 4) noktasından geçen ve $\vec{N} = (2, 1, 3)$ vektörüne dik olan düzlem denklemini bulalım.

Çözüm:

x(x, y, z) aranan düzlemde keyfi bir nokta olmak üzere;

$\overrightarrow{Ax} \perp \vec{N}$ olduğundan $< \overrightarrow{Ax}, \vec{N} > = 0$ olmalıdır.

$\overrightarrow{Ax} = \vec{x} - \vec{A} = (x+1, y-3, z-4)$

$\vec{N} = (2, 1, 3)$

$< \overrightarrow{Ax}, \vec{N} > = 2.(x+1) + 1.(y-3) + 3.(z-4) = 0$

$2x + 2 + y - 3 + 3z - 12 = 0 \Rightarrow 2x + y + 3z - 13 = 0$ dir.

2. Uzayda A(2, 3, 4) noktasından geçen ve $\vec{u} = (2, -4, -1)$ ve $\vec{v} = (3, 1, 2)$ vektörlerinin belirttiği düzlemin λ_1 ve λ_2 parametrelerine bağlı ($\lambda_1, \lambda_2 \in$ IR) parametrik denklemini bulalım.

Çözüm:

Düzlem denklemi $\overrightarrow{Ax} = \lambda_1.\vec{u} + \lambda_2.\vec{v}$ dir.

$\vec{x} - \vec{A} = \lambda_1.\vec{u} + \lambda_2.\vec{v}$

$\vec{x} = \vec{A} + \lambda_1.\vec{u} + \lambda_2.\vec{v}$

$\vec{x} = (2, 3, 4) + \lambda_1(2, -4, -1) + \lambda_2(3, 1, 2)$

Buradan,

$\left.\begin{array}{l} x = 2 + 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ y = 3 - 4\lambda_1 + \lambda_2 \\ z = 4 - \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{array}\right\}$ düzlemin parametrik denklemleridir.

3. Başlangıç noktasından geçen ve $\vec{N} = (-2, 3, -5)$ vektörüne dik olan düzlem denklemini bulalım.

Çözüm:

A(x, y, z) noktası aranan düzlemin keyfi bir noktası olmak üzere, $\overrightarrow{OA} \perp \vec{N}$ dir. Dolayısıyla $< \overrightarrow{OA}, N > = 0$ olmalıdır.

$\overrightarrow{OA} = \vec{A} - \vec{O} = (x, y, z)$

$\vec{N} = (-2, 3, -5)$

$\Rightarrow -2.x + 3.y - 5.z = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 5z = 0$

düzlem denklemi elde edilir.

4. A(–3, –1, 1) noktasından geçen ve $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3}$ doğrusuna dik olan düzlemin denklemini bulalım.

Çözüm:

$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3}$ doğrusu düzleme dik olduğundan bu doğanun $\vec{u} = (4, -2, 3)$ doğrultman vektörü aynı zamanda düzlemin normal vektörüdür.

x(x, y, z) düzlemin herhangi bir noktası ise

$< \overrightarrow{Ax}, \vec{u} > = 0 \Rightarrow (x+3).4 + (y+1).-2 + (z-1).3 = 0$

$4x + 12 - 2y - 2 + 3z - 3 = 0$

$4x - 2y + 3z + 7 = 0$ düzlem denklemi elde edilir.

5. M(3, 2, –3) noktasından geçen ve $\triangle$ (4, 3, 2) doğultusuna dik olan düzlemin genel denklemini yazalım.

Çözüm:

Düzlemin genel denklemi

$4(x - 3) + 3(y - 2) + 2(z + 3) = 0$ dan

$4x + 3y + 2z - 12 = 0$ olur.

6. A(–2, 0, –1) ve B(1, 3, 4) noktaları veriliyor.

A noktasındından geçen ve $\overrightarrow{AB}$ vektörüne dik olan düzlemin denklemini bulalım.

Çözüm:

$\overrightarrow{AB}$ vektörü düzleme dik olduğundan bu düzlemin normal vektörü olarak kabul edilebilir.

$\vec{N} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1-(-2), 3-0, 4-(-1)) = (3, 3, 5)$

x = (x, y, z) düzlem üzerinde herhangi bir nokta olsun.

$\overrightarrow{Ax} = (x+2, y, z+1)$

$< \overrightarrow{Ax}, \vec{N} > = 0 \Rightarrow 3.(x+2) + 3.y + 5.(z+1) = 0$

$3x + 6 + 3y + 5z + 5 = 0$

$3x + 3y + 5z + 11 = 0$ düzlem denklemi elde edilir.

7. A(2, 1, 0), B(–1, 0, 3), C(0, 2, –4) noktalarından geçen düzlem denklemini bulalım.

Çözüm:

P(x, y, z) düzlem üzerinde herhangi bir nokta olsun.

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ ve $\overrightarrow{AP}$ vektörlerinin karma çarpımı sıfır olur.

$$< \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP} > = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-0 \\ -1-2 & 0-1 & 3-0 \\ 0-2 & 2-1 & -4-0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left| \begin{array}{ccc} x-2 & y-1 & z \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ x-2 & y-1 & z \\ -3 & -1 & 3 \end{array} \right| = 0$$

$\Rightarrow (4x - 8 - 3z - 6y + 6) - (2z + 3x - 6 + 12y - 12) = 0$

$\Rightarrow x - 18y - 5z + 16 = 0$ elde edilir.

8. Orijinden ve A(–2, 3, 0), B(1, 0, –2) noktasından geçen düzlemin denklemini bulalım.

Çözüm:

P(x, y, z) düzlem üzerinde herhangi bir nokta olsun.

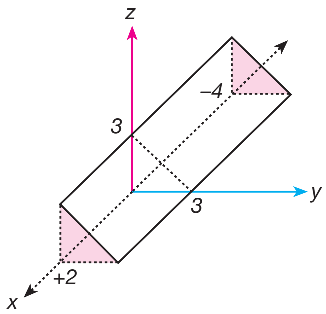
$$< \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP} > = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ x & y & z \\ -2 & 3 & 0 \end{array} \right| = 0$$

$\Rightarrow (-6x) - (3z + 4y) = 0$

$\Rightarrow -6x - 4y - 3z = 0 \Rightarrow 6x + 4y + 3z = 0$ elde edilir.

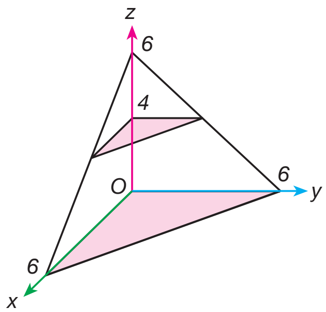
9. Uzayda $x = 2$, $x = -4$, $y = 0$, $z = 0$ ve $y + z = 3$ düzlemi ile sınırlı cismin şeklini çizelim.

Çözüm:



10. Uzayda $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 4$ ve $x + y + z = 6$ düzlemi ile sınırlı cismin şeklini çizelim.

Çözüm:



11. M(1, 3, 5), N(4, 3, 2) noktalarının belirttiği doğru parçasına orta noktasında dik olan düzlemin denklemini bulalım.

Çözüm:

[MN] doğru parçasının orta noktası M_0 olsun.

$M_0\left(\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\right)$ dir. MN nin doğrultu katsayıları MN(3, 0, –3) tür.

Aranan düzlem M_0 dan geçip MN doğrusuna dik olacağından, denklemi

$$3\left(x - \frac{5}{2}\right) + 0.(y-3) + (-3).\left(z - \frac{7}{2}\right) = 0 \Rightarrow x - z + 1 = 0 \text{ olur.}$$

PEKİŞTİRME ADIMI

1. $A(2, -1, 4)$ noktasından geçen ve $\vec{N} = (-3, 2, 7)$ vektörüne dik olan düzlem denklemini bulunuz.

$3x - 2y - 7z + 20 = 0$

2. Uzayda $A(-1, 4, 3)$ noktasından geçen ve $\vec{u} = (1, 1, 3)$ ve $\vec{v} = (2, 1, 2)$ vektörlerinin belirttiği düzlemin λ_1 ve λ_2 parametrilerine bağlı denklemini bulunuz.

$x = -1 + \lambda_1 + 2\lambda_2$
$y = 4 + \lambda_1 + \lambda_2$
$z = 3 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2$

3. Başlangıç noktasından geçen ve $\vec{N} = (1, 3, 2)$ vektörüne dik olan düzlem denklemini bulunuz.

$x + 3y + 2z = 0$

4. $A(-2, 0, 3)$ noktasından geçen ve $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{2}$ doğrusuna dik olan düzlem denklemini bulunuz.

$3x + 4y + 2z = 0$

5. $A(1, 0, 2)$ ve $B(3, 1, 4)$ noktaları veriliyor.

A noktasından geçen ve $\overrightarrow{AB}$ vektörüne dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

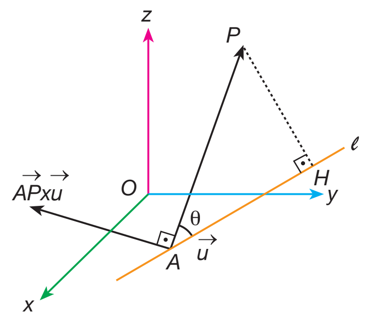
$2x + y + 2z - 6 = 0$

6. $A(1, 0, 1)$ ve $B(-2, 2, 0)$, $C(0, 3, 4)$ noktalarından geçen düzlem denklemini bulunuz.

$9x + 10y - 7z - 2 = 0$

BÖLÜM 3

UZAYDA BİR NOKTANIN BİR DOĞRUYA UZAKLIĞI



Uzayda verilen bir P noktasının ℓ doğrusuna uzaklığını bulalım.

$$\sin\theta = \frac{\|\vec{PH}\|}{\|\vec{AP}\|} \Rightarrow \|\vec{PH}\| = \|\vec{AP}\| . \sin\theta \text{ dır.}$$

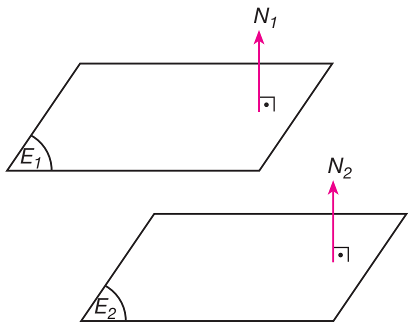
$$\|\vec{PH}\| = \underbrace{\|\vec{u}\| . \|\vec{AP}\| . \sin\theta}. \frac{1}{\|\vec{u}\|}$$

$$\|\vec{PH}\| = \|\vec{AP} x \, \vec{u}\| . \frac{1}{\|\vec{u}\|}$$

$$\|\vec{PH}\| = \frac{\|\vec{AP} \, x \, \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \text{ elde edilir.}$$

UZAYDA İKİ DÜZLEMİN BİRBİRİNE GÖRE DURUMLARI

İKİ DÜZLEMİN PARALEL OLMA ŞARTI



$E_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$E_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ düzlemleri verilsin.

E_1 düzleminin normal vektörü N_1, E_2 düzleminin normal vektörü N_2 olsun.

E_1 ve E_2 düzlemlerinin birbirine paralel olması için N_1 // N_2 olmalıdır.

$E_1 // E_2 \Leftrightarrow \vec{N_1} // \vec{N_2} \Leftrightarrow \vec{N_1} = k.\vec{N_2}$ dir.

$\vec{N_1} = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$ olduğundan

$(A_1, B_1, C_1) = k.(A_2, B_2, C_2)$

$(A_1, B_1, C_1) = (kA_2, kB_2, kC_2) \Rightarrow A_1 = k.A_2$

$B_1 = k.B_2$

$C_1 = k.C_2$ olur.

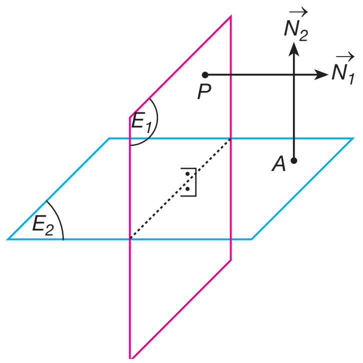
Buradan $E_1 // E_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = k$ paralellik koşulu elde edilir.

$E_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$E_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ düzlemleri çakışık ise

$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$ dir.

İKİ DÜZLEMİN DİK OLMA ŞARTI



$E_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$E_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ düzlemleri verilsin.

E_1 düzleminin normal vektörü N_1, E_2 düzleminin normal vektörü N_2 olsun.

E_1 ve E_2 düzlemleri birbirine dik olması için $< \vec{N_1}, \vec{N_2} > = 0$ olmalıdır.

$\vec{N_1} = (A_1, B_1, C_1)$ ve $\vec{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$ olduğundan

$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ diklik bağıntısı elde edilir.

UYGULAMA ADIMI

1. A(1, 0, 2) noktasının $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{-2}$ doğrusuna uzaklığını bulalım.

Çözüm:

Doğru denklemini sağlayan bir P noktası alalım. P(2, –1, 3) noktası doğru denklemini sağlar.

$\vec{u} = (2, -1, -2)$ doğrultman vektörü olmak üzere

$d = \dfrac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ değerini bulalım.

$\overrightarrow{AP} = (1, -1, 1)$

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{u} = \begin{array}{r|ccc|l} & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \\ & 1 & -1 & 1 & \\ & 2 & -1 & -2 & \\ -2\vec{e}_3 & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & 2\vec{e}_1 \\ -\vec{e}_1 & & & & -\vec{e}_3 \\ -2\vec{e}_2 & 1 & -1 & 1 & 2\vec{e}_2 \end{array}$$

$\overrightarrow{AP} \times \vec{u} = (2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3) - (-2\vec{e}_3 - \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2)$

$\overrightarrow{AP} \times \vec{u} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (3, 4, 1)$

$\|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

$d = \dfrac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{\sqrt{26}}{3}$ bulunur.

2. A(–2, 1, 4) noktasından $x - 2 = \dfrac{y-1}{2} = z + 1$ doğrusuna uzaklığını bulalım.

Çözüm:

A(–2, 1, 4) noktasının doğruya uzaklığı d, bu doğrunun üzerindeki bir nokta P(2, 1, –1) ve $d = \dfrac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ değerini bulalım.

$\overrightarrow{AP} = (4, 0, -5)$

$\vec{u} = (1, 2, 1)$

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{u} = \begin{array}{r|ccc|l} & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \\ & 4 & 0 & -5 & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ 0 & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & 0 \\ -10\vec{e}_1 & & & & 8\vec{e}_3 \\ 4\vec{e}_2 & 4 & 0 & -5 & -5\vec{e}_2 \end{array}$$

$= 8\vec{e}_3 - 5\vec{e}_2 + 10\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$

$= 10\vec{e}_1 - 9\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3 = (10, -9, 8)$

$\|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\| = \sqrt{10^2 + (-9)^2 + 8^2} = \sqrt{100 + 81 + 64} = \sqrt{245}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$d = \dfrac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{\sqrt{245}}{\sqrt{6}}$ bulunur.

3. A(–1, 1, 0) noktasının parametrik denklemi

$x = 2k - 1,\ y = 1 - k,\ z = k + 2$ olan doğruya olan uzaklığını bulalım.

Çözüm:

Doğru P(–1, 1, 2) noktasından geçmektedir.

$\overrightarrow{AP} = \vec{P} - \vec{A} = (0, 0, 2)$

$\vec{u} = (2, -1, 1)$ olmak üzere,

$d = \dfrac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ dir.

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{u} = \begin{array}{r|ccc|l} & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \\ & 0 & 0 & 2 & \\ & 2 & -1 & 1 & \\ 0 & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & 0 \\ -2\vec{e}_1 & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4\vec{e}_2 \end{array} = 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_1 = (2, 4, 0)$$

$\|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$

$\|u\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$

$d = \dfrac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ bulunur.

4. $3x + ky - 2z + 1 = 0$

$9x + 12y - nz + 5 = 0$

denklemleriyle verilen düzlemler birbirine paralel olduğuna göre, k + n toplamını bulalım.

Çözüm:

$\dfrac{3}{9} = \dfrac{k}{12} = \dfrac{-2}{-n}$ olmalı

$36 = 9k \Rightarrow k = 4$

$-3n = -18 \Rightarrow n = 6$ bulunur.

$k + n = 4 + 6 = 10$ dur.

5. $2x + 3y - kz - 8 = 0$

$my + nx + 4z + 16 = 0$

denklemleriyle verilen düzlemler çakışık olduğuna göre,

$m + n + k$ toplamını bulalım.

Çözüm:

$\frac{2}{m} = \frac{3}{n} = \frac{-k}{4} = \frac{-8}{16}$ olmalı

$32 = -8m \Rightarrow m = -4$

$48 = -8n \Rightarrow n = -6$

$-32 = -16k \Rightarrow k = 2$

$m + n + k = -4 - 6 + 2 = -8$ bulunur.

6. A(2, 1, 1) noktasından geçen $3x - y + az - 6 = 0$ düzlemi

$6x + by + cz - 4 = 0$ düzlemine paralel olduğuna göre,

$a + b + c$ toplamını bulalım.

Çözüm:

A(2, 1, 1) noktası $3x - y + az - 6 = 0$ düzlemini sağladığından

$3.2 - 1 + a.1 - 6 = 0 \Rightarrow a = 1$ olur.

$\left.\begin{array}{l} 3x - y + z - 6 = 0 \\ 6x + by + cz - 4 = 0 \end{array}\right\}$ düzlemleri paralel ise

$\frac{3}{6} = \frac{-1}{b} = \frac{1}{c}$ olmalı

$3b = -6 \Rightarrow b = -2$

$3c = 6 \Rightarrow c = 2$ bulunur.

$a + b + c = 1 - 2 + 2 = 1$ dir.

7. $E_1: 5x - 4y + 3z - 2 = 0$

$E_2 = 2x - ay + 6z + 5 = 0$

denklemleriyle verilen düzlemler birbirine dik olduğuna göre, a değerini bulalım.

Çözüm:

E_1 düzleminin normal vektörü $\overrightarrow{N_1} = (5, -4, 3)$

E_2 düzleminin normal vektörü $\overrightarrow{N_2} = (2, -a, 6)$

$E_1 \perp E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{N_1} \perp \overrightarrow{N_2}$ olduğundan $< \overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2} > = 0$ dır.

$5.2 + (-4).(-a) + 3.6 = 0$

$10 + 4a + 18 = 0 \Rightarrow 4a = -28 \Rightarrow a = -7$ bulunur.

8. A(1, 0, –2) noktasından geçen

$E_1: x + 2y + kz - 5 = 0$

$E_2: x + my + 3z - n = 0$

denklemleriyle verilen düzlemler birbirine dik olduğuna göre,

$m + n + k$ toplamını bulalım.

Çözüm:

$x = 1,\ y = 0,\ z = -2$ için düzlem denklemleri sağlanır.

$1 - 2k - 5 = 0 \Rightarrow 2k = -4 \Rightarrow k = -2$ dir.

$1 - 6 - n = 0 \Rightarrow n = -5$ dir.

E_1 ve E_2 düzlemlerinin normalleri $\overrightarrow{N_1}$ ve $\overrightarrow{N_2}$ olsun.

$\overrightarrow{N_1} = (1, 2, -2)$

$\overrightarrow{N_2} = (1, m, 3)$

$\overrightarrow{N_1} \perp \overrightarrow{N_2} \Leftrightarrow < \overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2} > = 0$ olduğundan

$1.1 + 2.m - 2.3 = 0 \Rightarrow 2m = 5 \Rightarrow m = \frac{5}{2}$

$m + n + k = \frac{5}{2} - 5 - 2 = \frac{-9}{2}$ bulunur.

9. $E_1: kx + ky + 4z - 6 = 0$

$E_2: kx - 8y + 4z + 7 = 0$

denklemleriyle verilen düzlemler birbirine dik olduğuna göre, k değerini bulalım.

Çözüm:

$\overrightarrow{N_1} = (k, k, 4),\ \overrightarrow{N_2} = (k, -8, 4)$

$E_1 \perp E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{N_1} \perp \overrightarrow{N_2} \Leftrightarrow < \overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2} > = 0$

$k.k + k.(-8) + 4.4 = 0$

$k^2 - 8k + 16 = 0 \Rightarrow (k - 4)^2 = 0 \Rightarrow k = 4$ bulunur.

PEKİŞTİRME ADIMI

1. A(–1, –1, 3) noktasının $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-1}$ doğrusuna uzaklığını bulunuz.

$\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{14}}$

2. A(0, 1, –2) noktasının $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3}$, z = 1 doğrusuna uzaklığını bulalım.

$\frac{\sqrt{133}}{\sqrt{13}}$

3. A(2, 1, 1) noktasının parametrik denklemi

$x = k - 2,\ y = 2k + 1,\ z = 3k + 1$ olan doğruya olan uzaklığını bulunuz.

$\frac{\sqrt{104}}{\sqrt{7}}$

4. $2x + 6y - kz + 1 = 0$

$mx + 3y + 12z + 6 = 0$

denklemleriyle verilen düzlemler birbirine paralel olduğuna göre, k + m toplamını bulunuz.

–23

5. $kx + 2y - (m + 1)z + 15 = 0$

$3x + ny + 2z + 5 = 0$

denklemleriyle verilen düzlemler çakışık olduğuna göre,

m + n + k toplamını bulunuz.

$\frac{8}{3}$

6. A(–1, 3, 1) noktasından geçen $x - 2y + kz + 8 = 0$ düzlemi

$4x - ny + mz + 6 = 0$ düzlemine paralel olduğuna göre,

k + m + n toplamı kaçtır?

3

7. $E_1: 3x - 4y + z - 4 = 0$

$E_2: 4x - 2y + pz + 1 = 0$

denklemleriyle verilen düzlemler birbirine dik olduğuna göre, p değerini bulunuz.

-20

8. A(3, 1, 2) noktasından geçen

$E_1: 2x + y - mz + 1 = 0$

$E_2: x - ny + z + k = 0$

denklemleriyle verilen düzlemler birbirine dik olduğuna göre, $m + n + k$ toplamını bulunuz.

-5

9. $E_1: mx - 2y - 4z + 2 = 0$

$E_2: (1 - m)x + 3y - 2z + 3 = 0$

düzlemleri birbirine dik olduğuna göre, m nin alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

1

10. Denklemi $4x - 3y + z - 6 = 0$ olan düzlemin normal vektörünü bulunuz.

$(4, -3, 1)$

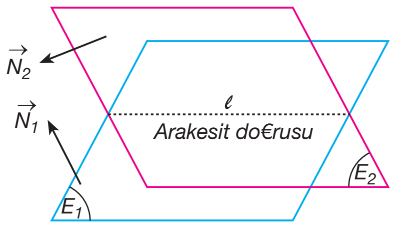
11. Eksenleri kestiği noktalar A(3, 0, 0), B(0, –1, 0) ve C(0, 0, 2) olan düzlemin denklemini bulunuz.

$-x + 3y - \frac{3}{2}z + 3 = 0$

12. A(1, –1, 3) ve B(0, –2, 1) ve C(2, 1, –1) noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

$8x - 6y - z - 11 = 0$

İKİ DÜZLEMİN ARAKESİT DOĞRUSU



Uzayda E_1 ve E_2 paralel ve çakışık olmayan iki düzlem olsun. Bu düzlemlerin arakesit doğrusu olan ℓ doğrusunun denklemini bulalım.

ℓ arakesit doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{N_1}$ ve $\vec{N_2}$ normal vektörüne diktir. Dolayısıyla $\vec{N_1} \times \vec{N_2}$ vektörü ℓ doğrusunun doğrultman vektörüne paralel olacağından $\vec{N_1} \times \vec{N_2}$ nin herhangi bir katı ℓ doğrusunun doğrultman vektörü olarak kabul edilebilir.

E_1 ve E_2 düzlemlerinin arakesit doğrusu üzerinde herhangi bir nokta A olmak üzere,

$\ell : x = A + k.\left(\vec{N_1} \times \vec{N_2}\right)$ arakesit doğrusunun denklemidir.

İKİ DÜZLEMİN ARAKESİT DOĞRUSUNDAN GEÇEN DÜZLEMLER (DÜZLEM DEMETİ)

İki düzlemin arakesit doğrusundan geçen bütün düzlemlere, uzayda düzlem demeti denir.

Düzlemleri $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ve

$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ olan düzlemlerin arakesit doğrusundan geçen düzlem demetinin denklemi

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,\ k \in IR$ dir.

ÖRNEK

Denklemleri $4x - 3y + 2z + 3 = 0$ ve $x + y + 3z + 1 = 0$ olan düzlemlerin arakesitinden ve P(1, –1, 2) noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

Denklemleri $4x - 3y + 2z + 3 = 0$ ve $x + y + 3z + 1 = 0$ olan düzlemlerin arakesitinden geçen düzlemin denklemi:

$4x - 3y + 2z + 3 + k.(x + y + 3z + 1) = 0$ dır.

Bu düzlem P(1, –1, 2) noktasından geçiyorsa;

$4.1 - 3.(-1) + 2.2 + k.(1 - 1 + 3.2 + 1) = 0$

$\Rightarrow k = -\frac{11}{7}$ olur. Bu değer denklemde yerine yazılırsa

$4x - 3y + 2z + 3 - \frac{11}{7}(x + y + 3z + 1) = 0$

$28x - 21y + 14z + 21 - 11x - 11y - 33z - 11 = 0$

$17x - 32y - 19z + 10 = 0$ bulunur.

ETKİNLİK

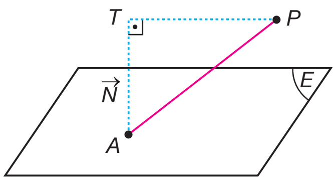
a) Denklemleri $x + 2y + 3z + 2 = 0$ ve $2x - 3y - 2z + 1 = 0$ olan düzlemlerin arakesit doğrusunu bulunuz.

b) $x + y - z + 1 = 0$ ve $2x - 3y + z - 2 = 0$ düzleminin arakesitinden geçen ve $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{5}$ doğrusuna paralel olan düzlemin denklemini bulunuz.

BÖLÜM 4

UZAYDA BİR NOKTANIN BİR DÜZLEME UZAKLIĞI

BİR NOKTANIN BİR DÜZLEME UZAKLIĞI



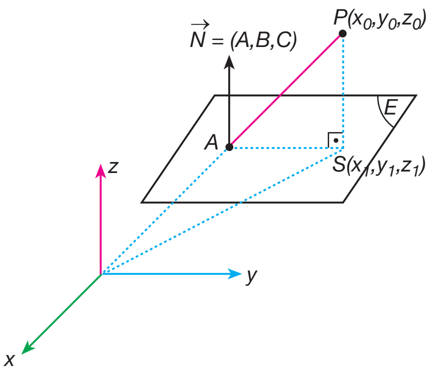
Uzayda bir E düzlemi ve bu düzlemin üzerinde olmayan P noktası verilsin. P noktasının E düzlemine uzaklığını bulalım.

P noktasının E düzlemine uzaklığı, $\overrightarrow{AP}$ vektörünün $\vec{N}$ normal vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörünün uzunluğu olduğundan,

$$\overrightarrow{AT} = \frac{<\overrightarrow{AP}, \vec{N}>}{<\vec{N}, \vec{N}>}.\vec{N} \quad \text{dir.}$$

$$\overrightarrow{AT} = \frac{<\overrightarrow{AP}, \vec{N}>}{\|\vec{N}\|^2}.\vec{N} \Rightarrow \|\overrightarrow{AT}\| = \frac{|<\overrightarrow{AP}, \vec{N}>|}{\|\vec{N}\|^2}.\|\vec{N}\| \quad \text{dir.}$$

Buradan $\|\overrightarrow{AT}\| = \dfrac{|<\overrightarrow{AP}, \vec{N}>|}{\|\vec{N}\|}$ bulunur. Bu uzaklık $\|\overrightarrow{AT}\| = d(P, E)$ şeklinde gösterilir.



$P(x_0, y_0, z_0)$ noktası $Ax + By + Cz + D = 0$ düzleminin dışında herhangi bir nokta, P noktasının E düzlemine dik izdüşümü $S(x_1, y_1, z_1)$ olsun.

S noktası E düzleminde olduğundan $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ dır.

$\overrightarrow{PS}$ ve $\vec{N}$ düzleme dik olduğundan $\overrightarrow{PS} \,//\, \vec{N}$ dir.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SP} \Rightarrow \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OS}$$

$$\Rightarrow <\vec{N}, \overrightarrow{SP}> = <\vec{N}, \vec{P} - \vec{S}> = <\vec{N}, \vec{P}> - <\vec{N}, \vec{S}>$$

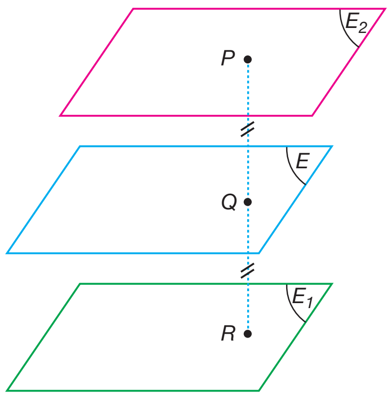
$$\Rightarrow \|\vec{N}\|.\|\overrightarrow{SP}\| = (Ax_0 + By_0 + Cz_0) - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)$$

$$\Rightarrow \|\vec{N}\|.\|\overrightarrow{SP}\| = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$$

$$\|\overrightarrow{SP}\| = \mp\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0}{\|\vec{N}\|}$$

$$\|\overrightarrow{SP}\| = \mp\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \text{dir.}$$

BİR DÜZLEMDEN EŞİT UZAKLIKTAKİ NOKTALARIN GEOMETRİK YERİ



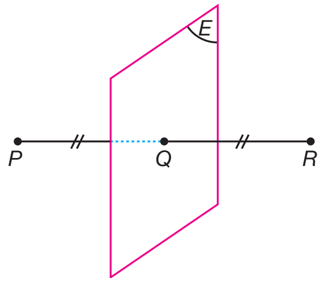
Bir düzlemden eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri bu düzleme paralel olan iki düzlemdir.

$E: Ax + By + Cz + D = 0$ düzleminden eşit uzaklıkta bulunan düzlemler

$E_1: Ax + By + Cz + D_1 = 0$, $E_2: Ax + By + Cz + D_2 = 0$ ise

$$D = \frac{D_1 + D_2}{2} \quad \text{dir.}$$

Uzayda iki noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri bu iki noktayı birleştiren doğru parçasının orta dikme düzlemidir.



$|PQ| = |QR|$

Bu durumda $P(x_1, y_1, z_1)$ ve $R(x_2, y_2, z_2)$ noktalarından eşit uzaklıkta bulunan normal vektörü $\vec{N} = (A, B, C)$ olan düzlemin denklemi

$$Ax + By + Cz - \left[A\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + B\frac{(y_1+y_2)}{2} + C\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\right] = 0 \text{ dır.}$$

İKİ DÜZLEMİN AÇIORTAY DÜZLEMLERİ

E_1 ... $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

E_2 ... $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

düzlemleri bir doğru boyunca kesişen iki düzlem olsun. Bu iki düzlemin açıortay düzlemi her iki düzleme uzaklıkları eşit olan noktaların geometrik yeridir.

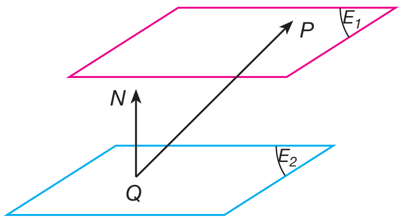
Açıortay düzlemi üzerindeki bir nokta P(x, y, z) ise açıortay düzlemlerinin denklemleri

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \mp \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

bulunur.

UZAYDA İKİ DÜZLEM ARASINDAKİ UZAKLIK

i. Düzlemler Paralel ise;



E_1 düzleminin normali $\vec{N_1}$, N_2 düzleminin normali $\vec{N_2}$ olsun.

$\vec{N_1} = \lambda\vec{N_2} = \vec{N}$ $(\lambda \in IR)$ olmak üzere iki düzlem arasındaki uzaklık $d(E_1, E_2)$ değerini bulalım.

E_1 düzlemi üzerinde üzerinde herhangi bir P noktası ile E_2 düzlemi üzerinde herhangi bir Q noktası alalım. $\vec{PQ}$ vektörünün $\vec{N}$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörünün uzunluğu bize paralel iki düzlem arasındaki uzaklığı verir.

Yani, $d(E_1, E_2) = \dfrac{|< \vec{PQ}, \vec{N} >|}{\|\vec{N}\|}$ dir.

E_1 ve E_2 düzlemlerinin kapalı denklemleri

E_1: $Ax + By + Cz + D_1 = 0$

E_2: $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ olarak verilsin.

$\vec{N} = (A, B, C)$ ve E_1 düzlemindeki herhangi bir $P = (x_0, y_0, z_0)$ E_2 düzlemindeki herhangi bir nokta $Q = (x_1, y_1, z_1)$ olsun.

$$< \vec{PQ}, \vec{N} > = < \vec{Q} - \vec{P}, \vec{N} > = < \vec{Q}, \vec{N} > - < \vec{P}, \vec{N} >$$
$$= Ax_1 + By_1 + Cz_1 - Ax_2 - By_2 - Cz_2$$
$$= -D_1 - (-D_2)$$
$$= D_2 - D_1$$

olduğundan $d(E_1, E_2) = \dfrac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ olduğu görülür.

ii. Düzlemler kesişiyor veya çakışıyor ise iki düzlem arasındaki uzaklık sıfırdır.

UYGULAMA ADIMI

1. $E_1: x - 2y + z - 1 = 0$

$E_2: x + 2y - 2z + 3 = 0$

düzlemlerinin arakesit doğrusunun denklemini bulalım.

Çözüm:

E_1, düzleminin normal vektörü $\overrightarrow{N_1} = (1, -2, 1)$

E_2, düzleminin normal vektörü $\overrightarrow{N_2} = (1, 1, -2)$ dir.

$\overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2}$ vektörel çarpımında oluşan $\vec{u}$ vektörü arakesit doğrusunun doğrultman vektörü olarak alınabilir.

$A(x_0, y_0, z_0)$ arakesit doğrusu üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere,

$\vec{x} = A + k.(\overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2})$ arakesit doğrusunun denklemidir.

$$\overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \left| \begin{array}{ccc} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & -2 & 1 \end{array} \right|$$

$$= (4\vec{e_1} + \vec{e_3} + \vec{e_2}) - (-2\vec{e_3} + \vec{e_1} - 2\vec{e_2})$$

$$= 3\vec{e_1} + 3\vec{e_2} + 3\vec{e_3} \Rightarrow \vec{u} = (3, 3, 3)$$

$A(x_0, y_0, z_0)$ düzlem denklemlerini sağlar.

$$\left.\begin{array}{l} x_0 - 2y_0 + z_0 - 1 = 0 \\ x_0 + 2y_0 - 2z_0 + 3 = 0 \end{array}\right\} z_0 = 0 \text{ için } \begin{array}{r} x_0 - 2y_0 - 1 = 0 \\ \underline{x_0 + 2y_0 + 3 = 0} \\ 2x_0 = -2 \Rightarrow x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \end{array}$$

$A(-1, -1, 0)$ noktasından geçen ve $\vec{u} = (3, 3, 3)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemi $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{3}$ şeklinde bulunur.

2. $E_1: 2x - y + z - 5 = 0$

$E_2: x + y - 2z - 4 = 0$

düzlemlerinin arakesit doğrusunun parametrik denklemini bulalım.

Çözüm:

$\overrightarrow{N_1} = (2, -1, 1)$ ve $\overrightarrow{N_2} = (1, 1, -2)$

$$\vec{u} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \left| \begin{array}{ccc} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right|$$

$$= 2\vec{e_1} + 2\vec{e_3} + \vec{e_2} - (-\vec{e_3} + \vec{e_1} - 4\vec{e_2})$$

$$= \vec{e_1} + 5\vec{e_2} + 3\vec{e_3}$$

$\Rightarrow \vec{u} = (1, 5, 3)$ bulunur.

$A(x_0, y_0, z_0)$ arakesit doğrusu üzerinde bir nokta olsun.

$$z = 0 \text{ için } \begin{array}{l} 2x_0 - y_0 - 5 = 0 \\ \underline{x_0 + y_0 - 4 = 0} \\ 3x_0 = 9 \Rightarrow x_0 = 3,\ y_0 = 1,\ z_0 = 0 \end{array}$$

$\vec{x} = A + k.\vec{u}$

$(x, y, z) = (3, 1, 0) + k.(1, 5, 3)$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 + k \\ y = 1 + 5k \\ z = 3k \end{array}\right\} \text{arakesit doğrusunun parametrik denklemidir.}$$

3. Analitik uzayda $P(3, -1, 2)$ noktasının $2x - 2y + z + 8 = 0$ düzlemine uzaklığını bulalım.

Çözüm:

$2x - 2y + z + 8 = 0$ düzleminde $A(-3, 0, -2)$ noktasını alalım. $\overrightarrow{AP}$ vektörünün $\vec{N} = (2, -2, 1)$ vektörü üzerindeki dik izdüşümünün uzunluğu P noktasının düzleme olan uzaklığını verecektir.

$$\overrightarrow{AP} = \vec{P} - \vec{A} = (3, -1, 2) - (-3, 0, -2) = (6, 1, 4)$$

$$d(P, E) = \frac{|\langle \overrightarrow{AP}, \vec{N} \rangle|}{\|\vec{N}\|} = \frac{6.2 + (-1).(-2) + 4.1}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1}} = \frac{18}{3} = 6 \text{ birim}$$

bulunur.

4. P(3, –5, 4) noktasının, 2x – 6y + 3z + k = 0 düzlemine uzaklığı 6 birim olduğuna göre, k nın alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm:

$2x-6y+3z+k=0$ düzleminde $A\left(-\frac{k}{2},0,0\right)$ noktasını alalım.

$$\overrightarrow{AP}=\vec{P}-\vec{A}=(3,-5,4)-\left(-\frac{k}{2},0,0\right)=\left(\frac{6+k}{2},-5,4\right)$$

$$\vec{N}=(2,-6,3)$$

$$d(P,E)=\frac{|<\overrightarrow{AP},\vec{N}>|}{\|\vec{N}\|}=\frac{\left|2.\frac{6+k}{2}+(-5).(-6)+3.4\right|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}}=6$$

$$\frac{|k+6+30+12|}{\sqrt{49}}=6\Rightarrow\frac{|k+48|}{7}=6$$

$$|k+48|=42\Rightarrow k+48=42\ \vee\ k+48=-42$$

$k=-6\ \vee\ k=-90$ bulunur.

5. Denklemleri x – y + 2z – 1 = 0 ve 3x – 3y + 6z + 2 = 0 olan düzlemler arasındaki uzaklık kaç birimdir?

Çözüm:

$x-y+2z+1=0$ düzlemi üzerinden $x=0,\ y=0,\ z=-\frac{1}{2}$ olup

$P(0, 0, -\frac{1}{2})$ noktasını alalım. $P(0, 0,-\frac{1}{2})$ noktasının

3x – 3y + 6z + 2 = 0 düzlemine uzaklığı paralel olan bu düzlemlerin arasındaki uzaklıktır.

$$d=\frac{\left|3.0-3.0+6.\left(-\frac{1}{2}\right)+2\right|}{\sqrt{3^2+(-3)^2+6^2}}=\frac{1}{3\sqrt{6}}\text{ birim bulunur.}$$

6. 3x – 2y + 6z – 5 = 0 ve 6x – 4y + 12z + 18 = 0

düzlemlerinden eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerini bulalım.

Çözüm:

$$\left.\begin{array}{l}E_1: 3x-2y+6z-5=0\\ E_2: 6x-4y+12z+18=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}6x-4y+12z-10=0\\ 6x-4y+12z+18=0\end{array}$$

düzlemleri birbirine paraleldir.

$$\left.\begin{array}{l}D_1=-10\\ D_2=18\end{array}\right\}\Rightarrow D=\frac{D_1+D_2}{2}=\frac{-10+18}{2}=4$$

$\Rightarrow$ aranan düzlem denklemi 6x – 4y + 12z + 4 = 0

7. E_1: 2x – 6y + 3z + 5 = 0

E_2: 6x – 3y + 2z – 7 = 0

düzlemlerinden eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerini bulalım.

Çözüm:

E_1 ve E_2 düzlemlerine eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri bu düzlemlerin açıortay düzlemleridir. Bu düzlemleri D_1 ve D_2 ile gösterirsek;

$$D_{1,2}=\frac{2x-6y+3z+5}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}}=\mp\frac{6x-3y+2z-7}{\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}}$$

$$D_{1,2}=\frac{2x-6y+3z+5}{\cancel{\sqrt{49}}}=\mp\frac{6x-3y+2z-7}{\cancel{\sqrt{49}}}$$

$$D_1: 2x-6y+3z+5=6x-3y+2z-7\Rightarrow D_1: 4x+3y-z-12=0$$

$$D_2: 2x-6y+3z+5=-6x+3y-2z+7\Rightarrow D_2: 8x-9y+5z-2=0$$

olarak bulunur.

8. 2x – y + 2z – 6 = 0 ve 2x – y + 2z + 12 = 0

düzlemleri arasındaki uzaklığı bulalım.

Çözüm:

E_1: 2x – y + 2z – 6 = 0 düzleminde A(0, 0, 3)

E_2: 2x – y + 2z + 12 = 0 düzleminde P(–3, 0, –3)

noktalarını alalım. $\overrightarrow{AP}$ nin $\vec{N}$ = (2, –1, 2) üzerindeki dik izdüşüm uzunluğu iki düzlem arasındaki uzaklığı verecektir.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AP}=\vec{P}-\vec{A}=(-3,0,-6)\\ N=(2,-1,2)\end{array}\right\}\Rightarrow d(E_1,E_2)=\frac{|<\overrightarrow{AP},\vec{N}>|}{\|\vec{N}\|}$$

olduğundan

$$d(E_1,E_2)=\frac{|-3.2+0.(-1)+(-6).2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{|-18|}{\sqrt{9}}=\frac{18}{3}=6\text{ birim}$$

bulunur.

$$\left.\begin{array}{l}E_1: Ax+By+Cz+D_1=0\\ E_2: Ax+By+Cz+D_2=0\end{array}\right\}\text{ düzlemleri arasındaki uzaklık}$$

$$d(E_1,E_2)=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\text{ formülünü kullanarak da bulunabilir.}$$

$$d(E_1,E_2)=\frac{|12-(-6)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{18}{3}=6\text{ birim bulunur.}$$

9. $x + ky - 3z + 3 = 0$ ve $2x + 4y + mz + n = 0$

paralel düzlemler arasındaki uzaklık $\sqrt{14}$ birim olduğuna göre, k + m + n toplamının kaç olabileceğini bulalım.

Çözüm:

$\left.\begin{array}{l} E_1: x + ky - 3z + 3 = 0 \\ E_2: 2x + 4y + mz + n = 0 \end{array}\right\}$ düzlemleri paralel olduğuna göre,

$\frac{1}{2} = \frac{k}{4} = \frac{-3}{m}$ olmalıdır. Buradan $k = 2$, $m = -6$ bulunur.

$\begin{array}{l} E_1: x + 2y - 3z + 3 = 0 \\ E_2: 2x + 4y - 6z + n = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} E_1: 2x + 4y - 6z + 6 = 0 \\ E_2: 2x + 4y - 6z + n = 0 \end{array}$

alalım $\vec{N} = (2, 4, -6)$ dır.

$\left.\begin{array}{l} E_1 \text{ üzerinde } A(1,1,2) \\ E_2 \text{ üzerinde } P\left(0,0,\frac{n}{6}\right) \end{array}\right\}$ noktalarını alalım.

$\overrightarrow{AP} = \left(-1, -1, \frac{n-12}{6}\right)$

$$d(E_1, E_2) = \frac{|<\overrightarrow{AP}, \vec{N}>|}{\|\vec{N}\|} \Rightarrow \sqrt{14} = \frac{\left|(-1).2 + (-1).4 + (-6).\frac{n-12}{6}\right|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-6)^2}}$$

$$\sqrt{14} = \frac{|-2-4-n+12|}{\sqrt{56}} \Rightarrow \sqrt{14} = \frac{|6-n|}{2\sqrt{14}}$$

$$\Rightarrow 28 = |6-n| \quad \Rightarrow \quad 6 - n = 28 \quad \vee \quad 6 - n = -28$$

$n = -22 \quad \vee \quad n = 34$ bulunur. Dolayısıyla

$k + m + n = 2 - 6 - 22 = -26$

$k + m + n = 2 - 6 + 34 = 30$ değerini alabilir.

10. Düzlemleri $2x + y - z - 8 = 0$ ve $x + y + z - 4 = 0$ olan düzlemlerin arakesit doğrusundan ve $P(-1, 2, 2)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulalım.

Çözüm:

$2x + y - z - 8 = 0$ ve $x + y + z - 4 = 0$ düzlemlerinin arakesit doğrusundan geçen düzlemlerin denklemi

$2x + y - z - 8 + k.(x + y + z - 4) = 0$, $k \in R$ şeklindedir.

$P(-1, 2, 2)$ noktası düzlem denklemini sağlayacağından

$2.(-1) + 2 - 2 - 8 + k.(-1 + 1 + 2 - 4) = 0$

$-10 + k.(-2) = 0$

$-2k = 10 \Rightarrow k = -5$ bulunur.

$2x + y - z - 8 + -5.(x + y + z - 4) = 0$

$\cancel{2x} + y - z - 8 - \cancel{5x} - \cancel{5y} - 5z + 20 = 0$

$-3x - 4y - 6z + 12 = 0$

$3x + 4y + 6z - 12 = 0$ istenen düzlem denklemidir.

11. Denklemleri $x + y + z - 2 = 0$ ve $x - 2y + 2z - 6 = 0$

düzlemlerinin arakesitinden geçen ve $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{3} = z - 4$

doğrusuna paralel olan düzlem denklemini bulalım.

Çözüm:

$x + y + z - 2 + k(x - 2y + 2z - 6) = 0 \Rightarrow$

$(1 + k)x + (1 - 2k)y + (1 + 2k)z - 2 - 6k = 0$ dır. Buradan

$\vec{N} = (1 + k, 1 - 2k, 1 + 2k)$ olur. Doğrunun doğrultmanı

$\vec{u} = (2, 3, 1)$ dir. Doğru düzleme paralel olduğundan

$\vec{N} \perp \vec{u}$ ve $<\vec{N}, \vec{u}> = 0$ olmalıdır.

$2.(1 + k) + 3(1 - 2k) + 1 + 2k = 0$

$2 + 2k + 3 - 6k + 1 + 2k = 0 \Rightarrow 6 - 2k = 0 \Rightarrow k = 3$ tür.

$x + y + z - 2 + 3(x - 2y + 2z - 6) = 0 \Rightarrow$

$4x - 5y + 7z - 20 = 0$ aranan düzlem denklemidir.

12. Merkezi $M(-1, 2, 1)$ noktası ve $2x - 6y - 9z + 1 = 0$ düzlemine teğet olan kürenin denklemini bulalım.

Çözüm:

Küre verilen düzleme teğet ise kürenin yarıçapı $M(-1, 2, 1)$ noktasının $2x - 6y - 9z + 1 = 0$ düzlemine uzaklığına eşittir.

$$r = \frac{|2.(-1) - 6.2 - 9.1 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-9)^2}} = \frac{22}{11} = 2 \text{ olur.}$$

Kürenin denklemi; $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 2^2$ olur.

13. $P(1, 2, 3)$ noktasının $3x + 6y + 6z - 3 = 0$ düzlemine uzaklığını bulalım.

Çözüm:

$$d = \frac{|3.1 + 6.2 + 6.3 - 3|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2}}$$

$$= \frac{30}{9} = \frac{10}{3} \text{ birim olur.}$$

PEKİŞTİRME ADIMI

1. Denklemleri $x + 2y - z + 6 = 0$ ve $4x + y - 2z - 4 = 0$ olan düzlemlerinin arakesit doğrusunun vektörel denklemini bulunuz.

$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z}{-7}$

2. Denklemleri $3x - y + 2z - 7 = 0$ ve $x + y - 2z - 1 = 0$ olan düzlemlerin arakesit doğrusunun parametrik denklemini bulunuz.

$x = 2,\ y = -1 + 8k$
$z = 4k$

3. $x - 2y + 3z + 4 = 0$ ve $2x + y - 2z - 1 = 0$ düzlemlerinin arakesitinden geçen ve

$x = 1 - k$
$y = 2 + 3k$
$z = 1 + 2k$

doğrusuna paralel olan düzlem denklemini bulunuz.

$x - 7y + 11z + 13 = 0$

4. $x - 4y + z - 1 = 0$ ve $2x + y - 3z - 5 = 0$ düzlemlerinin arakesit doğrusundan ve P(1, –1, 2) noktasından geçen düzlem denklemini bulunuz.

$11x - 17y - 4z - 20 = 0$

5. Arakesit uzayda P(1, 0, –2) noktasının $x - 2y + 2z - 7 = 0$ düzlemine uzaklığını bulunuz.

$\frac{10}{3}$

6. P(3, 1, –1) noktasının $x - 3y + z - k = 0$ düzlemine uzaklığı $\sqrt{11}$ birim olduğuna göre, k nın alabileceği değerleri bulunuz.

$k = -12$ veya $k = 10$

7. $\sqrt{3}x + 3y - 2z - 8 = 0$ düzlemi ile $2\sqrt{3}x + 6y - 4z + 4 = 0$ düzlemleri arasındaki uzaklığı bulunuz.

$\frac{5}{2}$

8. $3x - y + 2z - 7 = 0$ ve $2x + y + 3z - 12 = 0$

düzlemlerine eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerini bulunuz.

$x - 2y - z + 5 = 0$
$5x + 5z - 19 = 0$

9. $3x - 2y + 6z + 7 = 0$ ve $6x - 4y + 12z - 2 = 0$

düzlemlerinden eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerini bulunuz.

$6x - 4y + 12z + 6 = 0$

10. $x + my - 2z + 4 = 0$ ve $3x - 6y + nz + k = 0$

düzlemleri arasındaki uzaklık 2 birim olduğuna göre,

$m + n + k$ toplamının toplamının alabileceği değerleri bulunuz.

-14 veya 22

11. Denklemleri $2x - 3y + z - 11 = 0$ ve $x + 2y + 5z + 4 = 0$

olan düzlemlerin arakesit doğrusundan geçen ve

$\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{3}$ doğrusuna paralel olan düzlem denklemini bulunuz.

$41x - 79y - 2z - 273 = 0$

12. $3x - y - z - 4 = 0$ ve $x + y - 2z - 6 = 0$ düzlemlerinin arakesit doğrusundan geçen ve

$x = -2k$

$y = 1 + k$

$z = 3 + 4k$

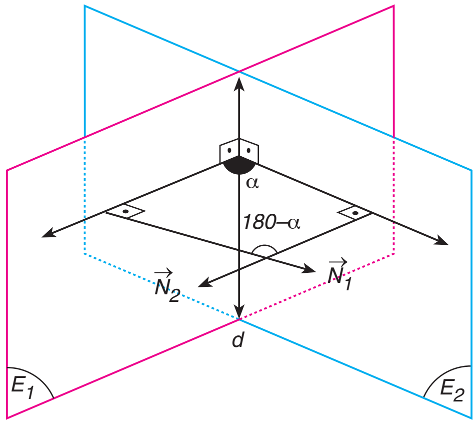
doğrusuna paralel olan düzlem denklemini bulunuz.

$16x - 20y + 13z + 30 = 0$

BÖLÜM 5

UZAYDA İKİ DÜZLEM ARASINDAKİ AÇI (ÖLÇEK AÇI)

UZAYDA İKİ DÜZLEM ARASINDAKİ AÇI



Kesişen iki düzlemin arakesit doğrusuna dik olan düzlemde iki açı oluşur. Bu açılardan biri dar açı diğeri ise geniş açıdır. Oluşan bu iki açıdan dar olanına bu iki düzlem arasındaki açı denir. Geniş açı dar açının bütünleyenidir.

İki düzlem arasındaki açı bulunurken bu düzlemlerin normalleri arasındaki açı bulunarak hesaplanabilir.

$E_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
$E_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

düzlemleri arasındaki açı α ise;

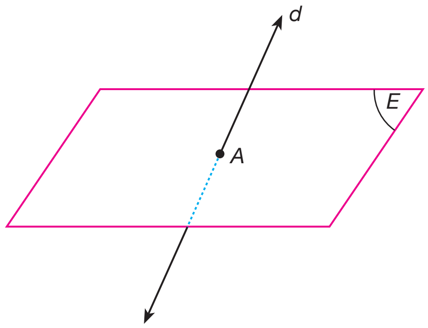
$$\cos\alpha = \frac{\left| < \vec{N_1}, \vec{N_2} > \right|}{\left\| \vec{N_1} \right\| \cdot \left\| \vec{N_2} \right\|} \text{ dir.}$$

Normalleri dik olan iki düzlem arasındaki açı 90°, normalleri lineer bağımlı olan

$N_1 = \lambda N_2$ $(\lambda \in IR)$ olan iki düzlem arasındaki açı 0° dir.

UZAYDA BİR DOĞRU VE BİR DÜZLEMİN BİRBİRİNE GÖRE DURUMLARI

DOĞRU İLE DÜZLEMİN ARAKESİT NOKTASI



$E: Ax + By + Cz + D = 0$ düzlemi ile

$d: \dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q} = \dfrac{z - z_0}{r} = \lambda$ doğrusu verilsin.

Doğrunun parametrik denklemleri $x = x_0 + \lambda p$

$y = y_0 + \lambda q$

$z = z_0 + \lambda r$ dir.

Bu ifadeler düzlem denkleminde yazılırsa

$A(x_0 + \lambda.p) + B(y_0 + \lambda q) + C(z_0 + \lambda r) + D = 0$

$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + \lambda(\lambda.p + B.q + C.r) + D = 0$

Buradan λ ifadesi çekilirse

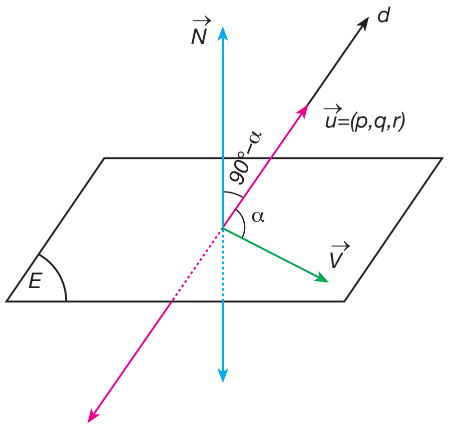
$\lambda = -\dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Ap + Bq + Cr}$ parametresi bulunur. Bulunan λ değeri yukarıdaki denklemlerde yerine yazılarak arakesit noktasının koordinatları bulunur.

i. $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$
$A.p + B.q + c.r \neq 0$ ise doğru ile düzlem tek noktada kesişir. (ya da doğru düzlemi deler)

ii. $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$
$A.p + B.q + Cr = 0$ ise doğru düzleme paraleldir.

iii. $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$
$Ap + Bq + Cr = 0$ ise doğru düzlemin üzerindedir denir.

KESİŞEN BİR DOĞRU VE BİR DÜZLEMİN ARASINDAKİ AÇI



Uzayda doğru düzleme çakışık veya paralel değilse düzlemi bir noktada keser. Doğru ile düzlem arasında oluşan açı ya dar açıdır ya da dik açıdır.

Dolayısıyla doğrunun doğrultman vektörü ile düzlemin normal vektörünün skaler çarpımlarından yola çıkarak doğru ile düzlem arasındaki açıyı bulabiliriz.

$$<\vec{u},\vec{N}>=\|\vec{u}\|.\|\vec{N}\|.\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{<\vec{u},\vec{N}>}{\|\vec{u}\|.\|\vec{N}\|}$$

$$\sin\alpha=\frac{|Ap+Bq+Cr|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

ifadesinden α açısı bulunur.

UZAYDA İKİ DOĞRUNUN BİRBİRİNE GÖRE DURUMLARI

Uzayda bir $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve $\vec{u}=(p,q,r)$ vektörüne paralel ℓ_1 doğrusu ile $Q(x_1, y_1, z_1)$ noktasından geçen ve $\vec{V}=(p_1, q_1, r_1)$ vektörüne paralel ℓ_2 doğrusu verilsin.

ℓ_1: $x = P + k\vec{u}$, $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + k(p, q, r)$; $k \in R$

ℓ_2: $x = Q + t\vec{v}$, $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(p_1, q_1, r_1)$ doğruları için;

i. $<\overrightarrow{PQ}, \vec{u} \times \vec{v}>=0$ ise doğrular aynı düzlemde bulunur. Aynı düzlemde bulunan doğrular kesişebilir, parelel veya çakışık durumlu olabilirler.

a. $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri lineer bağımsız ise doğrular bir nokta kesişir.

b. $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri lineer bağımlı ise doğrular ya çakışık ya da paraleldir denir.

1. $\overrightarrow{PQ}=\lambda\vec{u}$ olacak şekilde bir $\lambda \in IR$ varsa yani $\overrightarrow{PQ}$ ile $\vec{u}$ lineer bağımlı ise doğrular çakışıktır.

2. $\overrightarrow{PQ}=\lambda\vec{u}$ olacak şekilde bir $\lambda \in IR$ bulunamıyorsa yani $\overrightarrow{PQ}$ ve $\vec{u}$ lineer bağımsız ise doğrular paraleldir.

ii. $<\overrightarrow{PQ}, \vec{u} \times \vec{v}>\neq 0$ ise doğrular farklı düzlemdedir. Bu tür doğrulara aykırı doğrular denir.

iii. $<\vec{u}, \vec{v}>=0$ ise doğrular birbirine diktir.

ETKİNLİK

$\frac{x+3}{m}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{2}$ ve $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-2}{n}=\frac{z-3}{6}$ doğruları paralel olduğuna göre, m + n toplamını bulunuz.

UYGULAMA ADIMI

1. Denklemleri $-2x + 2y + z - 7 = 0$ ve $x - z + 4 = 0$ olan düzlemlerin ölçek açısının ölçüsünü bulalım.

Çözüm:

$-2x + 2y + z - 7 = 0$ düzleminin normali $\vec{N_1} = (-2, 2, 1)$

$x - z + 4 = 0$ düzleminin normali $\vec{N_2} = (1, 0, -1)$ dir.

Düzlemlerin ölçek açısı α ise;

$$\cos\alpha = \frac{|<\vec{N_1}, \vec{N_2}>|}{\|\vec{N_1}\|.\|\vec{N_2}\|} \text{ olduğundan}$$

$$\cos\alpha = \frac{|-2.1 + 2.0 + 1.(-1)|}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2}.\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 45° \text{ bulunur.}$$

2. Denklemleri $3x - 2y + \sqrt{3}z + 2\sqrt{3} = 0$ ve $x + y - \sqrt{3}z - \sqrt{3} = 0$ olan düzlemler arasındaki açının kosinüs değerini bulalım.

Çözüm:

$3x - 2y + \sqrt{3}z + 2\sqrt{3} = 0$ düzleminin normali $\vec{N_1} = (3, -2, \sqrt{3})$

$x + y - \sqrt{3}z - \sqrt{3} = 0$ düzleminin normali $\vec{N_2} = (1, 1, -\sqrt{3})$ dür.

$$\cos\alpha = \frac{|<\vec{N_1}, \vec{N_2}>|}{\|\vec{N_1}\|.\|\vec{N_2}\|} \text{ olduğundan}$$

$$\cos\alpha = \frac{|3.1 + 1.(-2) + \sqrt{3}.(-\sqrt{3})|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (\sqrt{3})^2}.\sqrt{1^2 + 1^2 + (-\sqrt{3})^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{9 + 4 + 3}.\sqrt{1 + 1 + 3}}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{80}} = \frac{2}{4\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{5}} \text{ bulunur.}$$

3. Denklemleri $x + \sqrt{2}y - z + 4 = 0$ ve $k.x + \sqrt{2}y + z - 7 = 0$ düzlemleri arasındaki açı 60° olduğuna göre, k değerini bulalım.

Çözüm:

$x + \sqrt{2}y - z + 4 = 0$ düzleminin normali $\vec{N_1} = (1, \sqrt{2}, -1)$

$k.x + \sqrt{2}y + z - 7 = 0$ düzleminin normali $\vec{N_2} = (k, \sqrt{2}, 1)$ dir.

$$\cos\alpha = \frac{|<\vec{N_1}, \vec{N_2}>|}{\|\vec{N_1}\|.\|\vec{N_2}\|} \text{ olduğundan}$$

$$\cos 60° = \frac{|1.k + \sqrt{2}.\sqrt{2} + (-1).1|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (-1)^2}.\sqrt{k^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2}}$$

$$\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{|k + 1|}{\cancel{2}.\sqrt{k^2 + 3}} \Rightarrow \sqrt{k^2 + 3} = (k + 1)$$

$$\Rightarrow \cancel{k^2} + 3 = \cancel{k^2} + 2k + 1 \Rightarrow k = 1 \text{ bulunur.}$$

4. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ doğrusunun $x - 2y + 4z + 5 = 0$ düzleminin kestiği noktanın koordinatlarını bulalım.

Çözüm:

$\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3} = k$ olsun. Buradan

$x = -2k - 1$, $y = 2k + 2$, $z = 3k + 3$ eşitliklerini

$x - 2y + 4z + 5 = 0$ düzleminde yerine yazalım.

$-2k - 1 - 2.(2k + 2) + 4.(3k + 3) + 5 = 0$

$-2k - 1 - \cancel{4k} - 4 + \cancel{12k} + 12 + 5 = 0 \Rightarrow 6k + 12 = 0 \Rightarrow 6k = -12$

$k = -2$ bulunur.

$x = -2k - 1 \Rightarrow x = -2.(-2) - 1 \Rightarrow x = 3$

$y = 2k + 2 \Rightarrow y = 2.(-2) + 2) \Rightarrow y = -2$

$z = 3k + 3 \Rightarrow z = 3.(-2) + 3 \Rightarrow z = -3$ bulunur.

Doğru ile düzlemin kesim noktası P(3, –2, –3) dür.

5. Parametrik denklemi $x = 3k + 2$

$y = 4k - 4$

$z = 1 - k$

olan doğrunun $5x - 2y + z - 1 = 0$ düzlemini kestiği noktanın koordinatlarını bulalım.

Çözüm:

$x = 3k + 2,\ \ y = 4k - 4,\ \ z = 1 - k,\ \ 5x - 2y + z - 1 = 0$

düzlem denkleminde yerine yazılırsa;

$5.(3k + 2) - 2.(4k - 4) + 1 - k - 1 = 0$

$15k + 10 - 8k + 8 - k = 0 \Rightarrow 6k + 18 = 0 \Rightarrow 6k = -18 \Rightarrow k = -3$

$x = 3k + 2 \Rightarrow x = 3.(-3) + 2 \Rightarrow x = -7$

$y = 4k - 4 \Rightarrow y = 4.(-3) - 4 \Rightarrow y = -16$

$z = 1 - k \Rightarrow z = 1 - (-3) \Rightarrow z = 4$ bulunur.

Doğru ile düzlemin kesim noktası $P(-7, -16, 4)$ dür.

6. $\sqrt{2}x + y + z - 9 = 0$ düzlemi ile $\dfrac{x+2}{\sqrt{2}} = \dfrac{y-3}{-1} = z + 4$ doğrusunun arasındaki açıyı bulalım.

Çözüm:

$\sqrt{2}x + y + z - 9 = 0$ düzleminin normal vektörü $\vec{N} = (\sqrt{2}, 1, 1)$

$\dfrac{x+2}{\sqrt{2}} = \dfrac{y-3}{-1} = z + 4$ doğrusunun doğrultman vektörü

$\vec{u} = (\sqrt{2}, -1, 1)$ dir. Doğru ile düzlem arasındaki açı α ise

$\sin\alpha = \dfrac{|<\vec{u}, \vec{N}>|}{\|\vec{u}\|.\|\vec{N}\|}$ dir. Buradan

$$\sin\alpha = \frac{|\sqrt{2}.\sqrt{2} + 1.(-1) + 1.1|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (1)^2 + (1)^2}.\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2 + 1^2}}$$

$\sin\alpha = \dfrac{2}{2.2} = \dfrac{2}{4} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$ bulunur.

7. Parametrik denklemi $x = 5 - k$

$y = -3 + k$

$z = 4$

olan doğru ile $x + z = 2$ düzlemi arasındaki açının ölçüsünü bulalım.

Çözüm:

$x + z = 2$ düzleminin normal vektörü, $\vec{N} = (1, 0, 1)$

$\left.\begin{array}{l} x = 5 - k \\ y = -3 + k \\ z = 4 \end{array}\right\}$ doğrusunun doğrultman vektörü, $\vec{u} = (-1, 1, 0)$

dır.

Doğru ile düzlem arasındaki açı α ise

$\sin\alpha = \dfrac{|<\vec{u}, \vec{N}>|}{\|\vec{u}\|.\|\vec{N}\|}$ dir. Buradan

$$\sin\alpha = \frac{|1.(-1) + 0.1 + 1.0|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}.\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}}$$

$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45°$ bulunur.

8. Uzayda ℓ_1: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-1}{3}$ ve ℓ_2: $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-3}{-1} = z - 2$ doğrularının birbirine göre durumlarını inceleyelim.

Çözüm:

ℓ_1 doğrusu $A(2, -1, 1)$ noktasından geçer ve doğrultmanı $\vec{u_1} = (1, -2, 3)$ dür.

ℓ_2 doğrusu $P(-1, 3, 2)$ noktasından geçer ve doğrultmanı $\vec{u_2} = (4, -1, 1)$ dir.

Eğer $<\vec{AP}, \vec{u_1} \times \vec{u_2}> = 0$ ise doğrular aynı düzlemde bulunur.

$\vec{AP} = \vec{P} - \vec{A} = (-1-2, 3-(-1), 2-1) = (-3, 4, 1)$

$$\vec{u_1} \times \vec{u_2} = \left|\begin{array}{ccc} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & -2 & 3 \end{array}\right|$$

$= (-2\vec{e_1} - \vec{e_3} + 12\vec{e_2}) - (-8\vec{e_3} - 3\vec{e_1} + \vec{e_2})$
$= -2\vec{e_1} - \vec{e_3} + 12\vec{e_2} + 8\vec{e_3} + 3\vec{e_1} - \vec{e_2}$
$= \vec{e_1} + 11\vec{e_2} + 7\vec{e_3}$

$\vec{u_1} \times \vec{u_2} = (1, 11, 7)$ bulunur.

$<\vec{AP}, \vec{u_1} \times \vec{u_2}> = -3.1 + 4.11 + 1.7 = 48 \neq 0$ olduğundan

ℓ_1 ve ℓ_2 doğruları aykırı doğrulardır.

PEKİŞTİRME ADIMI

1. Denklemleri $\sqrt{2}x - y + z - 13 = 0$ ve $\sqrt{2}x + y + z - 7 = 0$ olan düzlemler arasındaki ölçek açının değerini bulunuz.

60

2. Denklemleri $y = -x$ ve $-2x + 2y + z - 4 = 0$ olan düzlemler arasındaki ölçek açının değerini bulunuz.

90

3. Denklemleri $kx + \sqrt{2}y + kz + 7 = 0$ ve $kx - \sqrt{2}y - kz + 1 = 0$ olan düzlemler arasındaki ölçek açı 60° olduğuna göre, k nın alabileceği değerleri bulunuz.

$k = 1 \lor k = -1$

4. $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+1}{2}$ doğrusu $3x - 2y - z - 4 = 0$ düzlemini kestiği noktanın koordinatlarını bulunuz.

(5, 5, 1)

5. Parametrik denklemi
$x = 2k + 1$
$y = 3k + 1$
$z = 1 - k$
olan doğrunun $3x - 2y - z - 6 = 0$ düzlemini kestiği noktanın koordinatlarını bulunuz.

(13, 19, –5)

6. $\dfrac{x+2}{-2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-7}{2}$ doğrusu ile $4x - 3y + 12z - 13 = 0$ düzlemi arasındaki açının kosinüs değerini bulunuz.

$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

7. $\dfrac{x-3}{\sqrt{2}} = \dfrac{y+4}{k} = \dfrac{z-2}{-1}$ doğrusu ile $\sqrt{2}x - y - z - 5 = 0$ düzlemi arasındaki açı 30° olduğuna göre, k değerini bulunuz.

1

8. $2x - \sqrt{3}y - \sqrt{2}z + 5 = 0$ ve $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y + 2z - 7 = 0$ düzlemi arasındaki açının tanjant değerini bulunuz.

$2\sqrt{2}$

1. **A(–1, 0, 2) noktasından geçen ve $\vec{u}$ = (1, 4, –2) vektörüne paralel olan doğrunun kartezyen denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x-2=\frac{y}{4}=\frac{z+1}{-2}$ B) $\frac{x+4}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{4}$

C) $x+1=\frac{y}{4}=\frac{z-2}{-2}$ D) $\frac{x}{4}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{2}$

E) $x+1=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+2}{4}$

2. **A(5, –3, 2) noktasından geçen ve $\vec{u}$ = (1, 0, 4) vektörüne paralel olan doğrunun kertezyen denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x-5=\frac{z-2}{4}=y+3$ B) $x-5=y+3=\frac{z-2}{4}$

C) $x-5=y+3=\frac{z-2}{4}$ D) $\frac{x-1}{5}=\frac{y}{-3}=\frac{z-4}{2}$

E) $\frac{x-5}{4}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-2}{-2}$

3. **Orijinden geçen ve $\vec{u}$ = (–3, –2, 4) vektörüne paralel olan doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{x-3}{-3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-4}{4}$ B) $\frac{x}{-3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{4}$

C) $x-3=y+2=\frac{z-2}{4}$ D) $x+3=y+2=z-4$

E) $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4}$

4. $\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{5}$ **doğrusunun doğrultman vektörü aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) (2, –1, 3) B) (2, 3, 1) C) (4, 2, 5)

D) (4, –1, 3) E) (2, 2, 3)

5. A(–1, –2, 7) noktasından geçen ve doğrultman vektörü $\vec{u}$ = (4, 4, –3) **olan doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-7}{4}$ B) $\frac{x+4}{-1}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z+3}{7}$

C) $\frac{x-4}{-1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+3}{7}$ D) $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+3}{7}$

E) $\frac{x+1}{4}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-7}{-3}$

6. $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-4}{5}$ **doğrusunun parametrik denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) x = 2 + 3k
y = –3 – 2k
z = 4 + 5k

B) x = 3 + 2k
y = –2 + 3k
z = 5 + 4k

C) x = 5 + 3k
y = 3 – 2k
z = 4 – 5k

D) x = 3 + 2k
y = –2 – 3k
z = 5 + 4k

E) x = 4 – 5k
y = 3 + 2k
z = 2 – 3k

1) C 2) A 3) B 4) C 5) E 6) A

7. $x - 3 = \frac{y-4}{2} = z + 3$ **doğrusunun parametrik denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x = 3 + k$, $y = 4 + k$, $z = 3 - 2k$

B) $x = 3 + k$, $y = 4 + 2k$, $z = -3 + k$

C) $x = 2k + 4$, $y = y = 1 + k$, $z = z = 3 - 3k$

D) $x = 4 + k$, $y = 2 - 3k$, $z = -3k$

E) $x = 4 - k$, $y = 4 + 2k$, $z = 3 + k$

8. Parametrik denklemi $x = 2 + 3k$, $y = 1 - 2k$, $z = 4 + k$

olan doğrunun geçtiği nokta aşağıdakilerden hangisidir?

A) (2, –2, 4) B) (3, –2, 1) C) (3, 1, 4) D) (2, –2, 1) E) (2, 1, 4)

9. **Kartezyen denklemi** $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-1}$ **olan doğrunun geçtiği nokta aşağıdakilerden hangisidir?**

A) (4, 2, –1) B) (4, –1, 3) C) (2, –1, 3) D) (–2, 2, –1) E) (3, 2, 4)

10. Parametrik denklemi $x = 2 - k$, $y = 3$, $z = 1 + 3k$

olan doğrunun doğrultman vektörü aşağıdakilerden hangisidir?

A) (–1, 0, 3) B)(2, 3, 1) C) (–1, 3, 3) D) (2, 3, 3) E) (–1, 3, 1)

11. **Kartezyen denklemi** $\frac{x+3}{-2} = \frac{2-y}{3} = \frac{1+z}{-4}$ **olan doğrunun doğrultman vektörü aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) (–3, –2, –4) B) (–2, –3, –4) C) (–2, 3, –4) D) (–2, 2, –1) E) (–4, 3, –2)

12. **Aşağıdaki noktalardan hangisi denklemi**

$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ **olan doğrunun üzerindedir?**

A) (1, 2, –3) B) (0, –2, 4) C) (0, 4, 6) D) (1, 1, 3) E) (2, 7, 1)

7) B 8) E 9) C 10) A 11) B 12) C

1. A(2, 0, –1) ve B(1, 1, 4) **noktasından geçen doğrunun kartezyen denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{x-1}{2} = y-4 = z+1$

B) $\frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{5}$

C) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}$

D) $\frac{x-1}{2} = \frac{z-4}{-1} = y-1$

E) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = z-1$

2. A(1, 2, –1) ve B(0, 0, –3) **noktalarından geçen doğrunun parametrik denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x = 1-2k$, $y = 2-2k$, $z = 1+k$

B) $x = k$, $y = 2k$, $z = -1-3k$

C) $x = 1-k$, $y = 2-k$, $z = -3-2k$

D) $x = 1-k$, $y = 2-2k$, $z = -1-2k$

E) $x = k$, $y = 2k$, $z = -1+3k$

3. **Orijinden ve A(–3, 2, 2) noktasından geçen doğrunun kartezyen denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$

B) $\frac{x}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$

C) $\frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2}$

D) $\frac{x-3}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$

E) $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{2}$

4. $\vec{A}$ = (–4, m, n) vektörü $\frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{6} = \frac{z+5}{4}$ doğrusuna paralel olduğuna göre, **m – n farkı kaçtır?**

A) –8 B) –4 C) –2 D) 4 E) 8

5. **A(2, 1, 3) noktasından geçen ve $\vec{u}$ = (4, –3, 1) vektörüne paralel olan doğrunun vektörel denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\vec{x}$ = (2, 1, 3) + k.(4, –3, 1)

B) $\vec{x}$ = (4, –3, 1) + k.(2, 1, 3)

C) $\vec{x}$ = (4, –3, 1) + k.(2, –4, –2)

D) $\vec{x}$ = (2, 1, 3) + k.(2, –4, –2)

E) $\vec{x}$ = (–2, 4, 2) + k.(2, 1, 3)

6. **Uzayda denklemi $\frac{2x-2}{3} = \frac{3y-1}{4} = \frac{4z+2}{-2}$ olan doğrunun doğrultman vektörlerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) (2, 3, 4) B) (3, 4, –2) C) $\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{-1}{2}\right)$

D) $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -2\right)$ E) $\left(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{4}, -1\right)$

1) B 2) D 3) B 4) B 5) A 6) C

7. A(–1, 0, 3) ve B(4, 4, 3) **noktalarından geçen doğrunun vektörel denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\vec{x} = (-1, 0, 3) + k(5, 4, 0)$

B) $\vec{x} = (4, 4, 3) + k.(-1, 0, 3)$

C) $\vec{x} = (-1, 0, 3) + k.(4, 4, 3)$

D) $\vec{x} = (5, 4, 0) + k.(4, 4, 3)$

E) $\vec{x} = (5, 4, 0) + k.(-1, 0, 3)$

8. A(3, 0, –4) ve B(1, 1, –1) **noktalarından geçen doğrunun parametrik denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x = 1 + 3k$, $y = k$, $z = -4 - k$

B) $x = 3 + k$, $y = 1$, $z = -4 - k$

C) $x = 3 - 2k$, $y = k$, $z = -4 + 3k$

D) $x = 2 + 3k$, $y = 1 - k$, $z = 4 - k$

E) $x = 3k$, $y = 1 + k$, $z = -4 + k$

9. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+2}{3}$ doğrusuna paralel olan ve A(–1, 1, 4) **noktasından geçen doğrunun vektörel denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\vec{x} = (-1, 1, 4) + k(1, -1, 2)$

B) $\vec{x} = (2, 2, 4) + k.(-1, 1, -2)$

C) $\vec{x} = (-1, 1, 4) + k.(2, 4, 3)$

D) $\vec{x} = (2, 4, 3) + k.(-1, 1, 4)$

E) $\vec{x} = (-1, 1, -2) + k.(-2, 4, 3)$

10. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2}, z = 3$ doğrusuna paralel olan ve A(–1, 4, 5) **noktasından geçen doğrunun parametrik denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x = 2 + 3k$, $y = 1 + 2k$, $z = 3$

B) $x = -1 + 2k$, $y = 1 + 2k$, $z = 3k$

C) $x = -1 - k$, $y = 1 + 4k$, $z = 3 - 5k$

D) $x = -1 + 3k$, $y = 4 + 2k$, $z = 4$

E) $x = 3 - k$, $y = 2 + 4k$, $z = 5k$

11. Parametrik denklemi $x = 1 - k$, $y = 2 + 3k$, $z = 3 - 4k$

olan doğruya paralel ve A(–2, 1, –1) noktasından geçen doğrunun vektörel denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\vec{x} = (1, 2, 3) + k.(-1, 2, -4)$

B) $\vec{x} = (-2, 6, -1) + k.(1, 2, 3)$

C) $\vec{x} = (-2, 1, -1) + k.(-1, 3, -4)$

D) $\vec{x} = (-1, 3, -4) + k.(-2, 1, -1)$

E) $\vec{x} = (1, 2, 3) + k.(-2, 1, -1)$

12. Parametrik denklemi $x = 3k$, $y = 1 + 2k$, $z = 2 - k$

olan doğruya paralel ve A(0, ,2, 3) noktasından geçen doğrunun vektörel denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\vec{x} = (0, -2, 3) + k.(3, 2, -1)$

B) $\vec{x} = (3, 2, -1) + k.(0, ,2, 3)$

C) $\vec{x} = (0, 2, 3) + k.(3, 2, 1)$

D) $\vec{x} = (0, 1, 2) + k.(0, -2, 3)$

E) $\vec{x} = (0, -2, 3) + k.(3, 1, 2)$

7) A 8) C 9) C 10) D 11) C 12) A

1. A(–2, 1, 1) noktasından geçen ve $\vec{N} = (3, 1, 2)$ **vektörüne dik olan düzlemin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-2x + y + z - 6 = 0$ B) $2x - y - z + 4 = 0$

C) $3x + y - 2z - 7 = 0$ D) $3x + y + 2z + 3 = 0$

E) $x - 2y + 3z - 4 = 0$

2. A(1, –1, –2) noktasından geçen ve

$\vec{u} = (2, 1, 5)$ ve $\lambda_2 = (-3, -1, 4)$ vektörlerinin belirttiği düzlemin λ_1 ve λ_2 parametrelerine bağlı ($\lambda_1, \lambda_2 \in IR$)

denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\vec{x} = (1, -1, -2) + (2, 1, 5)\,\lambda_1 + (-3, -1, 4)\,\lambda_2$

B) $\vec{x} = (-3, -1, 4) + (1, -1, -2)\,\lambda_1 + (-3, -1, 4)\,\lambda_2$

C) $\vec{x} = (-3, -1, 4) + (1, ,1, -2)\,\lambda_1 + (2, 1, 5)\,\lambda_2$

D) $\vec{x} = (2, 1, 5) + (-3, -1, 4)\,\lambda_1 + (1, -1, -2)\,\lambda_2$

E) $\vec{x} = (1, -1, -2) + (-5, -2, -1)\lambda_1 + (-3, -1, 4)\lambda_2$

3. **Başlangıç noktasından geçen ve $\vec{N} = (-4, ,2, -1)$ vektörüne dik olan düzlem denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $4x - 2y + z = 0$ B) $4x + 2y + z - 4 = 0$

C) $x - 2y + 4z = 0$ D) $2x - 4y - z + 2 = 0$

E) $2x - y + 4z = 0$

4. A(1, –3, –4) noktasından geçen ve $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-z}{4} = \dfrac{z-3}{5}$ **doğrusuna dik olan düzlemin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $4x - 3y - 2z - 9 = 0$ B) $3x + 4y + 5z - 21 = 0$

C) $2x - y + 4z - 12 = 0$ D) $4x - 3y + 5z - 21 = 0$

E) $3x + 4y + 5z + 29 = 0$

5. A(0, 2, 4) ve B(1, –3, –1) noktaları veriliyor.

A noktasından geçen ve $\overrightarrow{AB}$ vektörüne dik olan düzlemin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $5x - y - 5z + 19 = 0$ B) $x - 5y - 5z + 30 = 0$

C) $x - 3y - z + 12 = 0$ D) $2x - 5y + 4z - 3 = 0$

E) $x + 4y - 2z - 9 = 0$

6. A(1, 1, 2), B(–1, 0, –1) ve C(0, –3, 2)

noktalarından geçen düzlem denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x + 5y - 7z + 4 = 0$ B) $9x - 5y + 3z - 21 = 0$

C) $5x + 3y + 7z - 9 = 0$ D) $12x - 3y - 7z + 5 = 0$

E) $8x + 7y + 2z - 26 = 0$

1) D 2) A 3) A 4) E 5) B 6) D

7. **Orijinden ve A(3, 3, 1), B(0, –1, 0) noktalarından geçen düzlemin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x - 3z = 0$
B) $x + y - 2z = 0$
C) $3x + 3y + z = 0$
D) $x - 2y = 0$
E) $2x - y + 3z = 0$

8. $4x - 2y + 3z + m = 0$ **düzlemi A(1, 2, –1) noktasından geçtiğine göre, m kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

9. $4x + 4y - z + 7 = 0$ düzlemin normal vektörü $\vec{u} = (12, m, n)$ vektörüne paralel olduğuna göre, **m + n toplamı kaçtır?**

A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

10. $3x - y + 2z - 6 = 0$ düzleminin normal vektörü

$\vec{u} = (2, a, a + 1)$ vektörüne dik olduğuna göre,

a nın değeri kaçtır?

A) 6 B) 4 C) –2 D) –6 E) –8

11. $-2x + 3y - 4z + 5 = 0$ düzleminin normal vektörü

$\frac{x-2}{k} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{-2}$ doğrusunun doğrultman vektörüne dik olduğuna göre, **k değeri kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 5 D) 7 E) 8

12. A(3, 2, –4) noktasından geçen ve $x - 3y + 4z - 6 = 0$ **düzlemine paralel olan düzlemin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x - 3y + 4z - 2 = 0$
B) $3x - y + 4z + 15 = 0$
C) $x - 3y + 4z + 19 = 0$
D) $3x + 2y - 4z - 17 = 0$
E) $4x - 3y + z - 6 = 0$

7) A 8) B 9) D 10) E 11) D 12) C

1. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{2}$ ve $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2}, z = 3$

doğrularının belirttiği düzlemin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2x - y + 5z - 11 = 0$

B) $x + 3y + z - 8 = 0$

C) $2x - 5y + 4z - 17 = 0$

D) $4x - 2y + 5z + 25 = 0$

E) $3x + 2y + 4z + 11 = 0$

2. **A(1, –1, 0) noktasının** $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = z - 2$ **doğrusuna uzaklığı kaç birimdir?**

A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

D) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{4\sqrt{2}}{4}$

3. **A(1, 0, 1) noktasının** $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$ **doğrusuna uzaklığı kaç birimdir?**

A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$

D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ E) $2\sqrt{5}$

4. A(1, 1, –1) noktasının parametrik denklemi

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 - 3k \\ y = 1 + 4k \\ z = -1 + 12k \end{array}\right\}$$ **doğrusuna uzaklığı kaç birimdir?**

A) $\frac{2\sqrt{10}}{13}$ B) $\frac{4\sqrt{10}}{13}$ C) $\frac{6\sqrt{2}}{13}$

D) $\frac{8\sqrt{2}}{13}$ E) $\frac{9\sqrt{3}}{13}$

5. A(3, 4, 2) noktasının vektörel denklemi

$\vec{x} = (4, 3, 1) + k.(2, 1, -2)$

olan doğruya uzaklığı kaç birimdir?

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) $\sqrt{6}$

6. Denklemleri $2x - 3y + 2z + 4 = 0$ ve $4x - 6y + mz + n = 0$

olan paralel düzlemler arasındaki uzaklık $\sqrt{17}$ birim olduğuna göre, n nin pozitif değeri kaçtır?

A) 26 B) 30 C) 34 D) 42 E) 48

1) D 2) C 3) A 4) B 5) B 6) D

7. Denklemleri

$6x - (m - 1)y + (n - 2)z + 4 = 0$ ve

$2x + 3y + 6z - 21 = 0$ **olan düzlemler birbirine paralel olduğuna göre, m + n toplamı kaçtır?**

A) 4 B) 8 C) 12 D) 16 E) 20

8. Denklemleri $(m + 3)x + 2y - (k + 3)z - 5 = 0$ ve

$(m - 2)x + y + 2z - 7 = 0$ **düzlemleri birbirine paralel olduğuna göre, m + k toplamı kaçtır?**

A) –4 B) –6 C) –8 D) –10 E) –12

9. Denklemleri $3x + (m - 2)y + 8z + 5 = 0$ ve

$mx + 2y + 8z + 7 = 0$ olan düzlemler birbirine dik olduğuna göre, **m kaçtır?**

A) –12 B) –10 C) –8 D) –6 E) –4

10. Denklemleri $2x + (n - 3)y + 2z - 1 = 0$ ve

$x - y + (m - 2)z + 11 = 0$ olan düzlemler birbirine dik olduğuna göre, **2m – n farkı kaçtır?**

A) –3 B) –1 C) 1 D) 2 E) 3

11. Denklemleri $4x + ky + 6z - 5 = 0$ ve

$2x + 6y - (2m - 4)z - n = 0$ olan düzlemler çakışık olduğuna göre, **m + n + k toplamı kaçtır?**

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 24

12. A(–1, 0, 2) noktasından geçen $x - 3y + nz + 7 = 0$ düzlemi

$2x + my - kz + 12 = 0$ düzlemine paralel olduğuna göre,

k + m + n toplamı kaçtır?

A) –7 B) –3 C) –1 D) 4 E) 8

7) C 8) C 9) A 10) B 11) C 12) B

1. Denklemleri $x - 2y + z = 5$ ve $x + y - 2z = 2$

olan düzlemlerin arakesit doğrusu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-4}{2}$

B) $x - 4 = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{4}$

C) $\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{3}$

D) $x - 1 = y + 1 = \frac{z-2}{3}$

E) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-1}$

2. Denklemleri $3x - 2y + z - 4 = 0$ ve

$x + 2y + z + 12 = 0$ **olan düzlemlerin arakesit doğrusunun parametrik denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x = 2 + 4k,\ y = 1 + 2k,\ z = 4k$

B) $x = -2,\ y = -3 + 4k,\ z = 4 + 8k$

C) $x = 1 - 3k,\ y = 1 + k,\ z = 2 - k$

D) $x = 1 - 2k,\ y = 1 + 4k,\ z = 3 - 3k$

E) $x = 5 + 3k,\ y = 2k,\ z = 1 + 4k$

3. Analitik uzayda A(1, 2, 4) noktasının

$2x + 6y + 3z - 12 = 0$ **düzlemine uzaklığı kaç birimdir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4. A(0, –1, –2) noktasının $3x - 4y + 12z + k = 0$

düzlemine uzaklığı 2 birim olduğuna göre,

k nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) 28 B) 32 C) 36 D) 40 E) 48

5. $x - 4y + 2z + 12 = 0$ ve $2x - 8y + 4z - 4 = 0$

düzlemlerinden eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x - 4y + 2z + 5 = 0$

B) $2x - 4y + 6z - 18 = 0$

C) $4x + 2y + 2z - 10 = 0$

D) $2x - 8y + 4z - 16 = 0$

E) $x - 4y + 2z - 3 = 0$

6. $x - 2y + 2z - 12 = 0$ ve $2x - 4y + 4z + 6 = 0$

düzlemleri arasındaki uzaklık kaç birimdir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

1) C 2) B 3) B 4) D 5) A 6) E

7. $x - 2y + z + k = 0$ ve $2x - my + nz + 4 = 0$

paralel düzlemleri arasındaki uzaklık $\sqrt{6}$ birim olduğuna göre,

k + m + n toplamının en küçük değeri kaçtır?

A) –8 B) –4 C) 2 D) 4 E) 8

8. Denklemleri $x + y - 2z - 12 = 0$ ve $x - y + z + 7 = 0$ **olan düzlemlerin arakesit doğrusundan ve A(1, 0, –3) noktasından geçen düzlemin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $2x + y + 3z + 8 = 0$
B) $x + 3y + 2z - 4 = 0$
C) $2x - y + 3z - 6 = 0$
D) $x + y + 2z - 5 = 0$
E) $2x - z - 6 = 0$

9. Denklemleri $3x - y + 2z - 14 = 0$ ve $x + y - 2 = 0$ **düzleminin arekesitinden ve A(2, 1, –2) noktasından geçen düzlem denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $4x + 8y + 2z - 12 = 0$
B) $8x + 6y + z - 20 = 0$
C) $x + 4y - 6z - 22 = 0$
D) $2x + 4y - 3z - 7 = 0$
E) $2x + y - 6z + 12 = 0$

10. A(0, –2, –1) noktasının $6x - 2y + 3z - m = 0$ düzlemine uzaklığı 3 birim olduğuna göre, **m sayısının pozitif değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 22 B) 20 C) 18 D) 16 E) 12

11. $2x - 2\sqrt{3}y - 3z - 16 = 0$ ve $-2x + 2\sqrt{3}y + 3z - 24 = 0$

düzlemleri arasındaki uzaklık kaç birimdir?

A) 8 B) 6 C) 4 D) 2 E) 1

12. $2x - y + 4z - 4 = 0$ ve $4x + y + 2z + 12 = 0$

düzlemlerinden eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2x + 2y + 2z + 15 = 0$
B) $x + 2y + 2z - 8 = 0$
C) $2x + 2y - z - 6 = 0$
D) $x + y - z - 4 = 0$
E) $x + 2y - z - 8 = 0$

7) C 8) E 9) B 10) A 11) A 12) D

1. Denklemleri $x - 2y - z + 4 = 0$ ve $2x + 2y + z + 11 = 0$ olan düzlemlerin arekesit doğrusundan geçen ve

$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-2}$, $z = -4$ **doğrusuna paralel olan düzlemin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $3x + 7y - z + 7 = 0$

B) $7x + 3y - 4z + 14 = 0$

C) $5x - 6y + 11z - 12 = 0$

D) $3x + 4y - 7z + 12 = 0$

E) $x + 2y + z + 6 = 0$

2. Denklemleri $x - 3y + 4z - 6 = 0$ ve $x + y - 2z - 2 = 0$ olan düzlemlerin arakesit doğrusundan geçen ve

$x = 1 - k$

$y = 2k$

$z = 3 + k$ **doğrusuna paralel olan ve düzlemin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x + 3y - 5z = 0$

B) $4x + 6y - 7z + 12 = 0$

C) $4x + 7y - 8z - 4 = 0$

D) $2x + 5y + 7z - 9 = 0$

E) $6x + 5y - 8z - 14 = 0$

3. $2\sqrt{2}x - 2y + 2z - 16 = 0$ ve $2\sqrt{2}x + 2y + 2z - 11 = 0$

düzlemleri arasındaki ölçek açının ölçüsü kaç derecedir?

A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 90

4. $x + y - \sqrt{2}z + 7 = 0$ ve $x - y + \sqrt{2}z - 4 = 0$

düzlemleri arasındaki ölçek açının ölçüsü kaç derecedir?

A) 120 B) 90 C) 60 D) 45 E) 15

5. $2x + y - 2z + 6 = 0$ ve $2x + 2y - z - 2 = 0$

düzlemleri arasındaki açının tanjant değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\sqrt{17}}{8}$ B) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. $x - y + \sqrt{2}z + 6 = 0$ ve $a.x + y - \sqrt{2}z - k = 0$

düzlemleri arasındaki açının 60° olması için a değeri kaç olmalıdır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

1) E 2) A 3) D 4) C 5) A 6) D

7. $\frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z-1}{-2}$ doğrusunun $2x - 3y + z + 12 = 0$

düzleminin kesim noktası aşağıdakilerden hangisidir?

A) (11, 7, 21) B) (10, –7, 4)
C) (20, 11, –9) D) (3, 8, 12)
E) (–3, 11, 19)

8. Parametrik denklemi $x = 2k + 1$
$y = 3k - 1$
$z = 2 - k$

olan doğrunun $x - y + 2z - 12 = 0$ düzlemini kestiği noktanın

$2x + 2y + z - 8 = 0$ **düzlemine olan uzaklığı kaç birimdir?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

9. Vektörel denklemi $\vec{x} = (-1, -1, -2) + k.(2, 2, 1)$ olan doğru ve

$x + 2y + z - 2 = 0$ **düzleminin kesim noktası aşağıdakilerden hangisidir?**

A) (1, 1, –1) B) (–1, 0, 0)
C) (3, –2, –1) D) (1, 2, 1)
E) (2, 2, 9)

10. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{2} = z$ doğrusu ile $x + 2y + z - 7 = 0$

düzlemi arasındaki açının cotanjant değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{5}$
D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

11. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = z + 1$ doğrusu ile $2x - y + z - 1 = 0$

düzleminin arakesit noktası aşağıdakilerden hangisidir?

A) (–1, 0, 1) B) (1, 1, 0) C) (–1, 2, 2)
D) (1, 3, 1) E) (2, 2, –1)

12. $\frac{x+9}{2} = y - 3 = 1 - z$ doğrusu ile $x - y - 2z + 4 = 0$

düzlemi arasındaki dar açının ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?

A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 75

7) C 8) E 9) A 10) D 11) B 12) B

DERS NOTLARI